SUJET 4

Le but du problème est d'étudier les propriétés des " équations fonctionnelles " suivantes :

$$(E_1) \qquad \varphi(x+1)+\varphi(x)=\frac{1}{x} \qquad\qquad (E_2) \qquad \psi(x+1)-\psi(x)=\frac{1}{x}$$

Si I est une partie de $\mathbb{R}$, on dira que φ est solution de (E_1) sur I si, et seulement si, φ est définie sur I, et pour tout x dans I : $\varphi(x+1)+\varphi(x)=\frac{1}{x}\cdot$ De même pour ψ avec (E_2).

La partie II est indépendante des autres. III est presque indépendante de I.

PARTIE I : Etude d'une solution de (E_1)

Q1 On considère la fonction $\varphi : x \to \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Ici on pose $I=]0,+\infty[$.

a) Montrer que le domaine de définition de φ est I.

b) Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(\frac{1}{2})$ $(u=\sqrt{t})$.

Q2 a) Montrer que φ est solution de (E_1) sur I.

b) Prouver que $\forall x\in I,\ \dfrac{1}{2x}\leqslant \varphi(x)\leqslant \dfrac{1}{x}$ (on pourra encadrer $\frac{1}{1+t}$).

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

Q3 Soit φ_1 une seconde solution de (E_1) sur I dont la limite en $+\infty$ est zéro.

Montrer que $d=\varphi-\varphi_1$ est 2-périodique sur I et que $\lim\limits_{x\to+\infty} d(x)=0$.

En déduire que d est nulle sur I et qu'ainsi $\varphi_1=\varphi$ (on pourra remarquer que $d(x)=d(x+2n)$ si x est dans I et n dans $\mathbb{N}$).

Q4 a) Soit x un élément de I.

Montrer $\forall k\in\mathbb{N},\ \dfrac{(-1)^k}{x+k}=(-1)^k\varphi(x+k)-(-1)^{k+1}\varphi(x+k+1)$

En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{x+n}$ converge et que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}=\varphi(x)$.

b) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cdot$

Q5 a) Soit x et y deux éléments de I tels que $x\leqslant y$. Montrer que : $0\leqslant\varphi(x)-\varphi(y)\leqslant\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{y-x}{xy}\cdot$

b) En déduire les variations et la continuité de φ sur I.

c) Donner un équivalent simple de $\varphi(x)$, quand x tend vers 0 (utiliser (E_1)).

d) Donner un équivalent simple de $\varphi(x)$, quand x tend vers $+\infty$.

PARTIE II : Etude d'une solution de (E_2)

Q0 Montrer que si ℓ est une application continue de $[b,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ayant une limite finie en $+\infty$ alors ℓ est bornée sur $[b,+\infty[$.

Q1 Dans toute cette question x est un réel strictement positif.

a) Montrer que si y est un réel strictement positif et si γ est un réel quelconque : $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\gamma\, e^{-yt}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Montrer alors que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-xt}-1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent.

En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\lim_{a\to 0^+}\int_a^{ax} \frac{e^{-t}-1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$

d) On se propose de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln x$. (cette intégrale existe d'après ce qui précède).

Montrer que si a est un réel strictement positif : $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ax}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.

Conclure alors en utilisant c).

Q2 Dans toute cette question x est un réel strictement positif.

a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)\mathrm{d}t$ converge (on pourra utiliser Q1).

b) Trouver le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $t \to e^{-t}(1-e^{-t}) - t\,e^{-xt}$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)\mathrm{d}t$ converge.

Q3 Montrer que $\psi : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)\mathrm{d}t$ est solution de l'équation (E_2).

Q4 g est une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ continue et bornée. On pose $M = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}^+} |g(x)|$.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\theta(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, g(t)\,\mathrm{d}t$.

a) r est un élément de $\mathbb{N}$ et y un réel strictement positif. Utiliser le cours pour justifier l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\, e^{-yt}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r\, e^{-yt}\, g(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente (ce qui justifie la définition de θ, non ?).

b) x et h sont deux réels tels que $0 < |h| < x$.

Montrer que :

$$\left|\frac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h} + \int_0^{+\infty} t\,e^{-xt}\, g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M|h|}{(x-|h|)^3}$$

(on rappelle que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $|e^u - 1 - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}\, e^{|u|}$).

En déduire que θ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, et en préciser la dérivée.

c) Utiliser Q1 pour montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \psi(x) - \ln x = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\ \frac{1 - e^{-t} - t}{t(1 - e^{-t})}\,\mathrm{d}t$

Utiliser alors ce qui précède pour montrer proprement que $\psi - \ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Montrer enfin que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \psi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1 - e^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

d) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\psi(x) - \ln x) = 0$.

Q5 Dans cette question x est un réel strictement positif.

a) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, e^{-(x+k)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(x+k)^2}\cdot$

b) Montrer que si n est dans $\mathbb{N}$:

$$\psi'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\ e^{-(x+n)t}\,\mathrm{d}t.$$

c) En déduire que $\displaystyle\psi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ (on rappelle que $t \leqslant e^t - 1$).

Q6 On pose $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\Big)$.

a) Justifier la définition précédente.

b) Soit x et h deux réels tels que $0 < |h| < \dfrac{x}{2}\cdot$

Montrer que $\displaystyle\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \right| \leqslant |h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Qu'en déduire ?

c) Montrer que $x \to S(x) - \psi(x) - \dfrac{1}{x}$ est constante sur $]0, +\infty[$.

Q7 x est un élément de $\mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \psi(x) = \psi(x+n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k}\cdot$

b) Montrer que pour tout réel x strictement positif on a :

$$\psi(x) = \lim_{n \to +\infty} \Big(\ln(x+n) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k} \Big) \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \Big) = \gamma$$

où γ est une constante qu'on exprimera en fonction de $\psi(1)$ (utiliser Q4 d)).

c) Donner enfin, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, une expression de $\psi(x)$ qui utilise x, $S(x)$ et γ.

TROISIÈME PARTIE : Application à des calculs de primitives itérées ? ?

Dans cette partie on notera F l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in F,\ \forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Montrer que $T : f \to T(f)$ est un endomorphisme injectif de F.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ On se propose de montrer par l'absurde que T n'a pas de valeur propre.

On suppose que λ est une valeur propre de T et f un vecteur propre associé.

Montrer que λ n'est pas nul, que f est dérivable sur $[0,1]$ et que $f - \lambda f'$ est nulle.

Montrer enfin que f est nulle (on pourra utiliser $x \to e^{-x/\lambda} f(x)$). Conclure !

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall f \in F,\ \forall x \in [0,1],\ T^n(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\ f(t)\ dt$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ Dans cette question $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \ln(x+1)$.

a) Soit x un élément de $[0,1]$. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^x (-t)^{p-1}\,\mathrm{d}t$ pour p dans $\mathbb{N}^*$.

En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^k}{1+t} dt = f(x) - \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p-1} \frac{x^p}{p}$.

b) Montrer que si n est dans $\mathbb{N}$, $T^n(f) = T^{n+1}(f')$.

Utiliser ce qui précède pour montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes P_n et Q_n de degré inférieur ou égal à n, tels que :

$$T^n(f) = P_n \times f + Q_n.$$

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n(f)(1) = \displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \varphi(k+1)\binom{n}{k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \varphi(k+1)\ \mathrm{C}_n^k$.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ a) Soit f un élément quelconque de F. Montrer que la série de terme général $T^n(f)(x)$ converge pour tout élément x de $[0,1]$.

b) On pose $\forall x \in [0,1],\ f(x) = x^3$. Calculer, pour $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} T^n(f)(x)$.
