PARTIE I

Q1 a) Soit $x\in\mathbb{R}$. • $t\mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est continue et positive sur $]0,1]$.

• $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} \underset{0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$.

Ainsi les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives indiquent que $\int_0^1 \dfrac{t^{x-1}}{1+t}dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \dfrac{dt}{t^{1-x}}$.

$\int_0^1 \dfrac{dt}{t^{1-x}}$ converge si et seulement si $1-x<1$; c'est à dire si et seulement si $x>0$

Alors $\int_0^1 \dfrac{t^{x-1}}{1+t}dt$ converge si et seulement si $x>0$.

<u>Finalement le domaine de définition de φ est $I=]0,+\infty[$.</u>

b) $\varphi(1)=\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t}=\left[\ln|1+t|\right]_0^1=\ln 2$. <u>$\varphi(1)=\ln 2$.</u>

$\varphi(1/2)=\int_0^1 \dfrac{t^{-1/2}dt}{1+t}=\int_0^1 \dfrac{2}{1+t}\,\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$.

Soit $\varepsilon\in]0,1[$. $\int_\varepsilon^1 \dfrac{t^{-1/2}}{1+t}dt=\int_\varepsilon^1 \dfrac{2}{1+t}\,\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt \underset{u=\sqrt{t}}{=} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \dfrac{2}{1+u^2}du$.

En faisant tendre ε vers 0 on obtient : $\varphi(1/2)=\int_0^1 \dfrac{2}{1+u^2}du=\left[2\,\mathrm{Arctan}\,u\right]_0^1=2\times\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

<u>$\varphi(1/2)=\dfrac{\pi}{2}$.</u>

Q2 a) Soit $x\in I$. $\varphi(x+1)+\varphi(x)=\int_0^1 \dfrac{t^x+t^{x-1}}{1+t}dt=\int_0^1 t^{x-1}dt=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left[\dfrac{t^x}{x}\right]_\varepsilon^1=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}(1-\varepsilon^x)\right)$
$=\dfrac{1}{x}$.

<u>$\forall x\in I,\ \varphi(x+1)+\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$. φ est solution de (E_1) sur I.</u>

b) Soit x un élément de I. $\forall t\in]0,1]$, $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{1+t}\leq1$ et $t^{x-1}\geq0$.

Alors $\forall t\in]0,1]$, $\dfrac{t^{x-1}}{2}\leq\dfrac{t^{x-1}}{1+t}\leq t^{x-1}$.

Nous venons de voir un peu plus haut que $\int_0^1 t^{x-1}dt$ existe et vaut $\frac{1}{x}$.

Alors $\frac{1}{2x} = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2}dt \leq \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt = \varphi(x) \leq \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall x \in]0,+\infty[, \ \frac{1}{2x} \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{x}}}$.

$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty$ donc alors $\underline{\underline{\lim_{x\mapsto 0^{(+)}} \varphi(x) = +\infty}}$.

$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{2x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et ainsi $\underline{\underline{\lim_{x\mapsto+\infty}\varphi(x) = 0}}$.

Q3 Soit $x \in I$. $x+1$ et $x+2$ sont également dans I.

$\varphi(x+2)+\varphi(x+1) = \frac{1}{x+1}$ et $\varphi_1(x+2)+\varphi_1(x+1) = \frac{1}{x+1}$.

Par différence : $\varphi(x+2)-\varphi_1(x+2)+\varphi(x+1)-\varphi_1(x+1) = 0$

Ainsi $d(x+2)+d(x+1) = 0$. De même $d(x+1)+d(x) = 0$.

Par différence il vient alors $d(x+2)-d(x) = 0$.

$\forall x \in I$, $x+2 \in I$ et $d(x+2) = d(x)$; $\underline{\underline{d \text{ est périodique de période } 2}}$.

Soit x un élément de I. Une récurrence des plus simples montre que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x+2n) = d(x)$.

$\lim_{z\mapsto+\infty}\varphi(z) = \lim_{z\mapsto+\infty}\varphi_1(z) = 0$ donc $\underline{\underline{\lim_{z\mapsto+\infty} d(z) = 0}}$. Ainsi $\lim_{n\mapsto+\infty} d(x+2n) = 0$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x+2n) = d(x)$: $d(x) = 0$! Ainsi $\varphi_1(x) = \varphi(x)$.

$\underline{\underline{\forall x \in I, \ \varphi_1(x) = \varphi(x)}}$. $\underline{\underline{\varphi_1 = \varphi}}$.

Q4 a) $x \in I$. Soit k dans $\mathbb{N}$.

$\frac{(-1)^k}{x+k} = (-1)^k[\varphi(x+k+1)+\varphi(x+k)] = (-1)^k\varphi(x+k)+(-1)^k\varphi(x+k+1)$

$\underline{\underline{\frac{(-1)^k}{x+k} = (-1)^k\varphi(x+k) - (-1)^{k+1}\varphi(x+k+1)}}$, ceci pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k} = \sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k\varphi(x+k)-(-1)^{k+1}\varphi(x+k+1)\right] = (-1)^0\varphi(x+0)-(-1)^{n+1}\varphi(x+n+1)$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k} = \varphi(x)-(-1)^{n+1}\varphi(x+n+1).$$

$\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k}-\varphi(x)\right| = |\varphi(x+n+1)|$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\varphi(x+n+1))=0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k}-\varphi(x)\right|=0$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k}=\varphi(x)$.

