Q0 Le résultat de Wallis signifie que $\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2.2.4.4\cdots(2n)(2n)}{1.3.3.5\cdots(2n-1)(2n+1)}$

c'est à dire que $\underline{\underline{\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}}}$ ce que l'on écrit $\underline{\underline{\dfrac{\pi}{2} = \prod\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}}}$

Q1 Soit $p\in\mathbb{N}^*$; $I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\times\cdots\times 1}{(2p)(2p-2)\times\cdots\times 2} I_0$.

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\times\cdots\times 1}{2^p p!} I_0 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)\times\cdots\times 2\times 1}{(2^p p!)((2p)(2p-2)\times\cdots\times 2)} I_0 = \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} I_0.$$

Montrons alors par récurrence que pour tout $p\in\mathbb{N}$, $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{[2^p p!]^2} I_0$

→ c'est vrai pour $p=0$ car pour $p=0$: $\dfrac{(2p)!}{[2^p p!]^2} = 1$.

→ Supposons la propriété vraie pour p dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{(2p+1)}{2p+2}\,\frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} I_0 = \frac{(2p+2)(2p+1)\quad(2p)!}{(2p+2)^2[2^p p!]^2} I_0$$

$$I_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{[2(p+1)2^p p!]^2} I_0 = \frac{(2p+2)!}{[2^{p+1}(p+1)!]^2} I_0$$ ce qui achève la récurrence.

$I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\, dt = \frac{\pi}{2}$. Alors $\underline{\underline{\forall p\in\mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{[2^p p!]^2}\,\dfrac{\pi}{2}}}$.

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. $I_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \dfrac{(2p)(2p-2)\cdots(2)}{(2p+1)(2p-1)\cdots(3)} I_1 = \dfrac{[(2p)(2p-2)\cdots(2)]^2}{(2p+1)!} I_1$

$I_{2p+1} = \dfrac{[2^p p!]^2}{(2p+1)!} I_1$ or $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin t\, dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$.

Il ne reste plus qu'à vérifier par récurrence que $\underline{\underline{\forall p\in\mathbb{N},\ I_{2p+1} = \dfrac{[2^p p!]^2}{(2p+1)!}}}$ ... ce que je vous laisse !

Notons que : $\underline{\underline{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ I_{2p} = \prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{2k-1}{2k} \times \dfrac{\pi}{2} \quad\text{et}\quad I_{2p+1} = \prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{2k}{2k+1}}}$.

Q2 a) $\forall p \in \mathbb{N}$, $0 < I_{2p+2} \leqslant I_{2p+1} \leqslant I_{2p}$

Alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $\dfrac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leqslant \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leqslant 1$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2p+1}{2p+2} \leqslant \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leqslant 1$. Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} \left(\dfrac{2p+1}{2p+2}\right) = 1$ il vient par encadrement $\underline{\underline{\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1}}$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $I_{2p+1} = \dfrac{[2^p p!]^2}{(2p+1)!}$ mais I_{2p+1} vaut également $\prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{2k}{2k+1}$

$I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{[2^p p!]^2} \dfrac{\pi}{2}$ mais I_{2p} vaut également $\prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{2k-1}{2k} \times \dfrac{\pi}{2}$.

$$1 = \lim_{p \to +\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \lim_{p \to +\infty} \frac{\prod\limits_{k=1}^{p} \frac{2k}{2k+1}}{\prod\limits_{k=1}^{p} \frac{(2k-1)}{2k} \times \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \lim_{p \to +\infty} \left(\prod_{k=1}^{p} \left(\frac{2k}{2k-1} \times \frac{2k}{2k+1} \right) \right).$$

Alors $\underline{\underline{\lim\limits_{p \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{\pi}{2}}}$.

Q3 montrons que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{(2k+1)^2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $1 - \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{(2k+1)^2 - 1}{(2k+1)^2} = \dfrac{2k(2k+2)}{(2k+1)^2}$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k}{2k+1} \prod_{k=1}^{p} \frac{2k+2}{2k+1} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k}{2k+1} \prod_{k=2}^{p+1} \frac{2k}{2k-1} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k}{2k+1} \prod_{k=2}^{p} \frac{2k}{2k-1} \times \frac{2p+2}{2p+1}.$$

Or $\prod\limits_{k=2}^{p} \dfrac{2k}{2k-1} = \dfrac{1}{2} \prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{2k}{2k-1}$; ainsi $\prod\limits_{k=1}^{p} \left(1 - \dfrac{1}{(2k+1)^2}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2p+2}{2p+1} \times \prod\limits_{k=1}^{p} \dfrac{(2k)^2}{(2k+1)(2k-1)}$

Alors $\lim\limits_{p\to+\infty} \prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\pi}{2}$.

