PRELIMINAIRE

Q1.. u est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $u'(x)=1+\tan^2x>0$.

u est donc continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. u définit alors une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur l'intervalle $u(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$.

Or $\lim\limits_{x\mapsto-\frac{\pi}{2}^+}u(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto\frac{\pi}{2}^-}u(x)=+\infty$ donc $u(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)=\mathbb{R}$.

Cl.. u est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Nous notons Arctan la bijection réciproque.

Q2. • Rappel.. Soit f une fonction continue et strictement monotone d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
f définit une bijection de I sur l'intervalle $J=f(I)$.

1°. Si f est dérivable en un point a de I et si $f'(a)\neq0$: f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $(f^{-1})'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}$

2°. Si f est dérivable sur I et si $\forall x\in I$, $f'(x)\neq0$: f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$ •

u est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $u'(x)=1+\tan^2x\neq0$.

Arctan est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\text{Arctan}'x=\frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}\,x)}=\frac{1}{1+(\tan(\text{Arctan}\,x))^2}=\frac{1}{1+x^2}$.

Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $\text{Arctan}'x=\frac{1}{1+x^2}$.

Q3.. $\forall a\in\mathbb{R}_+^*$ $\forall A\in\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^A\frac{dt}{a^2+t^2}\underset{t=au}{=}\int_0^{A/a}\frac{a}{a^2+a^2u^2}\,du=\frac{1}{a}\int_0^{A/a}\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{a}\left[\text{Arctan}\,u\right]_0^{A/a}=\frac{1}{a}\text{Arctan}\frac{A}{a}$.

$\lim\limits_{A\mapsto+\infty}\text{Arctan}\frac{A}{a}=\frac{\pi}{2}$ ($\lim\limits_{x\mapsto\pi/2^-}u(x)=+\infty$) ; par conséquent $\displaystyle\lim_{A\mapsto+\infty}\int_0^A\frac{dt}{a^2+t^2}=\frac{\pi}{2a}$.

Cl.. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{a^2+t^2}$ existe et vaut $\frac{\pi}{2a}$.

$t\mapsto\frac{1}{a^2+t^2}$ étant paire sur $\mathbb{R}$: $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{dt}{a^2+t^2}$ existe et vaut aussi $\frac{\pi}{2a}$.

Par conséquent $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{a^2+t^2}$ existe et vaut $\frac{\pi}{a}$. et ceci pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$

En particulier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\pi$.

PARTIE I

Q1 f_a est continue sur $\mathbb{R}$ et positive.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{a^2+t^2}$ existe et vaut $\frac{\pi}{a}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi(a^2+t^2)} dt$ existe et vaut 1.

Par conséquent : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)dt$ existe et vaut 1

Ceci achève de prouver que <u>f_a est une densité de probabilité.</u>

Q2 <u>Remarque</u>.- f_a est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction de répartition F_X de X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_a(t)dt = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{a^2+t^2} \underset{t=au}{=} \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{x/a} \frac{a\,du}{a^2(1+u^2)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x/a} \frac{du}{1+u^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \lim_{A\to-\infty}\left(\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan} u\right]_A^{x/a}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a} - \underbrace{\lim_{A\to-\infty}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan} A\right)}_{\frac{1}{\pi}(-\pi/2) = -\frac{1}{2}}$$

donc <u>$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}$.</u>

$x \mapsto x f_a(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc localement intégrable.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x f_a(x) \geq 0$ et $x f_a(x) \underset{+\infty}{\sim} x \times \frac{a}{\pi x^2} = \frac{a}{\pi} \times \frac{1}{x}$

De plus $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge. Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la divergence de $\int_1^{+\infty} x f_a(x)dx$ donc la divergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_a(x)dx$

<u>X n'a pas d'espérance.</u>

Q3 <u>$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.</u> $\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = P(T \leq x) = P(\lambda X \leq x) = P(X \leq \frac{x}{\lambda}) = F_X(\frac{x}{\lambda})$ ← fonction de répartition de T

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x/\lambda}{a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{x}{\lambda a} + \frac{1}{2}$$

On reconnaît alors la fonction de répartition d'une var qui suit une loi de Cauchy de paramètre λa.

cl.. si $X \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda X \hookrightarrow \mathcal{C}(\lambda a)$.

