PROBLÈME

PRELIMINAIRE

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ u(x) = \tan x$

Q1.. Montrer que u est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On note Arctan la bijection réciproque.

Q2.. Montrer que Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'x = \dfrac{1}{1+x^2}$.
(On rappellera le théorème du cours utilisé).

Q3.. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{a^2+t^2}$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{a}$ et ceci pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
(utiliser la parité et un changement de var)

PARTIE I

Dans cette partie <u>a est un réel strictement positif.</u>

Q1.. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = \dfrac{a}{\pi(a^2+x^2)}$. Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Dans toute cette partie X est une var sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ admettant f_a pour densité, on dit alors que X suit une <u>loi de Cauchy de paramètre a</u> et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$.

Q2.. Donner la fonction de répartition de X.
X admet-elle une espérance ?

Q3.. Soit λ un réel strictement positif. Prouver que $T = \lambda X \hookrightarrow \mathcal{C}(\lambda a)$.

Q4.. Y est une var sur $(\Omega, \mathcal{B}, p)$ suivant une loi de Cauchy de paramètre b. On suppose <u>X et Y indépendantes</u> et on se propose d'étudier $X+Y$.

<u>a)</u> x et t sont des réels et $c = [x^2+(b+1)^2][x^2+(b-1)^2]$

Montrer que :

$$\frac{c}{[(t-x)^2+1][t^2+b^2]} = x\left[\frac{2t}{t^2+b^2} - \frac{2(t-x)}{(t-x)^2+1}\right] + \frac{x^2+b^2-1}{(t-x)^2+1} + \frac{x^2-b^2+1}{t^2+b^2} \quad (*)$$

<u>b)</u> Montrer que si <u>$a=1$</u> : $X+Y \hookrightarrow \mathcal{C}(1+b)$ (poser le produit et intégrer la formule précédente entre B et A et faire tendre B vers $-\infty$ et A vers $+\infty$).

<u>c)</u> En utilisant Q3 et Q4 <u>b)</u> montrer que, dans le cas général

$X+Y \hookrightarrow \mathcal{C}(a+b)$.

(*) Noter S le membre de droite et calculer $[(t-x)^2+1][t^2+b^2]\,S$ ... et reconnaître c.

PARTIE II

(Q1) X est une var sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ suivant une loi de Cauchy de paramètre a ($a\in\mathbb{R}_+^*$)

$Z=\ln|X|$ (pour les puristes : $\forall\omega\in\Omega$, $Z(\omega)=\ln|X(\omega)|$ si $X(\omega)\neq 0$ et $Z(\omega)=0$ si $X(\omega)=0$!)

a) montrer que Z est une variable aléatoire à densité admettant pour densité h_a définie par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $h_a(x)=\dfrac{2a}{\pi}\,\dfrac{e^x}{e^{2x}+a^2}$.

b) montrer que Z possède une espérance et que $E(Z)=\dfrac{2a}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt$

(poser $t=e^x$)

c) montrer à l'aide d'un changement de variable que : $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln v}{v^2+1}\,dv=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln w}{w^2+1}\,dw$

En déduire que : $E(Z)=\ln a$ ($t=au$!)

(Q2) X et Y sont deux var indépendantes sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ qui suivent une loi de Cauchy de paramètre $\boxed{1}$

$L=\ln|XY|$ et $h=h_1$.

a) montrer à l'aide de Q1 que L est une var à densité admettant pour densité K définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ K(x)=\frac{4x}{\pi^2(e^x-e^{-x})}\quad\text{et}\quad K(0)=\frac{2}{\pi^2}$$

(Pour $x\neq 0$ remarquer que $\dfrac{1}{(y+1)(y+e^{2x})}=\dfrac{1}{e^{2x}-1}\left(\dfrac{1}{y+1}-\dfrac{1}{y+e^{2x}}\right)$ ... après avoir fait le changement de variable $y=e^{2t}$ (oui deux t)

b) Utiliser $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}K(x)\,dx=1$ pour montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2-1}\,dt=\frac{\pi^2}{4}$.

montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{t^2-1}\,dt=\frac{\pi^2}{8}$.