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}=\varphi(x)$.

Exercice.. Retrouver ce résultat en utilisant Q3 et ce que vous savez sur les séries alternées.

b) $\displaystyle\ln 2=\varphi(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$.

$\displaystyle\frac{\pi}{2}=\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\frac{1}{2}+n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{1+2n}=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

Q4 a) Soit $(x,y)\in I^2$ tel que $x\leq y$.

$\forall t\in\,]0,1]$, $\ln t\leq 0$ et $x-1\leq y-1$.

$\forall t\in\,]0,1]$, $(x-1)\ln t\geq(y-1)\ln t$.

$\forall t\in\,]0,1]$, $e^{(x-1)\ln t}\geq e^{(y-1)\ln t}$.

$\forall t\in\,]0,1]$, $t^{x-1}\geq t^{y-1}$. $\forall t\in\,]0,1]$, $t^{x-1}-t^{y-1}\geq 0$ et $1\geq\dfrac{1}{1+t}\geq 0$.

$\forall t\in\,]0,1]$, $\displaystyle t^{x-1}-t^{y-1}\geq\frac{t^{x-1}-t^{y-1}}{1+t}=\frac{t^{x-1}}{1+t}-\frac{t^{y-1}}{1+t}\geq 0$.

Rappelons que $\int_0^1 t^{x-1}dt$ (resp. $\int_0^1 t^{y-1}dt$) existe et vaut $\frac{1}{x}$ (resp. $\frac{1}{y}$).

Alors $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{t^{y-1}}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^{x-1}dt - \int_0^1 t^{y-1}dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$

$\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow 0 \leq \varphi(x) - \varphi(y) \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$.

b) Il résulte clairement de a) que φ est décroissante sur I.

Soit $(x,y) \in I^2$.

1er cas.. $x \leq y$. Alors $0 \leq \varphi(x) - \varphi(y) \leq \frac{y-x}{xy}$ donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{|y-x|}{xy} = \frac{|x-y|}{xy}$.

2e cas.. $y \leq x$. Alors $0 \leq \varphi(y) - \varphi(x) \leq \frac{x-y}{yx}$ donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \frac{|x-y|}{xy}$.

Finalement : $\forall (x,y) \in I^2,\ |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{|x-y|}{xy}$.

Soit $a \in I$. $\forall x \in I,\ |\varphi(x) - \varphi(a)| \leq \frac{|x-a|}{xa}$ et $\lim_{x \to a} \frac{|x-a|}{xa} = 0$.

Ainsi $\lim_{x \to a} (\varphi(x) - \varphi(a)) = 0$. $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a)$. φ est continue en a.

φ est continue sur I.

c) $\forall x \in I,\ \varphi(x) + \varphi(x+1) = \frac{1}{x}$; $\forall x \in I,\ x\varphi(x) = 1 - x\varphi(x+1)$.

$\lim_{x \to 0} \varphi(x+1) = \varphi(1)$ car φ est continue en 1 ; $\lim_{x \to 0} x\varphi(x) = \lim_{x \to 0} (1 - x\varphi(x+1)) = 1 - 0 \times \varphi(1) = 1$

Alors $\lim_{x \to 0} (x\varphi(x)) = 1$ et ainsi $\varphi(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

d) $\forall x \in]1,+\infty[,\ \frac{1}{x-1} = \varphi(x-1) + \varphi(x) \geq 2\varphi(x) \geq \frac{1}{x}$.

φ décroissante Q2 b)

$\forall x \in]1,+\infty[,\ \frac{x}{x-1} \geq 2x\varphi(x) \geq 1$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1$.

Alors $\lim_{x \to +\infty} (2x\varphi(x)) = 1$. $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

PARTIE II

Q0 Posons $L = \lim_{x\to+\infty} \ell(x)$. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [b,+\infty[, x > A \Rightarrow |\ell(x) - L| < \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = 1$. $\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [b,+\infty[, x > A \Rightarrow |\ell(x)| - |L| \leq |\ell(x) - L| < 1$.

Ainsi $\forall x \in [b,+\infty[\cap]A,+\infty[$, $|\ell(x)| < |L| + 1$.

Soit c un réel tel que $c > b$ et $c > A$. $\forall x \in [c,+\infty[, |\ell(x)| < |L|+1$.

Alors ℓ est bornée sur $[c,+\infty[$. De plus ℓ est continue sur le segment $[b,c]$ donc ℓ est également bornée sur $[b,c]$.

ℓ étant bornée sur $[b,c]$ et $[c,+\infty[$, ℓ est bornée sur $[b,+\infty[$.