Q4 a) $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ et $C = [x^2+(b+1)^2][x^2+(b-1)^2]$. Notons S le membre de droite.

$$S \times [(t-x)^2+1][t^2+b^2] = x\left(2t(t-x)^2 + \underset{\bullet}{2t} - 2(t-x)(t^2+b^2)\right) + \underset{\bullet\bullet}{(x^2+b^2-1)}(t^2+b^2) + \underset{\bullet\bullet\bullet}{(x^2-b^2+1)}((t-x)^2+1)$$

$$S \times [(t-x)^2+1][t^2+b^2] = \underline{2tx[\cancel{t^2}+x^2-2tx+1-\cancel{t^2}-b^2]} + \underline{x \times 2x \times (t^2+b^2)} + \underline{t^2(x^2+b^2-1)} + \underline{b^2(x^2+b^2-1)}$$
$$+ \underline{(x^2-b^2+1)t^2} - \underline{(x^2-b^2+1)(2tx)} + \underline{(x^2-b^2+1)(x^2+1)}$$

Je regroupe les $2tx$ de $\bullet$ et $\bullet\bullet\bullet$ ▲
Je regroupe les t^2 de $\bullet\bullet$ et $\bullet\bullet\bullet$ ▲▲

$$S \times [(t-x)^2+1][t^2+b^2] = 2tx[\cancel{x^2}-2tx+\cancel{1}-\cancel{b^2}-\cancel{x^2}+\cancel{b^2}-\cancel{1}] + 2x^2t^2 + 2x^2b^2 + t^2(x^2+\cancel{b^2}-\cancel{1}+x^2-\cancel{b^2}+\cancel{1}) +$$
$$b^2(x^2+b^2-1) + (x^2-b^2+1)(x^2+1)$$

$$S \times [(t-x)^2+1][t^2+b^2] = -\cancel{4t^2x^2} + \cancel{2x^2t^2} + 2x^2b^2 + \cancel{2x^2t^2} + b^2(x^2+b^2-1) + (x^2-b^2+1)(x^2+1)$$

$$S \times [(t-x)^2+1][t^2+b^2] = 2x^2b^2 + \cancel{b^2x^2} + b^4 - b^2 + x^4 + x^2 - \cancel{b^2x^2} - b^2 + x^2 + 1$$
$$= x^4 + 2x^2b^2 + 2x^2 + b^4 - 2b^2 + 1$$
$$= x^4 + 2(b^2+1)x^2 + (b^2-1)^2 = (x^2+(b^2+1))^2 + \overbrace{(b^2-1)^2 - (b^2+1)^2}^{4b^2}$$
$$= (x^2+(b^2+1))^2 - 4b^2 = (x^2+b^2+1+2b)(x^2+b^2+1-2b)$$
$$= [x^2+(b+1)^2][x^2+(b-1)^2] = C$$

Finalement : $S = \dfrac{C}{[(t-x)^2+1][t^2+b^2]}$; c'est ce qu'il fallait prouver, aisé non ?

b) $X \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{C}(b)$ et X et Y sont indépendantes.

Par conséquent $X+Y$ est une var à densité admettant pour densité $\hat{h}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_b(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t) f_b(t)\,dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \hat{h}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+(x-t)^2)} \times \frac{b}{\pi(b^2+t^2)}\,dt = \frac{b}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[(t-x)^2+1][t^2+b^2]}.$$

Reprenons alors la formule précédente et intégrons entre B et A ($B \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}$). Il vient pour x dans $\mathbb{R}$:

$$\int_B^A \frac{c}{[(t-x)^2+1][t^2+b^2]}\,dt = x\int_B^A \frac{2t}{t^2+b^2}\,dt - x\int_B^A \frac{2(t-x)}{(t-x)^2+b^2}\,dt + (x^2+b^2-1)\int_B^A \frac{dt}{(t-x)^2+1} + (x^2-b^2+1)\int_B^A \frac{dt}{t^2+b^2}$$

$$= x\left[\ln(t^2+b^2)\right]_B^A - x\left[\ln[(t-x)^2+b^2]\right]_B^A + (x^2+b^2-1)\left[\mathrm{Arctan}\,(t-x)\right]_B^A + (x^2-b^2+1)\int_B^A \frac{dt}{t^2+b^2}$$

$$= x\left[\ln\left(\frac{t^2+b^2}{(t-x)^2+b^2}\right)\right]_B^A + (x^2+b^2-1)\left[\mathrm{Arctan}\,(A-x) - \mathrm{Arctan}\,(B-x)\right] + (x^2-b^2+1)\int_B^A \frac{dt}{t^2+b^2}$$