$\rightarrow$

Q3 a) On pose $\forall x \in]0,1[$, $\phi(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}$.

Notez que ϕ est prolongeable en une fonction continue $\hat{\phi}$ sur $[0,1]$

Prouver que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^{2n+1}\hat{\phi}(x)\,\dfrac{1}{x+1}\,dx = 0$

b) $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$.

Vérifier que : $\dfrac{\ln x}{x^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} (x^{2k}\ln(x)) + \dfrac{\hat{\phi}(x)\, x^{2n+1}}{x+1}$.

En déduire que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

Prouver que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ (on pourra regrouper les pairs et les impairs...)

c) S'inspirer de ce qui précède pour prouver que : $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x-1}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

Notez que $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1,1\}$, $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$. En déduire la valeur de $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x+1}\,dx$.

Q4 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(1+x^2)^n}$ et $J_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{(1+x^2)^n}\,dx$.

a) Etablir l'existence de I_n et J_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n. Calculer I_n. Et si c'était Wallis ?

c) Etablir une relation entre J_{n+1}, J_n et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Préciser les valeurs de J_2 et J_3.

$\uparrow$ c'est une question

Fin du DS sauf pour ceux qui ont terminé I et II

Pour mémoire voici une partie III qui traite de la fonction génératrice ϕ_X d'une var à d X qui suit une loi de Cauchy de paramètre a.

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \phi_X(y) = E(e^{iyX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\, e^{iyx}\,dx}{\pi(x^2+a^2)} = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(yx)}{x^2+a^2}\,dx + i\,\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(yx)}{x^2+a^2}\,dx$$

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \phi_X(y) = \frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(yx)}{x^2+a^2}\,dx \underset{x=at}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ayt)}{1+t^2}\,dt \text{ n'est-il pas !}$$

PARTIE III

(Q1) On considère la fonction numérique de la variable réelle $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt$

a) Montrer que $D_F = \mathbb{R}$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = \frac{2\varphi(x)}{x^2}$ avec

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^3}(1-3t^2)\,dt.$$

c) $x \in \mathbb{R}$. On pose : $\theta(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^3}(1-3t^2)\,dt$ et on considère

$$\Delta(h) = \Delta : h \mapsto \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \theta(x)$$

Justifier l'existence de θ. En appliquant l'inégalité de Taylor Lagrange à la fonction cos montrer que : $\lim_{h \to 0} \Delta(h) = 0$.

En déduire que φ est dérivable en x et que $\varphi'(x) = \theta(x)$.

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\varphi'(x) = x\left(\frac{3}{2}F(x) - G(x)\right)$ où

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

e) On admet que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}\,dt$

(même démonstration que pour φ...)

Montrer alors que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F''(x) = F(x)$.

(Q2) On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $u(x) = \frac{F(x)}{e^x}$. Montrer que $2u' + u''$ est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$

On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $v(x) = \frac{u'(x)}{e^{-2x}}$. Montrer que v est constante sur $\mathbb{R}_+^*$

En déduire que $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$

Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}$; en déduire que $\alpha = 0$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
$F(x) = \beta e^{-|x|}$.

Q3 Soit $\varepsilon \in]0, 2\pi[$ et $\gamma = \dfrac{1}{\tan(\varepsilon/4)}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$

Montrer que : $\left| \int_\gamma^{+\infty} \dfrac{(1-\cos(tx))}{1+t^2}\, dt \right| \leq \varepsilon/2$

En remarquant que $|1-\cos(tx)| \leq |tx|$ montrer que :

$$\left| \int_0^\gamma \frac{(1-\cos(tx))}{1+t^2}\, dt \right| \leq \left|\frac{x}{2}\right| \ln(1+\gamma^2).$$

En déduire que F est continue en 0 et préciser β.

Q4 X est une variable sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ suivant une loi de Cauchy de paramètre a. $y \in \mathbb{R}$ et $\phi_X(y) = E(e^{iyX})$.
espérance

Montrer que $\phi_X(y) = e^{-a|y|}$.

Q5 Retrouver I Q4 c)