Q1 a) $y \in \mathbb{R}_+^*$. $r \in \mathbb{R}$. $t \mapsto t^r e^{-yt}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.

De plus $\lim_{t\to+\infty} (t^2 t^r e^{-yt}) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{y^{r+2}} (ty)^{r+2} e^{-(yt)} \right) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{y^{r+2}} \frac{(ty)^{r+2}}{e^{+(yt)}} \right) \underset{\text{croissance comparée}}{=} 0$

Ainsi $\exists A' \in [1,+\infty[, \forall t \in [A',+\infty[, 0 \leq t^{r+2} e^{-yt} \leq 1$. $\forall t \in [A',+\infty[, 0 \leq t^r e^{-yt} \leq \frac{1}{t^2}$

La convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_1^{+\infty} t^r e^{-yt} dt$.

Si $y \in \mathbb{R}_+^*$, si $r \in \mathbb{R}$, $\int_1^{+\infty} t^r e^{-yt} dt$ converge.

b) En posant $r = -1$ et $y = x$ (resp. $y = 1$) et en appliquant ce qui précède on déduit la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$ (resp. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$).

Ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$ convergent donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ également.

Finalement $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ convergent.

c) $\frac{e^{-xt} - 1}{t} \underset{0}{\sim} \frac{-xt}{t} = -x$; $\lim_{t\to 0} \frac{e^{-xt} - 1}{t} = -x$. Ainsi $t \mapsto \frac{e^{-xt} - 1}{t}$ est

continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 ; $\int_0^1 \frac{e^{-xt} - 1}{t} dt$ converge.

En faisant $x = 1$ on peut alors dire que $\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$ converge.

$t \mapsto \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$ est continue sur $]0,1]$.

$\forall t \in]0,1]$, $\frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t} = \frac{e^{-t}-1}{t} - \frac{e^{-xt}-1}{t}$. Comme $\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$ et $\int_0^1 \frac{e^{-xt}-1}{t}\,dt$

convergent alors $\int_0^1 \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,dt$ converge.

Soit $a \in]0,1]$. $\int_a^{ax} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt = \int_a^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt - \int_{ax}^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$.

$\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$ converge donc $\lim\limits_{a \mapsto 0^+}\left(\int_a^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt - \int_{ax}^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt\right) = \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt - \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{a \mapsto 0^+} \int_a^{ax} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt = 0$.

d) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. D'après b) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,dt$ convergent donc $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ et $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,dt$ également car $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t}$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

Soit $\hat{A} \in [a,+\infty[$. $\int_a^{\hat{A}} \frac{e^{-xt}}{t}\,dt \underset{u=xt}{\overset{=}{A}} \int_{ax}^{\hat{A}x} \frac{e^{-u}}{u/x}\,\frac{1}{x}\,du = \int_{ax}^{\hat{A}x} \frac{e^{-u}}{u}\,du$.

En faisant tendre $\hat{A}$ vers $+\infty$ il vient $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,dt = \int_{ax}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$.

Ainsi $\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,dt = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{ax}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,dt = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{ax}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{ax}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \int_a^{ax} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,dt = \int_a^{ax} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \int_a^{ax} \frac{1}{t}\,dt = \int_a^{ax} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + [\ln|t|]_a^{ax}.$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,dt = \int_a^{ax} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \ln|ax| - \ln|a| = \int_a^{ax} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \ln x \ !$$

Comme $\lim\limits_{a\to 0^+} \int_a^{ax} \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt = 0$: $\lim\limits_{a\to 0^+} \int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,dt = \ln x$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,dt = \ln x$.

(Q2) a) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge d'après Q1.

→ $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$

→ $\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-xt}$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} (1-e^{-t}) = 1$.

→ $\int_1^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ converge (Q1 a) avec T=0 et y=x).

Les règles de comparaison des intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\,dt$ converge.

Alors $\int_1^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \right) dt$ converge.

b) $e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$.

$e^{-2t} = 1 - 2t + 2t^2 + o(t^2)$.

Alors $e^{-t}(1-e^{-t}) = e^{-t} - e^{-2t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} - 1 + 2t - 2t^2 + o(t^2) = t - \frac{3}{2}t^2 + o(t^2)$.

$e^{-xt} = 1 - xt + o(t)$; $te^{-xt} = t - xt^2 + o(t^2)$.

Alors $e^{-t}(1-e^{-t}) - te^{-xt} = (x - \frac{3}{2})t^2 + o(t^2)$.

Ainsi $\frac{e^{-t}(1-e^{-t}) - te^{-xt}}{t^2} = x - \frac{3}{2} + o(1)$; $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{-t}(1-e^{-t}) - te^{-xt}}{t^2} = x - \frac{3}{2}$.

$$\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} = \frac{e^{-t}(1-e^{-t}) - e^{-xt}}{t(1-e^{-t})} \underset{0}{\sim} \frac{e^{-t}(1-e^{-t}) - e^{-xt}}{t \times t} = \frac{e^{-t}(1-e^{-t}) - e^{-xt}}{t^2}.$$

Alors $\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{e^{-t}(1-e^{-t})-e^{-xt}}{t}= x-\frac{1}{2}$.