Notons alors que : $\rightarrow \lim\limits_{A\mapsto+\infty} \frac{A^2+b^2}{(A-x)^2+b^2} = 1$ donc $\lim\limits_{A\mapsto+\infty} \ln\left(\frac{A^2+b^2}{(A-x)^2+b^2}\right) = 0$

de même $\rightarrow \lim\limits_{B\to-\infty} \ln\left(\frac{B^2+b^2}{(B-x)^2+b^2}\right) = 0$

$\rightarrow \lim\limits_{A\mapsto+\infty} (\mathrm{Arctan}\,(A-x)) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{B\to-\infty} (\mathrm{Arctan}\,(B-x)) = -\frac{\pi}{2}$

$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+b^2}$ converge et vaut $\frac{\pi}{b}$.

dès lors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{[(t-x)^2+1][t^2+b^2]}\,dt$ existe et vaut :

$$x\times(0-0) + (x^2+b^2-1)\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + (x^2-b^2+1)\frac{\pi}{b} = \pi(x^2+b^2-1) + \frac{\pi}{b}(x^2-b^2+1).$$

$$= \frac{\pi}{b}\left[b(x^2+b^2-1) + (x^2-b^2+1)\right]$$

$$= \frac{\pi}{b}\left[(b+1)x^2 + (b^2-1)(b-1)\right]$$

$$= \frac{\pi}{b}(b+1)\left[x^2+(b-1)^2\right]$$

Par conséquent :

$$\hat{h}(x) = \frac{b}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[(t-x)^2+1][t^2+b^2]} = \frac{b}{\pi^2}\times\frac{1}{c}\times\frac{\pi}{b}(b+1)\left[x^2+(b-1)^2\right]$$

$$\hat{h}(x) = \frac{1}{\pi}\times\frac{1}{[x^2+(b+1)^2][x^2+(b-1)^2]}\times\left[x^2+(b-1)^2\right] = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{x^2+(b+1)^2} = f_{b+1}(x) = f_{1+b}(x)$$

ce qui achève de prouver que : $X+Y \hookrightarrow \mathcal{C}(1+b)$

c) $X \hookrightarrow \Gamma(a)$, $Y \hookrightarrow \Gamma(b)$ et X et Y sont indépendantes.

$X+Y = a\left(\frac{1}{a}X + \frac{1}{a}Y\right)$.

$X \hookrightarrow \Gamma(a)$ donc $\frac{1}{a}X \hookrightarrow \Gamma(1)$. $Y \hookrightarrow \Gamma(b)$ donc $\frac{1}{a}Y \hookrightarrow \Gamma\left(\frac{b}{a}\right)$. (Q3)

De plus $\frac{1}{a}X$ et $\frac{1}{a}Y$ sont indépendantes. Q4 b) donne alors $\frac{1}{a}X + \frac{1}{a}Y \hookrightarrow \Gamma\left(1+\frac{b}{a}\right)$

En utilisant de nouveau Q3 on obtient $X+Y = a\left(\frac{1}{a}X+\frac{1}{a}Y\right) \hookrightarrow \Gamma\Big(\underbrace{a\left(1+\frac{b}{a}\right)}_{a+b}\Big)$!

Finalement $\underline{\underline{X+Y \hookrightarrow \Gamma(a+b)}}$.

PARTIE II

Q1) Notons F_Z la fonction de répartition de Z. Rappelons que la fonction de répartition F_X de X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car f_a est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_Z(x) = P(\ln|X| \leq x) = P(|X| \leq e^x) = P(-e^x \leq X \leq e^x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x)$

$x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et F_X aussi ; par composition F_Z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z'(x) = e^x F_X'(e^x) - (-e^x)F_X'(-e^x) = e^x[f_a(e^x) + f_a(-e^x)] \underset{\substack{\uparrow \\ f_a \text{ est paire}}}{=} 2e^x f_a(e^x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z'(x) = 2e^x \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2+e^{2x}} = \frac{2a}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x}+a^2}$.

F_Z' est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc F_Z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. $\underline{\underline{Z \text{ est donc une var à densité}}}$; la fonction h_a définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_a(x) = \frac{2a}{\pi}\frac{e^x}{e^{2x}+a^2}$ en est une densité.

b) $x \mapsto x h_a(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc localement intégrable.

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x h_a(x) \geq 0$ et $x h_a(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2a}{\pi} x \frac{e^x}{e^{2x}} = \frac{2a}{\pi} x e^{-x}$. Comme $\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx$ converge (c'est $\Gamma(2)$), les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} x h_a(x)\,dx$ converge.

