$\boxed{\textbf{D.S. 14}}$ Sujet 4

Jeudi 31 mars 2011

PROBLÈME 1

1. n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $E = \mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $< .,. >$ de $\mathbb{R}^n$.

2. Dans toute la suite on confond un élément $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de E avec sa matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de E. Ceci est l'occasion pour faire encore plus attention à ce que l'on écrit.
Néanmoins si X et Y sont deux éléments de E on s'autorise à écrire : $< X, Y >= {}^tXY$ et $\|X\| = \sqrt{{}^tXX}$.

3. A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont <u>strictement positives</u> et B un élément de E.

4. Pour tout X élément de E on pose $\boxed{\Phi(X) = {}^tXAX}$ et $\boxed{F(X) = \Phi(X) - 2 < B, X >}$ (toujours avec la convention de 2).

5. Deux éléments X et Y de E sont dit conjugués par rapport à Φ si $< AX, Y >= 0$ (ou si $< AY, X >= 0$ ...).

PARTIE I

$\boxed{\textbf{Q1}}$ a) Montrer que A est inversible. On notera R l'unique élément de E tel que $AR = B$.

b) Montrer que si X est un élément non nul de E, $\Phi(X) > 0$ (on pourra travailler avec une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de A).

c) Trouver deux réels strictement positifs λ et μ tels que pour tout élément X de E on ait :

$$\lambda\|X\|^2 \leqslant \Phi(X) =< AX, X >\leqslant \mu\|X\|^2.$$

c) X est un élément non nul de E. Montrer que l'ensemble des vecteurs de E, conjugués de X par rapport à Φ est un sous-espace vectoriel de E dont on précisera la dimension.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Soit X un élément de E. Montrer que le gradient de F en X existe et vaut $G(X) = 2(AX - B)$.
Que dire de $G(R)$?

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Montrer que si X et H sont deux éléments de E

$$F(X + H) = F(X)+ < G(X), H > +\Phi(H).$$

En déduire que F présente un minimum strict en $X = R$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ a) X est un élément de E distinct de R. Trouver ρ pour que $F(X - \rho\, G(X))$ soit minimum et calculer ce minimum.
b) ρ étant ainsi déterminé, montrer que si $Y = X - \rho G(X)$ alors $< G(X), G(Y) >= 0$

(remarquer que $< G(X), G(Y) >=< G(X), 2A(Y - X) + G(X) >$).

$\boxed{\textbf{Q5}}$ On considère la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$ d'éléments de E définie de la manière suivante.

$X_0 \in E$. Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $X_{k+1} = R$ si $X_k = R$ et dans le cas contraire :

$$X_{k+1} = X_k - \rho_k G(X_k) \quad \text{avec} \quad \rho_k = \frac{\|G(X_k)\|^2}{2\Phi(G(X_k))}.$$

a) Montrer que les suites $(F(X_k))_{k\geqslant 0}$ et $(F(X_{k+1}) - F(X_k))_{k\geqslant 0}$ convergent.

b) Montrer que la suite $(G(X_k))_{k\geqslant 0}$ converge vers le vecteur nul. En déduire la limite de la suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$.

Q6 Facultatif : Programmer l'algorithme précédent.

PARTIE II

On construit trois suites (finies ou non) de vecteurs, (X_k), (R_k) et (D_k), par les formules de récurrence suivantes :

$$X_0 \text{ est donné et } R_0 = D_0 = AX_0 - B.$$

Tant que les expressions ont un sens, on définit :

$$\alpha_k = \frac{< R_k, D_k >}{< AD_k, D_k >};\ X_{k+1} = X_k - \alpha_k D_k;\ R_{k+1} = AX_{k+1} - B;\ \beta_k = \frac{< R_{k+1}, R_{k+1} >}{< R_k, R_k >};\ D_{k+1} = R_{k+1} + \beta_k D_k.$$

Q1 Examiner le cas où $R_0 = 0$.

Q2 On suppose R_0 non nul. Montrer que X_1, R_1 et D_1 existent. Montrer que $< R_0, R_1 >= 0$ et $< AD_1, D_0 >= 0$.

Q3 On suppose que les vecteurs R_0, R_1, ..., R_k sont non nuls et deux à deux orthogonaux.

a) Montrer que nécessairement D_0, D_1, ..., D_k existent. Montrer encore que :

$$\forall i \in [\![0, k]\!],\ \text{Vect}(D_0, D_1, \ldots, D_i) = \text{Vect}(R_0, R_1, \ldots, R_i).$$

En déduire que la famille $(D_0, D_1, \ldots, D_k)$ est libre.

b) Montrer que si i et j sont deux éléments de $[\![0, k]\!]$ tels que $j > i$ alors $< D_i, R_j >= 0$.

c) Montrer par récurrence que pour tout élément j de $[\![1, k]\!]$:

$$\forall i \in [\![0, j-1]\!],\ < AD_i, D_j >= 0$$

(pour $j + 1$ faire deux cas : $i < j$ et $i = j$).

Montrer que si i et j sont deux éléments de $[\![0, k]\!]$ tels que $i \neq j$ alors $< AD_i, D_j >= 0$.

d) Montrer que R_{k+1} existe et que pour tout i dans $[\![0, k]\!]$: $< R_i, R_{k+1} >= 0$.

Q4 $I = \{i \in \mathbb{N} \mid\ R_0,\ R_1,\ ...,\ R_i$ sont non nuls et deux à deux orthogonaux$\}$.

a) Examiner le cas où I est vide.

b) On suppose que I n'est pas vide. Montrer que I est majorée par $n - 1$ et possède un plus grand élément k. Que dire de R_{k+1} et de X_{k+1} ?

c) Dégager une conclusion.

Q5 Programmer l'algorithme précédent.