Finalement $t\mapsto \frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0.

Par conséquent : $\underline{\underline{\int_0^1\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)dt \text{ converge}}}$.

Q3 D'après ce qui précède, pour tout x dans $\mathbb{R}^*_+$, $\int_0^1\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)dt$ et $\int_1^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)dt$ convergent ; pour tout x dans $\mathbb{R}^*_+$, $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)dt$ converge.

φ est définie sur $\mathbb{R}^*_+$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $\varphi(x+1)-\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-(x+1)t}}{1-e^{-t}}-\frac{e^{-t}}{t}+\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}(1-e^{-t})}{1-e^{-t}}dt$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $\varphi(x+1)-\varphi(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^A=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{e^{-xA}}{x}\right)=\frac{1}{x}$.

$\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R}^*_+,\ \varphi(x+1)-\varphi(x)=\frac{1}{x}}}$. $\underline{\underline{\varphi \text{ est solution de l'équation } (E_2)}}$.

Q4 a) $r\in\mathbb{N}$ et $y\in\mathbb{R}^*_+$. $t\mapsto t^r e^{-yt}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Soit $\tilde{A}\in\mathbb{R}^*_+$. $\int_0^{\tilde{A}} t^r e^{-yt}\,dt \underset{u=yt}{=} \int_0^{y\tilde{A}}\left(\frac{u}{y}\right)^r e^{-u}\frac{1}{y}\,du=\frac{1}{y^{r+1}}\int_0^{y\tilde{A}}e^{-u}u^r\,du$

$\lim_{\tilde{A}\to+\infty}\int_0^{y\tilde{A}}e^{-u}u^r\,du=\int_0^{+\infty}e^{-u}u^r\,du=\Gamma(r+1)=r!$

Ainsi $\lim_{\tilde{A}\to+\infty}\int_0^{\tilde{A}}t^r e^{-yt}\,dt=\frac{r!}{y^{r+1}}$.

$\underline{\underline{\int_0^{+\infty}t^r e^{-yt}\,dt \text{ existe et vaut } \frac{r!}{y^{r+1}}}}$.

. $t \mapsto t^r e^{-yt} g(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

. $\forall t \in [0,+\infty[, 0 \leq |t^r e^{-yt} g(t)| \leq M \; t^r e^{-yt}$.

. $\int_0^{+\infty} t^r e^{-yt} dt$ converge.

Cela suffit pour dire que $\int_0^{+\infty} |t^r e^{-yt} g(t)| dt$ converge.

Ainsi $\int_0^{+\infty} t^r e^{-yt} g(t) dt$ est absolument convergente.

b) $(x,h) \in \mathbb{R}^2$ et $0 < |h| < x$.

En faisant $r=1$ et $y=x$ dans ce qui précède on obtient la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} t e^{-xt} g(t) dt$. Ainsi $\int_0^{+\infty} t e^{-xt} g(t) dt$ converge.

$0 < |h| < x$ donc $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $-x < h < x$; $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x+h \in \mathbb{R}_+^*$. Ceci autorise à parler de $\Theta(x)$ et $\Theta(x+h)$.

Posons $\Delta(h) = \dfrac{\Theta(x+h)-\Theta(x)}{h} + \int_0^{+\infty} t e^{-xt} g(t) dt$.

$$h\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-(x+h)t} g(t) - e^{-xt} g(t) + th\, e^{-xt} g(t) \right) dt = \int_0^{+\infty} (e^{-ht} - 1 + ht)\, e^{-xt} g(t)\, dt.$$

$\forall t \in [0,+\infty[$, $|e^{-ht} - 1 + ht| \leq \dfrac{(ht)^2}{2} e^{|ht|}$ car $\forall u \in \mathbb{R}$, $|e^u - 1 - u| \leq \dfrac{u^2}{2} e^{|u|}$.

$\forall t \in [0,+\infty[$, $|(e^{-ht} - 1 + ht) e^{-xt} g(t)| \leq \dfrac{(ht)^2}{2} e^{|ht|} e^{-xt} M = \dfrac{M h^2}{2} t^2 e^{-t(x-|h|)}$.

En faisant $r=2$ et $y = x-|h|$ dans a) on obtient que $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t(x-|h|)} dt$ existe et vaut $\dfrac{2!}{(x-|h|)^3}$. Alors les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} |(e^{-ht} - 1 + ht) e^{-xt} g(t)| dt$ converge ; de plus elle est majorée par $\dfrac{M h^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t(x-|h|)} dt$ et donc par $\dfrac{M h^2}{2} \dfrac{2}{(x-|h|)^3} = \dfrac{M h^2}{(x-|h|)^3}$.