$|x|h_a(x) = |x| \dfrac{2a}{\pi} \dfrac{e^x}{e^{2x}+a^2} \underset{-\infty}{\sim} \dfrac{2a}{\pi} \times \dfrac{1}{a^2} \times |x|e^x$ et $\forall x \in]-\infty, 0]$, $|x|h_a(x) \geq 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent que $\int_{-\infty}^{0} |x|h_a(x)$ est de même nature que $\int_{-\infty}^{0} |x|e^x dx$.

$\forall A \in \mathbb{R}^-$, $\int_A^0 |x|e^x dx = -\int_A^0 xe^x dx = [xe^x]_A^0 + \int_A^0 e^x dx = Ae^A + 1 - e^A$.

$\lim\limits_{A \to -\infty} \int_A^0 |x|e^x dx = \lim\limits_{A \to -\infty} (Ae^A + 1 - e^A) = 1$; $\int_{-\infty}^{0} |x|e^x dx$ converge.

Par conséquent $\int_{-\infty}^{0} xh_a(x) dx$ est absolument convergente donc convergente.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} xh_a(x) dx$ existe donc $\underline{\underline{Z \text{ possède une espérance}}}$.

b) Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_A^B xh_a(x)dx = \int_A^B \frac{2a}{\pi} \frac{xe^x}{e^{2x}+a^2} dx \underset{\uparrow}{=} \frac{2a}{\pi} \int_{e^A}^{e^B} \frac{\ln t}{t^2+a^2} dt$$

$t = e^x$; $dt = e^x dx$; $x = \ln t$

$\int_{-\infty}^{+\infty} xh_a(x)dx$ converge, $\lim\limits_{B \to +\infty} e^B = +\infty$ et $\lim\limits_{A \to -\infty} e^A = 0$; par conséquent :

$\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln t}{t^2+a^2} dt$ converge et $\underline{\underline{E(Z) = \dfrac{2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \dfrac{\ln t}{t^2+a^2} dt}}$

c) Notons que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln t}{t^2+1} dt$ converge d'après ce qui précède ; par conséquent $\int_0^1 \dfrac{\ln v}{v^2+1} dv$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln w}{w^2+1} dw$ convergent.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $\int_A^1 \dfrac{\ln v}{v^2+1} dv \underset{\uparrow}{=} \int_{1/A}^{1} \dfrac{\ln 1/w}{1/w^2+1} (-1/w^2) dw = \int_{1/A}^{1} \dfrac{\ln w}{w^2+1} dw = -\int_1^{1/A} \dfrac{\ln w}{w^2+1}$

$w = \frac{1}{v}$; $v = 1/w$; $dv = -1/w^2\, dw$

Comme $\lim\limits_{A \to 0^+} \dfrac{1}{A} = +\infty$ il vient : $\underline{\underline{\int_0^1 \dfrac{\ln v}{v^2+1} dv = -\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln w}{w^2+1} dw}}$.

Ceci donne en particulier : $\displaystyle \underline{\underline{\int_0^{+\infty} \frac{\ln v}{v^2+1}\,dv = 0}}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $A \in \mathbb{R}_+^*$

$$\int_\varepsilon^A \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt \underset{t=ua}{\uparrow}{=} \int_{\varepsilon/a}^{A/a} a\,\frac{\ln(ua)}{u^2a^2+a^2}\,du = \frac{1}{a}\left[\int_{\varepsilon/a}^{A/a} \frac{\ln u}{u^2+1}\,du + \ln a \int_{\varepsilon/a}^{A/a} \frac{du}{u^2+1}\right]$$

$\lim\limits_{A\to+\infty} A/a = +\infty$ et, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon/a = 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2+1}\,du = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{a}\left[0 + \frac{\pi}{2}\ln a\right] = \frac{\pi}{2a}\ln a$. $\displaystyle E(Z) = \frac{2a}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,dt = \ln a$

$\underline{\underline{E(Z) = \ln a}}$.

(Q2) $L = \ln|X| + \ln|Y|$.

X et Y étant indépendantes $\ln|X|$ et $\ln|Y|$ le sont aussi. De plus ce qui précède montre que $\ln|X|$ et $\ln|Y|$ sont des variables aléatoires à densité admettant $h = h_1$ pour densité.