$\lim\limits_{p\to+\infty} \prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}$. $\frac{\pi}{4} = \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots$

$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ 1-\left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{(2k)^2-1}{(2k)^2} = \frac{(2k-1)(2k+1)}{2k}$; $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right) = \prod_{k=1}^{p}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}$.

$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right) = \left[\prod_{k=1}^{p}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\right]^{-1}$.

Ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty} \prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right) = \frac{2}{\pi}$; $\frac{2}{\pi} = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots$

Posons $\forall p\in[\![2,+\infty[\![,\ U_p = \prod_{k=2}^{p}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

$\forall p\in[\![2,+\infty[\![,\ U_{2p} = \prod_{k=2}^{2p}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)\prod_{k=1}^{p-1}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)$

$\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)\right) = \frac{2}{\pi}$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\prod_{k=1}^{p-1}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} U_{2p} = \frac{1}{2}$.

$\forall p\in[\![2,+\infty[\![,\ U_{2p+1} = U_{2p}\times\left(1-\frac{1}{(2p+1)^2}\right)$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} U_{2p+1} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$.

Alors $\lim\limits_{p\to+\infty} U_{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} U_{2p+1} = \frac{1}{2}$. Ainsi $(U_p)_{p\geq 2}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

$\lim\limits_{p\to+\infty}\prod_{k=2}^{p}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{2} = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots$

PARTIE II

⚠ Ne pas tenir compte de Q0 qui correspond à une version 1

A NE PAS LIRE

Q) Notons que : $\forall t \in]-\pi,\pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1-\frac{t^2}{n^2\pi^2} \geq 0$

Soit $t \in]-\pi,\pi[$. Le produit infini de terme général $1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}$ est de même nature que la série de terme général $\ln\left(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$.

$-\ln\left(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\right) \sim \frac{t^2}{n^2\pi^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{t^2}{n^2\pi^2} \geq 0$, la série de terme général $\frac{t^2}{n^2\pi^2}$ est convergente. Ainsi la série de terme général $-\ln\left(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$ converge. Il en est de même pour la série de terme général $\ln\left(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$.

Finalement, pour tout $t \in]-\pi,\pi[$, le produit de terme général $1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}$ converge.

Q) a) Existence. Soit $t \in \mathbb{R}$. $\sin(nt) = \sin((2p+1)t) = \operatorname{Im}\left(e^{i(2p+1)t}\right) = \operatorname{Im}(\cos t + i\sin t)^{2p+1}$.

$$\sin(nt) = \operatorname{Im}\left(\sum_{l=0}^{2p+1} C_{2p+1}^{l} (\cos t)^{2p+1-l} (i\sin t)^l\right) = \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{2l+1} (\cos t)^{2p+1-(2l+1)} (-1)^l (\sin t)^{2l+1}$$

$$\sin(nt) = \sin t \sum_{l=0}^{p} C_{2p+1}^{2l+1} (-1)^l (\cos^2 t)^{p-l} (\sin^2 t)^l = \sin t \sum_{l=0}^{p} C_{2p+1}^{2l+1} (-1)^l (1-\sin^2 t)^{p-l} (\sin^2 t)^l.$$

Posons $Q = \sum_{l=0}^{p} C_{2p+1}^{2l+1} (-1)^l (1-X)^{p-l} X^l$.

$Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin t\, Q(\sin^2 t) = \sin t \sum_{l=0}^{p} C_{2p+1}^{2l+1} (1-\sin^2 t)^{p-l} (\sin^2 t)^l = \sin(nt)$.

Ainsi $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin(nt) = \sin t\, Q(\sin^2 t)$.

Unicité. Soit $\hat{Q}$ une seconde solution.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin t\, Q(\sin^2 t) = \sin t\, \hat{Q}(\sin^2 t)$

$\forall t \in]0,\pi[$, $Q(\sin^2 t) = \hat{Q}(\sin^2 t)$ (car $t \in]0,\pi[$, $\sin t \neq 0$).

$\forall x \in]0,1]$, $Q(x) = \hat{Q}(x)$ (quand t décrit $]0,\pi[$, $\sin^2 t$ décrit $]0,1]$).

$\forall x \in]0,1[$, $(\varphi - \hat{\varphi})(x) = 0$. Alors $\varphi - \hat{\varphi}$ admet une infinité de racines.
Par conséquent $\varphi - \hat{\varphi}$ est le polynôme nul. $\hat{\varphi} = \varphi$. D'où l'unicité.