Alors $\int_0^{+\infty}(e^{-ht}-1+ht)\,e^{-xt}g(t)\,dt$ est absolument convergente et nous pouvons écrire :

$$\left|\int_0^{+\infty}(e^{-ht}-1+ht)e^{-xt}g(t)\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty}|(e^{-ht}-1+ht)\,e^{-xt}g(t)|\,dt \leq \frac{\Pi h^2}{(x-|h|)^3}.$$

Ainsi $|h\,\Delta(h)| \leq \dfrac{\Pi|h|^2}{(|x|-h)^3}$; $|\Delta(h)| \leq \dfrac{\Pi|h|}{(|x|-h)^3}$.

$$\forall x\in\mathbb{R}, \forall h\in\mathbb{R},\quad 0<|h|<x \Rightarrow \left|\frac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h} + \int_0^{+\infty} t\,e^{-xt}g(t)\,dt\right| \leq \frac{\Pi|h|}{(|x|-h)^3}.$$

Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $\forall h\in\mathbb{R}$, $0<|h|<x \Rightarrow \left|\dfrac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h}+\displaystyle\int_0^{+\infty}t\,e^{-xt}g(t)\,dt\right| \leq \dfrac{\Pi|h|}{(|x|-h)^3}$ et

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Pi|h|}{(|x|-h)^3}=0$. Alors $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h}+\displaystyle\int_0^{+\infty}t\,e^{-xt}g(t)\,dt\right)=0$.

Ainsi $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h} = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-xt}g(t)\,dt$; θ est dérivable en x et

$\theta'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-xt}g(t)\,dt$.

Finalement : θ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\theta'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-xt}g(t)\,dt$.

c) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. $\psi(x)-\ln x = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)dt - \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\right)dt$

$$\psi(x)-\ln x = \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}-\frac{e^{-t}}{t}+\frac{e^{-xt}}{t}\right)dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)e^{-xt}\,dt$$

$$\psi(x)-\ln x = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\frac{1-e^{-t}-t}{t(1-e^{-t})}\,dt \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}_+^*.$$

$e^{-t} = 1-t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)$; $1-e^{-t}-t = -\frac{t^2}{2}+o(t^2)$; $1-e^{-t}-t \underset{0}{\sim} -\frac{t^2}{2}$.

$$\frac{1-e^{-t}-t}{t(1-e^{-t})} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-t^2/2}{t\times t} = -\frac{1}{2}\ ;\quad \lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-t}-t}{t(1-e^{-t})} = -\frac{1}{2}.$$

Observons que $t \to \dfrac{1-e^{-t}-t}{t(1-e^{-t})}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Posons alors $\forall t \in [0,+\infty[$, $g(t)=\begin{cases} -1/2 & \text{si } t=0 \\ \dfrac{1-e^{-t}-t}{t(1-e^{-t})} & \text{si } t>0 \end{cases}$

g est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $\psi(x)-\ln x=\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)\,dt$.

Pour appliquer b) il ne reste plus qu'à montrer que g est bornée sur $[0,+\infty[$.

$\forall t\in\mathbb{R}^*_+$, $g(t)=\dfrac{1}{1-e^{-t}}\left[\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{te^{t}}-1\right]$; $\lim\limits_{t\mapsto+\infty} g(t)=\dfrac{1}{1}[0-0-1]=-1$.

Alors g est continue sur $[0,+\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$; d'après Q0 g est bornée sur $[0,+\infty[$.

g est continue et bornée sur $[0,+\infty[$ donc $x\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-xt}g(t)\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et sa dérivée est $x\mapsto-\int_0^{+\infty}te^{-xt}g(t)\,dt$.

Ainsi $\underline{\underline{\psi-\ln \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*_+ \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}^*_+,\ (\psi-\ln)'(x)=-\int_0^{+\infty}e^{-xt}\dfrac{1-e^{-t}-t}{1-e^{-t}}\,dt}}$

Comme $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$, $\psi=(\psi-\ln)+\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et :

$\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $\psi'(x)=(\psi-\ln)'(x)+\ln' x=-\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-xt}(1-e^{-t}-t)}{1-e^{-t}}+\dfrac{1}{x}$.

Or $\dfrac{1}{x}=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,dt$ d'après Q4 a) ($r=0, y=x$), et ceci pour tout x dans $\mathbb{R}^*_+$.

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $\psi'(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\left[1-\dfrac{1-e^{-t}-t}{1-e^{-t}}\right]dt=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\dfrac{t}{1-e^{-t}}\,dt$

$\underline{\underline{\psi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*_+ \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}^*_+,\ \psi'(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{te^{-xt}}{1-e^{-t}}\,dt.}}$

g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

d) $\forall x\in\mathbb{R}^*_+$, $|\psi(x)-\ln x|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-xt}g(t)\,dt\right|\leq\int_0^{+\infty}e^{-xt}|g(t)|\,dt\leq\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+}|g(t)|\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,dt=\dfrac{\sup_{t\in\mathbb{R}^+}|g(t)|}{x}$

car toutes les intégrales écrites sont convergentes. On obtient alors sans difficulté et par encadrement $\underline{\underline{\lim\limits_{x\mapsto+\infty}(\psi(x)-\ln x)=0}}$.