Par conséquent L est une variable aléatoire à densité admettant pour densité K définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,h(x-t)\,dt =$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ K(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{e^t}{e^{2t}+1} \times \frac{2}{\pi}\,\frac{e^{x-t}}{e^{2(x-t)}+1}\,dt = \frac{4e^x}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(e^{2t}+1)(e^{2x}e^{-2t}+1)}$$

$\displaystyle\forall x \in \mathbb{R},\ K(x) = \frac{4e^x}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)(e^{2x}+e^{2t})}\,dt$. Fixons x dans $\mathbb{R}$ et calculons $K(x)$

Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_A^B \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)(e^{2x}+e^{2t})}\,dt \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\int_{e^{2A}}^{e^{2B}} \frac{dy}{(y+1)(y+e^{2x})}\ ; \quad \lim_{B\to+\infty} e^{2B} = +\infty \text{ et } \lim_{B\to-\infty} e^{2B} = 0$$

$y = e^{2t}$; $dy = 2e^{2t}\,dt$

Par conséquent $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y+1)(y+e^{2x})}$ converge et vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)(e^{2x}+e^{2t})}\,dt$ (!!) pour les puristes.

Résumons : $K(x)=\dfrac{4e^{x}}{\pi^2}\times\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{dy}{(y+1)(y+e^{2x})}$.

1er Cas... $x=0$. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(y+1)(y+1)}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\frac{dy}{(y+1)^2}=\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{y+1}\right]_0^A=1$.

Par conséquent $K(0)=\dfrac{2}{\pi^2}$.

2e Cas... $x\neq 0$. $\forall y\in\mathbb{R}_+$, $\dfrac{1}{e^{2x}-1}\left(\dfrac{1}{y+1}-\dfrac{1}{y+e^{2x}}\right)=\dfrac{1}{e^{2x}-1}\dfrac{y+e^{2x}-y-1}{(y+1)(y+e^{2x})}=\dfrac{1}{(y+1)(y+e^{2x})}$.

$\forall A\in\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^{A}\frac{dy}{(y+1)(y+e^{2x})}=\frac{1}{e^{2x}-1}\Big[\ln|y+1|-\ln|y+e^{2x}|\Big]_0^A=\frac{1}{e^{2x}-1}\left[\ln\left|\frac{y+1}{y+e^{2x}}\right|\right]_0^A$

$\forall A\in\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^{A}\frac{dy}{(y+1)(y+e^{2x})}=\frac{1}{e^{2x}-1}\left(\ln\frac{A+1}{A+e^{2x}}-\ln\frac{1}{e^{2x}}\right)=\frac{1}{e^{2x}-1}\left(\ln\frac{A+1}{A+e^{2x}}+2x\right)$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{A+1}{A+e^{2x}}\right)\right)=0$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dy}{(y+1)(y+e^{2x})}=\frac{2x}{e^{2x}-1}=\frac{2x}{e^{x}(e^{x}-e^{-x})}=\frac{2xe^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$.

$K(x)=\dfrac{4e^{x}}{\pi^2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2xe^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}=\dfrac{4x}{\pi^2(e^{x}-e^{-x})}$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $K(x)=\dfrac{4x}{\pi^2(e^{x}-e^{-x})}$ et $K(0)=\dfrac{2}{\pi^2}$.

b) Pour $\forall t\in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, $\ell(t)=\dfrac{\ln t}{t^2-1}$ et $\ell(1)=\dfrac{1}{2}$.

ℓ est continue sur $]0,+\infty[$ $\left(\dfrac{\ln t}{t^2-1}\underset{1}{\sim}1\times\dfrac{1}{t+1}\underset{1}{\sim}\dfrac{1}{2}\right)$ donc localement intégrable.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ et $A\in\mathbb{R}_+^*$.

$\displaystyle\int_\varepsilon^{A}\ell(t)\,dt\underset{\uparrow}{=}\int_{\ln\varepsilon}^{\ln A}\ell(e^{u})e^{u}\,du$. Notons que : $\forall u\in\mathbb{R}^*$, $\ell(e^{u})=\dfrac{\ln e^{u}}{e^{2u}-1}=\dfrac{u}{e^{2u}-1}$

$t=e^{u}$; $dt=e^{u}du$; $u=\ln t$ $\qquad$ $\forall u\in\mathbb{R}^*$, $\ell(e^{u})e^{u}=\dfrac{ue^{u}}{e^{2u}-1}=\dfrac{u}{e^{u}-e^{-u}}=\dfrac{\pi^2}{4}K(u)$

$\ell(e^{0})e^{0}=\ell(1)=\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi^2}{4}\times\dfrac{2}{\pi^2}=\dfrac{\pi^2}{4}K(0)$

Finalement $\forall u\in\mathbb{R}$, $\ell(e^{u})e^{u}=\dfrac{\pi^2}{4}K(u)$.