$n=1$: $\varphi = 1$
$n=3$: $\varphi = 3-4X$
$n=5$: $\varphi = 16X^2 - 20X + 5$

Finalement $\exists !\, \varphi \in \mathbb{R}[X]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin(nt) = \sin t \; \varphi(\sin^2 t)$.

$$\varphi = \sum_{\ell=0}^{p} C_{2p+1}^{2\ell+1} (-1)^\ell (1-X)^{p-\ell} X^\ell.$$

$\forall \ell \in [\![0,p]\!]$, $\deg\left((1-X)^{p-\ell} X^\ell\right) = p$. Ainsi $\deg \varphi \leq p$.

Le coefficient de X^p dans φ est : $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{p} C_{2p+1}^{2\ell+1} (-1)^\ell (-1)^{p-\ell} = (-1)^p \sum_{\ell=0}^{p} C_{2p+1}^{2\ell+1} \neq 0$.

Ainsi φ est de degré p. Notons encore que $\displaystyle\varphi = \sum_{j=0}^{p}\left((-1)^j \sum_{\ell=0}^{j} C_{2p+1}^{2\ell+1} C_{p-\ell}^{j-\ell}\right) X^j.$

Remarque. Le coefficient de X^p dans φ est $\displaystyle(-1)^p \sum_{\ell=0}^{p} C_{2p+1}^{2\ell+1} = (-1)^p 2^{2p}$.

Dans la suite $p \geq 1$.

b) Soit $\ell \in [\![1,p]\!]$. $\dfrac{\ell\pi}{n} = \dfrac{\ell\pi}{2p+1} \in \left[\dfrac{\pi}{2p+1}, \dfrac{p\pi}{2p+1}\right] \subset \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Alors $\sin\dfrac{\ell\pi}{n} \neq 0$ et $0 \overset{\sin(\ell\pi)=0}{=} \sin\left(n \times \dfrac{\ell\pi}{n}\right) = \sin\dfrac{\ell\pi}{n}\; \varphi\left(\sin^2\dfrac{\ell\pi}{n}\right)$.

Alors $\varphi\left(\sin^2\dfrac{\ell\pi}{n}\right) = 0$; $\varphi(y_\ell) = 0$.

$y_1, y_2, \dots, y_p$ sont p zéros de φ.

$0 < \dfrac{\pi}{n} < \dfrac{2\pi}{n} < \dots < \dfrac{p\pi}{n} = \dfrac{p\pi}{2p+1} < \dfrac{\pi}{2}$. Alors

$0 < \sin\dfrac{\pi}{n} < \sin\dfrac{2\pi}{n} < \dots < \sin\dfrac{p\pi}{n} < 1$ car $\sin$ est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Donc $0 < \sin^2\dfrac{\pi}{n} < \sin^2\dfrac{2\pi}{n} < \dots < \sin^2\dfrac{p\pi}{n} < 1$ ($x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$).

$y_1, y_2, \dots, y_p$ sont alors p zéros distincts de φ.

Ainsi $\displaystyle\prod_{\ell=1}^{p}(X - y_\ell)$ divise φ. $\exists A \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\varphi = A \prod_{\ell=1}^{p}(X - y_\ell)$.

Or $\displaystyle\deg \varphi = p = \deg \prod_{\ell=1}^{p}(X - y_\ell)$. Ainsi $\deg A = 0$; $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $A = \lambda$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - y_k)$.

$\begin{cases} \sin t \underset{0}{\sim} t \\ \sin(nt) \underset{0}{\sim} nt \end{cases}$

c) $\varphi(0) = \lim_{x \to 0} \varphi(x)$; $\varphi(0) = \lim_{t \to 0} \varphi(\sin^2 t) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(nt)}{\sin t} = n$.

Ainsi $\varphi(0) = n$.

$\varphi(0) = \lambda \prod_{k=1}^{p} (-y_k)$. Alors $\lambda \prod_{k=1}^{p} (-y_k) = n$; $\lambda = \dfrac{n}{\prod_{k=1}^{p} (-y_k)}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\sin(nx) = \sin x \, \varphi(\sin^2 x) = \sin x \, \lambda \prod_{k=1}^{p} (\sin^2 x - y_k) = n \sin x \dfrac{\prod_{k=1}^{p} (\sin^2 x - y_k)}{\prod_{k=1}^{p} (-y_k)}$.

$\sin(nx) = n \sin x \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{y_k}\right)$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(nx) = n \sin x \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right)$.

d) Soit $x \in D_{\tan} = \mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \hat{k}\pi ; \hat{k} \in \mathbb{Z}\}$.

Soit $k \in [\![1, p]\!]$.