Q5 a) Rappelons que : $\forall r \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}^*_+, \int_0^{+\infty} t^r e^{-yt} dt = \frac{r!}{y^{r+1}}$.

Alors $\forall \ell \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} t e^{-(x+\ell)t} dt = \frac{1}{(x+\ell)^2}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\psi'(x) - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{(x+\ell)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-xt}}{1-e^{-t}} dt - \sum_{\ell=0}^{n} \int_0^{+\infty} t e^{-(x+\ell)t} dt$

$$\psi'(x) - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{(x+\ell)^2} = \int_0^{+\infty} t e^{-xt} \left[\frac{1}{1-e^{-t}} - \sum_{\ell=0}^{n} e^{-\ell t} \right] dt.$$

$$\psi'(x) - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{(x+\ell)^2} = \int_0^{+\infty} t e^{-xt} \left[\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1-(e^{-t})^{n+1}}{1-e^{-t}} \right] dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1-e^{-t}} e^{-(x+n+1)t} dt$$

$$\psi'(x) - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{(x+\ell)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t e^t}{(1-e^{-t})e^t} e^{-(x+n+1)t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} e^{-(x+n)t} dt.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \psi'(x) - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{(x+\ell)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} e^{-(x+n)t} dt.$$

$\forall t \in \mathbb{R}^*_+, \quad e^t - 1 \geq t > 0; \quad \forall t \in \mathbb{R}^*_+, \quad 0 < \frac{t}{e^t-1} \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^*_+, \quad 0 < \frac{t}{e^t-1} e^{-(x+n)t} \leq e^{-(x+n)t}$

Rappelons que $\int_0^{+\infty} e^{-(x+n)t} dt = \frac{1}{x+n}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} e^{-(x+n)t} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-(x+n)t} dt = \frac{1}{x+n}$.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{x+n} = 0$ donc par encadrement on obtient : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} e^{-(x+n)t} dt = 0$

Alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\psi'(x) - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{(x+\ell)^2} \right) = 0$

Finalement : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} = \varphi'(x)$.

La série de terme général $\frac{1}{(x+k)^2}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = \varphi'(x)$.

Q6 a) Soit $x \in \mathbb{R}^*_+$. ▲ $\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} = \frac{x}{n(x+n)} \sim \frac{x}{n^2}$

▲ La série de terme général $\frac{x}{n^2}$ converge.

▲ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{x}{n^2} > 0$

Ceci suffit pour obtenir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}$.

Pour tout x dans $\mathbb{R}^*_+$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n} \right)$ existe.

b) $(x,h) \in \mathbb{R}^2$ et $0 < |h| < x/2$. Alors $x+h \in \mathbb{R}^*_+$ $\left(-\frac{x}{2} < h < \frac{x}{2} ;\ \frac{x}{2} < x+h < \frac{3x}{2} \right)$.

Posons $\hat{\Delta}(h) = \frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$.

$$h\,\hat{\Delta}(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{x+h+n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{x+n} - \frac{h}{(x+n)^2} \right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+n)(x+h+n) - (x+n)^2 - (x+h+n)h}{(x+n)^2(x+h+n)}$$

$$h\,\hat{\Delta}(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+n)^2 + (x+n)h - (x+n)^2 - (x+n)h - h^2}{(x+n)^2(x+h+n)} = -h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2(x+h+n)}.$$

$$|h\,\hat{\Delta}(h)| = |h|^2 \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2(x+h+n)} \right| = |h|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2(x+h+n)}$$

$$|\hat{\Delta}(h)| = |h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2(x+h+n)}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x+h+n > x - \frac{x}{2} + n = \frac{x}{2} + n > n > 0$ et $(x+n)^2 > n^2 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (x+n)^2(x+h+n) \geqslant n^3 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(x+n)^2(x+h+n)} \leqslant \frac{1}{n^3}$.

comme la série de terme général $\frac{1}{n^3}$ est convergente il vient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2(x+h+n)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Alors $|\hat{D}(h)| \leq |h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$

Ainsi $\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2,\ 0<|h|<\frac{x}{2} \Rightarrow \left| \frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \right| \leq |h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

$\lim_{h\to 0} \left(|h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \right) = 0$. Ce qui précède et le théorème d'encadrement donnent

$\lim_{h\to 0} \left[\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \right] = 0$. Alors $\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$

Pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, S est dérivable en x et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$

c) S, φ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\tau : x \mapsto S(x) - \varphi(x) - \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \tau'(x) = S'(x) - \varphi'(x) + \frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} + \frac{1}{x^2} = 0.$

$x \mapsto S(x) - \varphi(x) - \frac{1}{x}$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q7 $x \in \mathbb{R}_+^*$

a) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (\varphi(x+\ell+1) - \varphi(x+\ell)) = \varphi(x+n) - \varphi(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(x) = \varphi(x+n) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{x+\ell}.$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(x) = \varphi(x+n) - \ln(x+n) + \ln(x+n) - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{x+\ell}.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(x+n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k} = \psi(x) - (\psi(x+n) - \ln(x+n))$.