Donc $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} \ell(t)\,dt = \int_{\ln\varepsilon}^{\ln A} \frac{\pi^2}{4} K(u)\,du$

$\lim\limits_{A\to+\infty} \ln(A)=+\infty$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \ln\varepsilon=-\infty$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)\,du$ converge et vaut 1 ; par conséquent

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \ell(t)\,dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi^2}{4}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$ converge et vaut $\dfrac{\pi^2}{4}$.

En particulier : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$ converge ... ainsi que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$.

Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $\alpha \in]0,1[$.

$$\int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt \underset{u=1/t}{=} \int_{1/\varepsilon}^{1/\alpha} \frac{-\ln u}{1/u^2-1}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = -\int_{1/\alpha}^{1/\varepsilon} \frac{\ln u}{1-u^2}\,du = \int_{1/\alpha}^{1/\varepsilon} \frac{\ln u}{u^2-1}\,du.$$

Or $\lim\limits_{\alpha\to1} 1/\alpha = 1$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+} 1/\varepsilon=+\infty$; par conséquent $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2-1}\,du$

Finalement. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = \frac{\pi^2}{8}$. $\quad \left(\dfrac{\pi^2}{4} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}dt\right)$.

Q3 a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\ln x}{x-1} = \dfrac{0}{-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{x\ln x}{x-1}\right) = 1$ car $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

Posons alors $\forall x \in [0,1]$, $\hat{\phi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \phi(x) & \text{si } x\in]0,1[\\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$. $\hat{\phi}$ est continue sur $[0,1]$

Ainsi ϕ est prolongeable en une fonction continue $\hat{\phi}$ sur $[0,1]$.

Notons que $\hat{\phi}$ est continue sur $[0,1]$, ainsi $\exists M\in\mathbb{R}_+$, $\forall x\in[0,1]$, $|\hat{\phi}(x)| \leq M$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\displaystyle\left|\int_0^1 x^{2n+1}\hat{\phi}(x)\frac{1}{x+1}\,dx\right| \leq \int_0^1 x^{2n+1}|\hat{\phi}(x)|\frac{1}{x+1}\,dx \leq \int_0^1 x^{2n+1} M\times 1\,dx = M\int_0^1 x^{2n+1}d$

Donc $\displaystyle\left|\int_0^1 x^{2n+1}\hat{\phi}(x)\frac{1}{x+1}\,dx\right| \leq M\left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \frac{M}{2n+2}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{2n+2} = 0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{2n+1}\hat{\phi}(x)\frac{1}{x+1}\,dx = 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in]0,1[$.

$$\sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2} \; ; \quad \sum_{k=0}^{n} x^{2k}\ln x = \frac{\ln x}{1-x^2} - \frac{x^{2n+2}\ln x}{1-x^2} .$$

donc $$\frac{\ln x}{x^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} x^{2k}\ln x + \frac{x^{2n+2}\ln x}{(x+1)(x-1)} = -\sum_{k=0}^{n} x^{2k}\ln x + \frac{x\ln x}{x-1} \times \frac{x^{2n+1}}{x+1}$$

Ainsi $$\frac{\ln x}{x^2-1} = -\sum_{k=0}^{n} x^{2k}\ln x + \frac{\hat{\varphi}(x)\, x^{2n+1}}{x+1} .$$

$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ converge ; $\int_0^1 \frac{\hat{\varphi}(x)\, x^{2n+1}}{x+1}\,dx$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$.

Ceci suffit pour au moins écrire que : $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} x^{2k}\ln x\,dx + \int_0^1 \frac{\hat{\varphi}(x)x^{2n+1}}{x+1}\,dx$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto x^{2k}\ln x$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 donc $\int_0^1 x^{2k}\ln x\,dx$ converge.

$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left([x\ln x - x]_\varepsilon^1 \right) = -1$; $\int_0^1 \ln x\,dx$ converge.

On peut alors écrire : $\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} x^{2k}\ln x\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^{2k}\ln x\,dx$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_\varepsilon^1 \underbrace{x^{2k}\ln x}_{u'\,v}\,dx = \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\ln x \right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\frac{1}{x}\,dx = -\frac{\varepsilon^{2k+1}\ln \varepsilon}{2k+1} - \left[\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} \right]_\varepsilon^1$ OK ?