$1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} = 1 - \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos^2 \frac{k\pi}{n}} = 1 - \dfrac{1 - \frac{1}{1+\tan^2 x}}{1 - \frac{1}{1+\tan^2 \frac{k\pi}{n}}} = 1 - \dfrac{\tan^2 x (1 + \tan^2 k\pi/n)}{\tan^2 \frac{k\pi}{n} (1 + \tan^2 x)}$.

$1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} = \dfrac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{n} (1 + \tan^2 x)} \left[\tan^2 \frac{k\pi}{n} (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x (1 + \tan^2 (k\pi/n))\right]$.

$1 - \dfrac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} = \dfrac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{n} (1 + \tan^2 x)} \left(\tan^2 \frac{k\pi}{n} - \tan^2 x\right) = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x} \left(1 - \dfrac{\tan^2 x}{\tan^2 \frac{k\pi}{n}}\right) = \cos^2 x \left(1 - \dfrac{\tan^2 x}{\tan^2 \frac{k\pi}{n}}\right)$.

Alors $\sin(nx) = n \sin x \prod_{k=1}^{p} \left(\cos^2 x \left(1 - \dfrac{\tan^2 x}{\tan^2 \frac{k\pi}{n}}\right)\right) = n \sin x \cos^{2p} x \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \dfrac{\tan^2 x}{\tan^2 \frac{k\pi}{n}}\right)$.

$\sin(nx) = n \dfrac{\sin x}{\cos x} \cos^{2p+1} x \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \dfrac{\tan^2 x}{\tan^2 \frac{k\pi}{n}}\right) = n \tan x \cos^n x \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \dfrac{\tan^2 x}{\tan^2 \frac{k\pi}{n}}\right)$.

$\forall x \in D_{\tan}$, $\sin(nx) = n(\cos x)^n \tan x \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{\tan^2 x}{\tan^2 \frac{k\pi}{n}}\right)$.

(Q2) a) φ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x^2}[\cos x \times x - \sin x]$.

Posons $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u(x) = x\cos x - \sin x$. u est dérivable et

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u'(x) = -\sin x \times x + \cos x - \cos x = -x\sin x \leqslant 0$.

u est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $u(0) = 0$. Alors $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u(x) \leqslant 0$

Ainsi $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi'(x) \leqslant 0$. φ est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < x \leqslant y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \varphi(y) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \geqslant \frac{\sin y}{y}$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < x \leqslant y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin y > 0, x > 0, \frac{\sin y}{y} \leqslant \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \frac{x}{y} \leqslant \frac{\sin x}{\sin y}$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < x \leqslant y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} \leqslant \frac{\sin x}{\sin y}$.

b) Posons $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\psi(x) = \tan x$.

ψ est deux fois dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\psi'(x) = 1 + \tan^2 x$ et $\psi''(x) = 2(1+\tan^2 x)\tan x \geqslant 0$.

ψ est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x \leqslant y < \frac{\pi}{2}$.

Posons $\lambda = \frac{x}{y}$. $\lambda \in]0, 1]$. $x = \frac{x}{y} \times y = \lambda y = \lambda y + (1-\lambda)0$.

Alors $\tan(x) = \tan(\lambda y + (1-\lambda)0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{convexité de tan}}}{\leqslant} \lambda \tan y + (1-\lambda)\tan 0 = \lambda \tan y = \frac{x}{y}\tan y$.

Or $\tan y > 0$ donc $\frac{\tan x}{\tan y} \leqslant \frac{x}{y}$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < x \leqslant y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\tan x}{\tan y} \leqslant \frac{x}{y}$.

Q3) a) $p \in \mathbb{N}^*$. $n = 2p+1$. $t \in]0,\pi[$

Alors $\sin t = \sin\left(n\frac{t}{n}\right) = n \sin\frac{t}{n} \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{\sin^2(t/n)}{\sin^2(k\pi/n)}\right)$ d'après Q2c.

Ainsi $\dfrac{\sin t}{n\sin\frac{t}{n}} = \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{\sin^2(t/n)}{\sin^2(k\pi/n)}\right)$ car $\sin\frac{t}{n} \neq 0$ puisque $\frac{t}{n} \in]0,\frac{\pi}{2}[$.

$\frac{t}{n} \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\frac{k\pi}{n} \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $t/n \leq k\pi/n$. Donc $\dfrac{\sin(t/n)}{\sin(k\pi/n)} \geq \dfrac{t/n}{k\pi/n} = \dfrac{t}{k\pi}$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$.