D'après Q4 d) $\lim_{n\to+\infty} (\psi(x+n) - \ln(x+n)) = 0$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \left(\ln(x+n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k}\right) = \psi(x)$.

Alors $\psi(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln(1+n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k}\right)$. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

donc $\psi(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right)$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \psi(1)$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) = \gamma$ avec $\gamma = -\psi(1)$.

c) $x \mapsto S(x) - \psi(x) - \frac{1}{x}$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $S(x) - \psi(x) - \frac{1}{x} = S(1) - \psi(1) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \gamma - 1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{p\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{p\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) = 1$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $S(x) - \psi(x) - \frac{1}{x} = 1 + \gamma - 1 = \gamma$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(x) = S(x) - \frac{1}{x} - \gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) - \frac{1}{x} - \gamma$.

PARTIE III

(Q1) • Soit f un élément de F. $T(f)$ est la primitive de f sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 0 donc $T(f)$ est dérivable sur $[0,1]$.
Ceci suffit pour dire que $T(f)$ est un élément de F.

• Soit $(f,g) \in F^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\forall x \in [0,1]$, $T(\lambda f+g)(x) = \int_0^x (\lambda f+g)(t)\,dt = \lambda \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x g(t)\,dt = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$.
$\forall x \in [0,1]$, $T(\lambda f+g)(x) = (\lambda T(f)+T(g))(x)$.
$T(\lambda f+g) = \lambda T(f)+T(g)$.

T est une application linéaire de F dans F. T est un endomorphisme de F.

• Soit $f \in \operatorname{Ker} T$. $\forall x \in [0,1]$, $T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 0$.
En dérivant il vient $\forall x \in [0,1]$, $T(f)'(x) = f(x) = 0$. $f = 0_F$.
$\operatorname{Ker} T = \{0_F\}$

<u>T est un endomorphisme injectif de F.</u>

(Q2) $\operatorname{Ker} T = \{0_F\}$; 0 n'est pas valeur propre de T. Ainsi $\lambda \neq 0$.
Alors $T(f) = \lambda f$ donc : $f = \frac{1}{\lambda} T(f)$. Comme $T(f)$ est dérivable sur $[0,1]$ il en est de même de f.
En dérivant il vient $(T(f))' = \lambda f'$ c'est à dire $f = \lambda f'$ ou $f - \lambda f' = 0_F$.
<u>λ n'est pas nul, f est dérivable sur $[0,1]$ et $f - \lambda f'$ est nulle.</u>

Posons $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = e^{-x/\lambda} f(x)$. g est dérivable sur $[0,1]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[0,1]$.
$\forall x \in [0,1]$, $g'(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} f(x) + e^{-x/\lambda} f'(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} (f(x) - \lambda f'(x)) = 0$.

g' est nulle sur l'intervalle $[0,1]$ donc g est constante sur $[0,1]$.
$\exists \mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = e^{-x/\lambda} f(x) = \mu$. $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \mu e^{x/\lambda}$.
$f = \frac{1}{\lambda} T(f)$ donc $f(0) = \frac{1}{\lambda} T(f)(0) = \frac{1}{\lambda} \times 0 = 0$. Alors $0 = f(0) = \mu$. $\mu = 0$. $f = 0_F$!!

$f = 0_F$ contredit le fait que f soit un vecteur propre de T associé à 1.

Ainsi T n'a pas de valeur propre.

(Q3) Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$\forall f \in F$, $\forall x \in [0,1], T^n(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$.

→ C'est clair pour $n=1$ par définition de T.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

$T^{n+1}(f) = T^n(T(f))$ et $T(f) \in F$. L'hypothèse de récurrence donne alors $\forall x \in [0,1]$, $T^{n+1}(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} T(f)(t)\,dt$. Une intégration par partie simple donne alors : $\forall x \in [0,1], T^{n+1}(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \underbrace{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{u'} \underbrace{T(f)(t)}_{v}\,dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} T(f)(t)\right]_0^x - \int_0^x \left(-\frac{(x-t)^n}{n!}\right) T(f)'(t)\,dt$

Alors $\forall x \in [0,1]$, $T^{n+1}(f)(x) \overset{T(f)(0)=0 \text{ et } T(f)'=f}{=} \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt$; ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall f \in F, \forall x \in [0,1], \quad T^n(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$.

(Q4) a) $x \in [0,1]$. $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln|t+1|]_0^x = \ln(x+1)$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^x (-t)^{p-1} = (-1)^{p-1}\int_0^x t^{p-1}\,dt = (-1)^{p-1}\left[\frac{t^p}{p}\right]_0^x = \frac{(-1)^{p-1}x^p}{p}$.