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{2k}\ln x\,dx = -\frac{1}{(2k+1)^2} .$$

donc $$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} + \int_0^1 \frac{\hat{\varphi}(x)\,x^{2n+1}}{x+1}\,dx$$

donc $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx - \int_0^1 \frac{\hat{\varphi}(x)\,x^{2n+1}}{x+1}\,dx$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{\hat{\varphi}(x)\,x^{2n+1}}{x+1}\,dx = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx .$

La série de terme général $\frac{1}{(2k+1)^2}$ est alors convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$.

Donc $\underline{\underline{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}}$.

La série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} S_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Posons $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$. $S = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4} S_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \frac{1}{4} S + \frac{\pi^2}{8}$

Ainsi $\frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8}$ et $S = \frac{\pi^2}{6}$. $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}}$.

c) Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \ln x = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \ln x = \frac{\ln x}{1-x} - x^n \frac{x \ln x}{1-x}$$

$$-\sum_{k=0}^{n} x^k \ln x = \frac{\ln x}{x-1} - x^n \frac{x \ln x}{x-1} \; ; \quad \frac{\ln x}{x-1} = -\sum_{k=0}^{n} x^k \ln x + x^n \hat{\phi}(x)$$

$\int_0^1 x^n \hat{\phi}(x)\,dx$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^k \ln x\,dx$ converge (même chose que plus haut).

Donc $\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} x^k \ln x\,dx$ existe et vaut $\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^k \ln x\,dx$

tout ceci montre alors que $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx$ converge et vaut $-\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^k \ln x\,dx + \int_0^1 x^n \hat{\phi}(x)\,dx$

Un calcul analogue à celui du a) montre que $\int_0^1 x^k \ln x\,dx = -\frac{1}{(k+1)^2}$ pour tout k dans $\mathbb{N}$ et que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n \hat{\phi}(x)\,dx = 0$

Ainsi $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(-\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 x^k \ln x\,dx\right) = \lim_{n\to+\infty} -\sum_{k=0}^{n} \frac{-1}{(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Donc $\underline{\underline{\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}}}$.

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{x+1-x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$, $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$.

Donc $\forall x \in]0,1[$, $\frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x+1}$; $\forall x \in]0,1[$, $\frac{\ln x}{x+1} = \frac{\ln x}{x-1} - 2\frac{\ln x}{x^2-1}$.

Donc $\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}dx - 2\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}dx = \frac{\pi^2}{6} - 2\times\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{12}$.

$$\underline{\underline{\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}dx = -\frac{\pi^2}{12}.}}$$

Q4 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable.

Cette fonction est positive sur $\mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{(1+x^2)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2n}}$; la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{2n}}$ ($2n>1$) et la règle de comparaison des intégrales généralisées des fonctions positives montrent la convergence de $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$ et donc de $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Considérons $u_n : x \mapsto \frac{\ln x}{(1+x^2)^n}$. u_n est continue donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,1[$, $-u_n(x) = -\frac{\ln x}{(1+x^2)^n} \underset{0}{\sim} -\ln x$. La positivité de $x \mapsto -\ln x$ et la convergence de $\int_0^1 -\ln x\,dx$ montrent alors la convergence de $\int_0^1(-u_n(x))dx$ donc de $\int_0^1 u_n(x)dx$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}\ln x}{(1+x^2)^n}\right) = 0$ car $\frac{x\sqrt{x}}{(1+x^2)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^{2n-\frac{3}{2}}}$ et $2n-\frac{3}{2}>0$

$\exists A \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in [A,+\infty[$, $\left|\frac{x\sqrt{x}\ln x}{(1+x^2)^n}\right| \leq 1$; donc $\forall x \in [A,+\infty[$, $0 \leq |u_n(x)| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

La convergence de $\int_A^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$ ($\frac{3}{2}>1$!) et la positivité de $|u_n|$ donnent la convergence de $\int_A^{+\infty}|u_n(x)|dx$. $\int_A^{+\infty}u_n(x)dx$ est convergente car absolument convergente.