Par conséquent $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\dfrac{\sin^2(t/n)}{\sin^2(k\pi/n)} \geq \dfrac{t^2}{k^2\pi^2}$; $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\underline{\underline{0 \leq}}\ 1 - \dfrac{\sin^2(t/n)}{\sin^2(k\pi/n)} \leq 1 - \dfrac{t^2}{k^2\pi^2}$.

$$\frac{\sin t}{n\sin\frac{t}{n}} = \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{\sin^2(t/n)}{\sin^2(k\pi/n)}\right) \leq \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}\right).$$

$\frac{t}{n} \in D_{\tan}$ donc $\sin\left(n\frac{t}{n}\right) = n\left(\cos\frac{t}{n}\right)^n \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{\tan^2(t/n)}{\tan^2(k\pi/n)}\right)$.

$\cos\frac{t}{n} \neq 0$ donc $\dfrac{\sin t}{n(\cos\frac{t}{n})^n} = \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \dfrac{\tan^2(t/n)}{\tan^2(k\pi/n)}\right)$.

$\frac{t}{n} \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\frac{k\pi}{n} \in]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\underline{\underline{\forall k \in [\![1,p]\!],\ \frac{t}{n} \leq \frac{k\pi}{n}}}$. Alors $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $0 \leq \dfrac{\tan(t/n)}{\tan(k\pi/n)} \leq \dfrac{t/n}{k\pi/n} = \dfrac{t}{k\pi}$.

Alors $\dfrac{\tan^2(t/n)}{\tan^2(k\pi/n)} \leq \dfrac{t^2}{k^2\pi^2}$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$. $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\underline{\underline{0 \leq}}\ 1 - \dfrac{t^2}{k^2\pi^2} \leq 1 - \dfrac{\tan^2(t/n)}{\tan^2(k\pi/n)}$.

Ainsi $\dfrac{\sin t}{n(\cos\frac{t}{n})^n} = \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \dfrac{\tan^2(t/n)}{\tan^2(k\pi/n)}\right) \geq \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \dfrac{t^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Finalement
$$\underline{\underline{\frac{\sin t}{n\sin(t/n)} \leq \prod_{k=1}^{p}\left(1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}\right) \leq \frac{\sin t}{n(\cos\frac{t}{n})^n \tan\frac{t}{n}}.}}$$

b) Soit $t \in]0,\pi[$. Ce qui précède donne, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\sin t}{(2p+1)\sin\frac{t}{2p+1}} \leqslant \prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{t^2}{k^2\pi^2}\right) \leqslant \frac{\sin t}{(2p+1)\left(\cos\frac{t}{2p+1}\right)^{2p+1}\tan\left(\frac{t}{2p+1}\right)} \quad (\circ)$$

$$\frac{\sin t}{(2p+1)\sin\frac{t}{2p+1}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\sin t}{(2p+1)\frac{t}{2p+1}} = \frac{\sin t}{t}\ ;\ \lim_{p\to+\infty}\frac{\sin t}{(2p+1)\sin\frac{t}{2p+1}} = \frac{\sin t}{t}. \quad (\circ\circ)$$

$$\tan x \underset{0}{\sim} x$$

$$\frac{\sin t}{(2p+1)\left(\cos\frac{t}{2p+1}\right)^{2p+1}\tan\frac{t}{2p+1}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\sin t}{(2p+1)\left(\cos\frac{t}{2p+1}\right)^{2p+1}\frac{t}{2p+1}} = \frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{\left(\cos\frac{t}{2p+1}\right)^{2p+1}}$$

$$\left(\cos\frac{t}{2p+1}\right)^{2p+1} = e^{(2p+1)\ln\left(\cos\frac{t}{2p+1}\right)}.$$

$$(2p+1)\ln\left(\cos\frac{t}{2p+1}\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} (2p+1)\left(\cos\left(\frac{t}{2p+1}\right)-1\right) \underset{p\to+\infty}{\sim} (2p+1)\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2p+1}\right)^2\right] = -\frac{1}{2}\frac{t^2}{2p+1}.$$

Alors $\lim\limits_{p\to+\infty}\left((2p+1)\ln\left(\cos\frac{t}{2p+1}\right)\right)=0$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\cos\frac{t}{2p+1}\right)^{2p+1}=1.$

Finalement $\dfrac{\sin t}{(2p+1)\left(\cos\frac{t}{2p+1}\right)^{2p+1}\tan\frac{t}{2p+1}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sin t}{t}\ ;\ \lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{\sin t}{(2p+1)\left(\cos\frac{t}{2p+1}\right)^{2p+1}\tan\frac{t}{2p+1}} = \dfrac{\sin t}{t} \quad (\circ\circ\circ)$

$(\circ)$, $(\circ\circ)$ et $(\circ\circ\circ)$ donnent par encadrement $\lim\limits_{p\to+\infty}\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1-\frac{t^2}{k^2\pi^2}\right)=\frac{\sin t}{t}$ ... et $\frac{\sin t}{t}\neq 0$.