$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(x+1)$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^x (-t)^{p-1} = (-1)^{p-1}\frac{x^p}{p}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $f(x) - \displaystyle\sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1}\frac{x^p}{p} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt - \sum_{p=1}^{k}\int_0^x (-t)^{p-1}\,dt$

$f(x) - \displaystyle\sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1}\frac{x^p}{p} = \int_0^1 \left[\frac{1}{1+t} - \sum_{p=1}^{k}(-t)^{p-1}\right]dt = \int_0^1 \left[\frac{1}{1+t} - \frac{1-(-t)^k}{1-(-t)}\right]dt$

$$f(x) - \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} = \int_0^x \frac{1 - 1 + (-t)^k}{1+t}\, dt = \int_0^x \frac{(-t)^k}{1+t}\, dt$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^x \frac{(-t)^k}{1+t}\, dt = f(x) - \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} .$$

b) Notons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $[0,1]$ donc f' appartient à F.

$T(f')$ est la primitive de f' sur $[0,1]$ qui prend la valeur 0 en 0.

$f(0)=0$ donc f est également la primitive de f' sur $[0,1]$ qui s'annule en 0.

Alors $T(f') = f$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1}(f') = T_n(T(f')) = T_n(f)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(f) = T_{n+1}(f')$.

- Si $n=0$ $T_0(f) = f = 1 \times f + 0$. En posant $P_0 = 1$ et $\varphi_0 = 0$ on obtient $T_0(f) = P_0 f + \varphi_0$ avec $P_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ et $\varphi_0 \in \mathbb{R}_0[X]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$T_n(f)(x) = T_{n+1}(f')(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f'(t)\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} C_n^k (x)^{n-k} (-t)^k \frac{1}{1+t}\, dt$$

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} \int_0^x \frac{(-t)^k}{1+t}\, dt = \frac{1}{n!} C_n^0 x^n \int_0^x \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} \left(f(x) - \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} \right)$$

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n!} C_n^0 x^n \ln(x+1) + \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} f(x) - \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p}$$

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} f(x) - \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p} .$$

$$T_n(f)(x) = \frac{1}{n!} (x+1)^n f(x) + \frac{(-1)}{n!} \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p}$$

pour $P_n = \frac{1}{n!}(X+1)^n$ et $Q_n = \frac{(-1)}{n!}\sum_{k=1}^{n} C_n^k X^{n-k} \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1}\frac{1}{p} X^p$.

$\forall x \in [0,1]$, $T_n(f)(x) = P_n(x) f(x) + Q_n(x)$ avec $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q_n \in \mathbb{R}[X]$.

mieux $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $X^{n-k}\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p-1}\frac{1}{p} X^p \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $T_n(f) = P_n f + Q_n$ avec $(P_n, Q_n) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Finalement $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (P_n, Q_n) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ T_n(f) = P_n f + Q_n}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$T_n(f)(1) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k}\int_0^1 \frac{(-t)^k}{1+t}\,dt$$ (page précédente b) deuxième ligne du développement de $T_n(f)(x)$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$).

$$T_n(f)(1) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \varphi(k+1).$$

Pour $n=0$: $T_n(f)(1) = T_0(f)(1) = \ln 2 = \varphi(1) = \frac{1}{0!}\sum_{k=0}^{0} C_0^k (-1)^k \varphi(k+1)$.

$$T_n(f)(1) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \varphi(k+1).$$

Ainsi $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(f)(1) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \varphi(k+1)\, C_n^k}$.

Q5 a) $f \in F$. $|f|$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc $|f|$ possède un maximum sur $[0,1]$.

pour $M = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Soit $x \in [0,1]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|T_n(f)(x)| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt\right| \underset{x\geq 0 \text{ et } x-t\geq 0}{\leq} \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M\,dt = M\left(-\frac{(x-t)^n}{n!}\right) = M\frac{x^n}{n!}.$$

$$\underline{0 \leq |T_n(f)(x)| \leq M\frac{x^n}{n!} \leq M \times \frac{1}{n!}}.$$

La convergence de la série de terme général $n \mapsto \frac{1}{n!}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|T_n(f)(x)|$ converge.
La série de terme général $T_n(f)(x)$ est absolument convergente donc convergente.
Pour tout $x \in [0,1]$, la série de terme général, $T_n(f)(x)$ converge.

b) Soit $x \in [0,1]$.

$$T(f)(x) = \int_0^x t^3\,dt = \frac{x^4}{4} \; ; \; T^2(f)(x) = T(T(f))(x) = \int_0^x \frac{t^4}{4}\,dt = \frac{x^5}{4 \times 5} \cdots$$

Montrons alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], T^n(f)(x) = \frac{6\,x^{n+3}}{(n+3)!}$

→ C'est clair pour $n=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$\forall x \in [0,1], \quad T^{n+1}(f)(x) = T(T^n(f))(x) = \int_0^x T^n(f)(t)\,dt \underset{HR}{=} \int_0^x \frac{6\,t^{n+3}}{(n+3)!} = 6\,\frac{x^{n+4}}{(n+4)!}.$$

Ainsi s'achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad T_n(f)(x) = 6\,\frac{x^{n+3}}{(n+3)!}.$$

$$\forall x \in [0,1], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} T^n(f)(x) = 6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+3)!} = 6 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 6\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right).$$

$$\forall x \in [0,1], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} T^n(f)(x) = 6\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right).$$