
SUJET 4

PRELIMINAIRE

Q1 $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $u(x) = \tan x$. Montrer que u est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} . On note \arctan la bijection réciproque.

Q2 Montrer que \arctan est dérivable sur \mathbb{R} et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

(n'auront des points, sur cette question, que les gens qui énonceront avec précision le théorème utilisé).

Q3 a est un élément de \mathbb{R}^{+*} . Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{a^2+t^2}$ existe et vaut $\frac{\pi}{a}$.

PARTIE I

Dans cette partie a est un réel strictement positif.

Q1 On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$. Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Dans toute cette partie X est une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) admettant f_a pour densité.

On dit alors que X suit une **loi de Cauchy de paramètre a** et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$.

Q2 Donner la fonction de répartition de X . X possède-elle une espérance ?

Q3 Soit λ un réel strictement positif. Prouver que $T = \lambda X \hookrightarrow \mathcal{C}(\lambda a)$. Et pour λ strictement négatif ?

Q4 Y est une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}, P) suivant une loi de Cauchy de paramètre b ($b \in \mathbb{R}^{+*}$).

On suppose que X et Y sont indépendantes et on se propose d'étudier $X + Y$.

a) x et t sont deux réels. On pose $c = [x^2 + (b+1)^2][x^2 + (b-1)^2]$. Montrer que :

$$\frac{c}{[(t-x)^2+1][t^2+b^2]} = x \left[\frac{2t}{t^2+b^2} - \frac{2(t-x)}{(t-x)^2+1} \right] + \frac{x^2+b^2-1}{(t-x)^2+1} + \frac{x^2-b^2+1}{t^2+b^2}$$

(partir du membre de droite et réduire au même dénominateur ; grugeurs professionnels s'abstenir...).

b) Montrer que si $a = 1$: $X + Y \hookrightarrow \mathcal{C}(1+b)$ (poser le problème, intégrer la formule précédente entre A et B et passer à la limite ; on pourra commencer par écrire le résultat que l'on souhaite obtenir).

c) En utilisant Q3 et Q4 b) montrer dans le cas général que : $X + Y \hookrightarrow \mathcal{C}(a+b)$.

PARTIE II

Q1 Dans cette partie a est un réel strictement positif et X est une variable aléatoire réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) qui suit une loi de Cauchy de paramètre a . On pose $Z = \ln |X|$.

a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité admettant pour densité h_a définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_a(x) = \frac{2a}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x} + a^2}$$

b) Montrer que Z possède une espérance.

Montrer que $E(Z) = \frac{2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2} dt$ (poser $t = e^x$)

c) Montrer à l'aide d'un changement de variable que $\int_0^1 \frac{\ln v}{v^2 + 1} dv = - \int_1^{+\infty} \frac{\ln w}{w^2 + 1} dw$.

En déduire que $E(Z) = \ln a$ ($t = ua$)

Q2 X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) qui suivent une loi de Cauchy de paramètre 1.

On pose $L = \ln |XY|$ et $h = h_1$.

a) Montrer à l'aide de Q1 que L est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction K définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, K(x) = \frac{4x}{\pi^2(e^x - e^{-x})} \quad \text{et} \quad K(0) = \frac{2}{\pi^2}$$

(pour x différent de 0, faire le changement de variable $y = e^{2t}$ et remarquer que $\frac{1}{(y+1)(y+e^{2x})} = \frac{1}{e^{2x}-1} \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+e^{2x}} \right)$)

b) Utiliser $\int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt = 1$ pour montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt = \frac{\pi^2}{4}$ et $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt = \frac{\pi^2}{8}$.

Q3 a) On pose, pour tout élément x de $]0, 1[$, $\Phi(x) = \frac{x \ln x}{x - 1}$.

Montrer que Φ est prolongeable en une fonction continue $\widehat{\Phi}$ sur $[0, 1]$.

Prouver que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^{2n+1} \widehat{\Phi}(t) \frac{1}{t+1} dt = 0$.

b) n est élément de \mathbb{N} et t est élément de $]0, 1[$. Vérifier que :

$$\frac{\ln t}{t^2 - 1} = - \sum_{k=0}^n (t^{2k} \ln t) + \frac{\widehat{\Phi}(t) t^{2n+1}}{t+1}.$$

En déduire que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Prouver que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (regrouper les pairs et les impairs).

c) S'inspirer de ce qui précède pour prouver que : $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$ et en déduire la valeur de : $\int_0^1 \frac{\ln t}{t+1} dt$

Q4 Pour tout n dans \mathbb{N}^* , $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t^2)^n} dt$.

a) Etablir l'existence de I_n et J_n pour tout n dans \mathbb{N}^* .

b) n est élément de \mathbb{N}^* . Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n . Calculer I_n .

c) Etablir une relation entre J_{n+1} , J_n et I_n pour tout élément n de \mathbb{N}^* .

d) Préciser les valeurs de J_2 et J_3 .