Ainsi $\forall t\in\,]0,\pi[,\ \prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)=\frac{\sin t}{t}$.

c) Soit $t\in\,]-\pi,0[$. $-t\in\,]0,\pi[$ donc $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{(-t)^2}{n^2}\right)=\frac{\sin(-t)}{-t}$

ce qui s'écrit encore $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)=\frac{\sin(t)}{t}$.

Alors $\forall t\in\,]-\pi,\pi[-\{0\},\ \prod\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)=\frac{\sin t}{t}$.

posons $\forall t \in]-\pi,\pi[$, $s(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

$$\forall t \in]-\pi,\pi[-\{0\},\ \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\right) = s(t)$$

$$\lim_{q\to+\infty}\prod_{n=1}^{q}\left(1-\frac{0^2}{n^2\pi^2}\right) = 1 \ ; \ \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{0^2}{n^2\pi^2}\right) = 1 = s(1).$$

$\forall t \in]-\pi,\pi[$, $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2\pi^2}\right) = s(t).$ avec $\forall t \in]-\pi,\pi[$, $s(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

d) Soit $x \in]-1,1[-\{0\}$. $\pi x \in]-\pi,\pi[-\{0\}$.

Alors $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\pi^2x^2}{n^2\pi^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

$$\forall x \in]-1,1[-\{0\},\ \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

PARTIE III Généralités

Q1 a) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$. Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$.

$\forall p \in \mathbb{N}, \prod_{n=0}^{p} a_n = \prod_{n=0}^{p} \frac{n+2}{n+1} = \frac{\prod_{n=0}^{p}(n+2)}{\prod_{n=0}^{p}(n+1)} = \frac{\prod_{n=1}^{p+1}(n+1)}{\prod_{n=0}^{p}(n+1)} = p+2$. $\lim_{p\to+\infty} \prod_{n=0}^{p} a_n = +\infty$.

Le produit infini de terme général $a_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ est divergent.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1 + \frac{1}{(2n+1)(n+2)} = \frac{2n^2+5n+2+1}{(2n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(2n+3)}{(2n+1)(n+2)}$; $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$.

$\forall p \in \mathbb{N}, \prod_{n=0}^{p} a_n = \frac{\prod_{n=0}^{p}(n+1) \prod_{n=0}^{p}(2n+3)}{\prod_{n=0}^{p}(n+2)\prod_{n=0}^{p}(2n+1)} = \frac{\prod_{n=0}^{p}(n+1)}{\prod_{n=1}^{p+1}(n+1)} \times \frac{\prod_{n=1}^{p+1}(2n+1)}{\prod_{n=0}^{p}(2n+1)} = \frac{1}{p+2} \times (2p+3)$.

$\lim_{p\to+\infty} \prod_{n=0}^{p} a_n = \lim_{p\to+\infty} \frac{2p+3}{p+2} = 2$.

Le produit infini de terme général $a_n = 1 + \frac{1}{(2n+1)(n+2)}$ converge et $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n = 2$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = e^{\frac{1}{n+1}} \neq 0$. $\forall p \in \mathbb{N}, \prod_{n=0}^{p} a_n = \prod_{n=0}^{p} e^{\frac{1}{n+1}} = e^{\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n+1}}$.

La série de terme général $\frac{1}{n+1}$ diverge et elle est à termes positifs donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n+1} = +\infty$

Alors $\lim_{p\to+\infty} \prod_{n=0}^{p} a_n = +\infty$.

Le produit infini de terme général $a_n = e^{\frac{1}{n+1}}$ diverge.

d) $P_0 = a_0 = 1+x$; $P_1 = a_0 a_1 = (1+x)(1+x^2) = 1+x+x^2+x^3 = \sum_{k=0}^{3} x^k$

$P_2 = a_0 a_1 a_2 = P_1 a_2 = (1+x+x^2+x^3)(1+x^4) = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7 = \sum_{k=0}^{7} x^k$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k$

→ L'égalité est vraie pour $n=0$.