Donc $\int_1^{+\infty}u_n(x)dx$ est convergente ce qui achève de prouver la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^n}d$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$I_n = \int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^n} \underset{\uparrow}{=} \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^A - \int_0^A x \, \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\int_0^A \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx.$$

$$\begin{cases} u'(x)=1 & u(x)=x \\ v(x)=(1+x^2)^{-n} & v'(x)=(-n)(2x)(1+x^2)^{-n-1} \end{cases}$$

$$\int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{A}{(1+A^2)^n} + 2n\int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^n} - 2n\int_0^A \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{A}{(1+A^2)^n} = 0$ et, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$ convergent, ainsi en faisant

tendre A vers $+\infty$ on obtient : $I_n = 2n\, I_n - 2n\, I_{n+1}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

$$I_n = \frac{(2n-3)}{(2n-2)} \times \frac{(2n-5)}{(2n-4)} \times \cdots \times \frac{1}{2} I_1 = \frac{(2n-2)!}{[(2n-2)(2n-4)\cdots 2]^2} I_1 = \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1}(n-1)!]^2} I_1$$

Donc $I_n = \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1}(n-1)!]} I_1$? Une légère récurrence le confirme !

$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ (d'après le préliminaire).

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{(2n-2)!}{[2^{n-1}(n-1)!]^2} \frac{\pi}{2}$.

Remarque .. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\pi/2 \,\leftarrow\, \text{ok ! ...}} \frac{(1+\tan^2\theta)\,d\theta}{(1+\tan^2\theta)^n} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+\tan^2\theta)^{n-1}}$

$x = \tan\theta$; $\theta = \operatorname{Arctan} x$; $dx = (1+\tan^2\theta)\,d\theta$

Donc $I_n \underset{\uparrow}{=} \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta)^{n-1}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2n-2}\,d\theta \underset{\uparrow}{=} \int_{\pi/2}^{0} (\sin t)^{2n-2}(-dt) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2n-2}\,dt$

$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$; $t = \frac{\pi}{2} - \theta$

C'est donc bien Wallis !

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$J_n=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^n}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\ln x}{(1+x^2)^{n+1}}+\frac{x^2\ln x}{(1+x^2)^{n+1}}\right)dx \underset{\uparrow}{=} \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^{n+1}}dx+\int_0^{+\infty}\frac{x^2\ln x}{(1+x^2)^{n+1}}dx$$

intégrales des 3 convergent

donc $J_n=J_{n+1}+\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\ln x}{(1+x^2)^{n+1}}dx$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ et $A\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\int_\varepsilon^A\frac{x^2\ln x}{(1+x^2)^{n+1}}dx=\int_\varepsilon^A\underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}}_{u'}\times\underbrace{(x\ln x)}_{v}dx=\left[-\frac{1}{2n}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^n}\right]_\varepsilon^A-\int_\varepsilon^A-\frac{1}{2n}\frac{1}{(1+x^2)^n}(\ln x+1)dx$$

donc $$\int_\varepsilon^A\frac{x^2\ln x}{(1+x^2)^{n+1}}dx=-\frac{1}{2n}\frac{A\ln A}{(1+A^2)^n}+\frac{1}{2n}\frac{\varepsilon\ln\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^n}+\frac{1}{2n}\int_\varepsilon^A\frac{\ln x}{(1+x^2)^n}dx+\frac{1}{2n}\int_\varepsilon^A\frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{A\ln A}{(1+A^2)^n}=0$ $(n\geqslant1)$ et $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\varepsilon\ln\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^n}=0$; par conséquent il vient

en faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\ln x}{(1+x^2)^{n+1}}dx=\frac{1}{2n}J_n+\frac{1}{2n}I_n$.

Ainsi $J_n=J_{n+1}+\dfrac{1}{2n}J_n+\dfrac{1}{2n}I_n$; $J_{n+1}=\dfrac{2n-1}{2n}J_n-\dfrac{1}{2n}I_n$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad J_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}J_n-\frac{1}{2n}I_n.}$$

d) $J_2=\frac{1}{2}J_1-\frac{1}{2}I_1$; rappelons que $I_1=\frac{\pi}{2}$ et $J_1=0$

donc $\underline{\underline{J_2=-\frac{\pi}{4}}}$. $\qquad J_3=\frac{3}{4}J_2-\frac{1}{4}I_2=\frac{3}{4}\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\frac{2!}{2^2}\times\frac{\pi}{2}$

$J_3=-\frac{3\pi}{16}-\frac{\pi}{16}=-\frac{\pi}{4}$; $\underline{\underline{J_3=-\frac{\pi}{4}}}$.

Pas de fausse joie : $J_4=-\dfrac{23\pi}{96}$!