→ Supposons l'égalité vraie pour n élément de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$P_{n+1} = P_n a_{n+1} = \left(\sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} x^l\right)(1 + x^{2^{n+1}}) = \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} x^l + \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} x^{l+2^{n+1}}$$

$$P_{n+1} = \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} x^l + \sum_{i=2^{n+1}}^{2^{n+1}+2^{n+1}-1} x^i = \sum_{l=0}^{2\cdot 2^{n+1}-1} x^l = \sum_{l=0}^{2^{n+2}-1} x^l .$$ Ceci achève la récurrence.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{l=0}^{2^{n+1}-1} x^l = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{2^{n+1}}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ 2^{n+1} & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

Si $x = 1$: $\lim_{n \to +\infty} P_n = +\infty$

Si $|x| > 1$: $\lim_{n\to+\infty} P_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } x > 1 \\ -\infty & \text{si } x < -1 \end{cases}$ (ne pas oublier que 2^{n+1} est pair et qu'ainsi $\lim_{n\to+\infty} x^{2^{n+1}} = +\infty$).

Si $|x| < 1$: $\lim_{n\to+\infty} P_n = \dfrac{1}{1-x}$ car $\lim_{n\to+\infty} x^{2^{n+1}} = 0$.

Finalement le produit infini de terme général $a_n = 1 + x^{2^n}$ converge si et seulement si $|x| < 1$.

Si $|x| < 1$ $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + x^{2^n}) = \dfrac{1}{1-x}$.

(Q2) Supposons que le produit de terme général a_n converge.

Posons $L = \prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n$; $L \neq 0$ et $L = \lim_{n\to+\infty} \prod_{l=n_0}^{n} a_l$. $\lim_{n\to+\infty} P_n = L \neq 0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{P_n}{P_{n-1}} = \dfrac{L}{L} = 1$; ce qui s'écrit encore $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$

Ainsi si le produit infini de terme général a_n converge : $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Q1 c) montre que la réciproque est fausse ; le produit infini de terme général $a_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ diverge mais $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$... même chose pour Q 1 c).

Q3 (P) signifie : $\exists p\in [\![n_0,+\infty[\![, \forall n\in[\![p,+\infty[\![, \ a_n>0$.

Supposons que le produit infini de terme général a_n converge. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists p\in[\![n_0,+\infty[\![, \forall n\in[\![p,+\infty[\![, \ n\geqslant p \Rightarrow |a_n-1|<\varepsilon$.

Pour $\varepsilon=1/2$. $\exists p\in[\![n_0,+\infty[\![, \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![, \ n\geqslant p\Rightarrow |a_n-1|<\frac{1}{2}$.

Alors $\forall n\in[\![p,+\infty[\![, -\frac{1}{2}<a_n-1<\frac{1}{2}$; $\forall n\in[\![p,+\infty[\![, \ a_n>\frac{1}{2}$; $\forall n\in[\![p,+\infty[\![, a_n>0$.

Alors (P) est vérifiée.

Si le produit infini de terme général a_n converge, (P) est vérifiée.

Alors si (P) n'est pas vérifiée le produit infini de terme général a_n diverge.

Q4 • Supposons que le produit infini de terme général a_n converge.

$\exists L\in\mathbb{R}^*, \ \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=n_0}^{n} a_k = L$. $\forall k\in[\![n_0,+\infty[\![, \ a_k>0$ donc $L\geqslant 0$. Mais

comme L n'est pas nul : $L>0$.

Dans ces conditions : $\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=n_0}^{n} a_k = L$ donne $\lim_{n\to+\infty}\ln\prod_{k=n_0}^{n} a_k=\ln L$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n_0}^{n}\ln a_k = L$; la série de terme général $\ln a_n$ converge.

• Réciproquement supposons que la série de terme général $\ln a_n$ converge.

Alors il existe un réel S tel que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n_0}^{n}\ln a_k = S$; $S=\sum_{k=n_0}^{+\infty}\ln a_k$!!

Alors $e^S=\lim_{n\to+\infty} e^{\sum_{k=n_0}^{n}\ln a_k}=\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=n_0}^{n}a_k\right)$. Comme e^S n'est pas nul le produit infini de terme général converge et $\prod_{k=n_0}^{+\infty}a_k = e^S = e^{\sum_{k=n_0}^{+\infty}\ln a_k}$.

Ceci suffit pour dire que : le produit infini de terme général a_n converge si et seulement si la série de terme général $\ln a_n$ converge. Et en cas de convergence : $\prod_{n=n_0}^{+\infty}a_n = e^{\sum_{n=n_0}^{+\infty}\ln a_n}$.

Q5 Ici $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $a_n = 1+u_n$ et $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $u_n \geqslant 0$.

cela revient à supposer que $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $a_n \geqslant 1$.

a) • Supposons que le produit infini de terme général a_n converge.

Alors la série de terme général $\ln a_n = \ln(1+u_n)$ converge.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$

→ $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $u_n \geqslant 0$

→ $\ln(1+u_n) \sim u_n$

→ la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge

Ainsi la série de terme général u_n converge.

• Réciproquement supposons que la série de terme général u_n converge.

En particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Alors $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $u_n \geqslant 0$, $\ln(1+u_n) \sim u_n$ et la série de terme général u_n converge. Ainsi la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge.

Alors le produit infini de terme général a_n converge.

Finalement le produit infini de terme général $a_n = 1+u_n$ converge si et seulement si la série de terme général u_n converge ... dans le cas où $u_n \geqslant 0$ pour tout n dans $[\![n_0,+\infty[\![$.

b) Rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+1 \leqslant e^x$ (inégalité classique de convexité).

Alors $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $\prod\limits_{k=n_0}^{n} a_k = \prod\limits_{k=n_0}^{n}(1+u_k) \underset{(1+u_k \geqslant 0 ...)}{\leqslant} \prod\limits_{k=n_0}^{n} e^{u_k} = e^{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\dots+u_n}$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $1+\sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \prod\limits_{k=n_0}^{n} a_k$.

→ C'est clair pour $n=n_0$

→ Supposons la propriété vraie pour $n \in [\![n_0,+\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

$$\prod_{\ell=n_0}^{n+1} a_\ell = a_{n+1} \prod_{\ell=n_0}^{n} a_\ell \underset{\substack{\uparrow \\ \text{H.R. et } a_{n+1} \geq 0}}{\geq} a_{n+1}\left(1 + \sum_{\ell=n_0}^{n} u_\ell\right) = (1+u_{n+1})\left(1+\sum_{\ell=n_0}^{n} u_\ell\right).$$

$$\prod_{\ell=n_0}^{n+1} a_\ell \geq 1 + \sum_{\ell=n_0}^{n} u_\ell + u_{n+1} + \underbrace{u_{n+1} \sum_{\ell=n_0}^{n} u_\ell}_{\geq 0} \geq 1 + \sum_{\ell=n_0}^{n+1} u_\ell$$. ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ 1 + u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n \leq \prod_{\ell=n_0}^{n} a_\ell \leq e^{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n}.}$$

ceci montre que si la suite $\left(\sum_{\ell=n_0}^{n} u_\ell\right)_{n \geq n_0}$ est majorée par M, la suite $\left(\prod_{\ell=n_0}^{n} a_\ell\right)_{n \geq n_0}$ est majorée par e^M; et que si la suite $\left(\prod_{\ell=n_0}^{n} a_\ell\right)_{n \geq n_0}$ est majorée par C, la suite $\left(\sum_{\ell=n_0}^{n} a_\ell\right)_{n \geq n_0}$ est majorée par $C-1$.

Ainsi $\left(\sum_{\ell=n_0}^{n} u_\ell\right)_{n \geq n_0}$ majorée $\Leftrightarrow$ $\left(\prod_{\ell=n_0}^{n} a_\ell\right)_{n \geq n_0}$ majorée.

notons que ces deux suites sont croissantes car $\forall \ell \in [\![n_0, +\infty [\![$, $u_\ell \geq 0$ et $a_\ell \geq 1$.

Alors $\left(\sum_{\ell=n_0}^{n} u_\ell\right)_{n \geq n_0}$ converge $\Leftrightarrow$ $\left(\prod_{\ell=n_0}^{n} a_\ell\right)_{n \geq n_0}$ converge.

La suite croissante $\left(\prod_{\ell=n_0}^{n} a_\ell\right)_{n \geq n_0}$ ne peut converger vers 0 ($\forall \ell \in [\![n_0, +\infty [\![, a_\ell \geq 1$).

On retrouve alors que le produit infini de terme général a_n converge si et seulement si la série de terme général u_n converge.

Q6 $\ln(1+x) - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$; $\ln(1+u_n) - u_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$ ($\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$).

Alors $-(\ln(1+u_n) - u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$, $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $\frac{u_n^2}{2} \geq 0$ et la série de terme général $\frac{u_n^2}{2}$ converge donc la série de terme général $-(\ln(1+u_n) - u_n)$ converge.

Finalement la série de terme général $\ln(1+u_n) - u_n$ converge.

Il résulte de cela que les séries de termes généraux $\ln(1+u_n)$ et u_n sont de même nature.

Or le produit infini de terme général a_n converge si la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge.

Ainsi, si la série de terme général u_n^2 converge : le produit infini de terme général $a_n = 1+u_n$ converge si et seulement si la série de terme général u_n converge.

Q7 Supposons la série de terme général u_n absolument convergente.

Alors $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$; $\exists p \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $|u_n| \leq 1$.

Alors $\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $0 \leq u_n^2 \leq |u_n|$. La convergence de la série de terme général $|u_n|$ donne alors la convergence de la série de terme général u_n^2.

D'après Q6, le produit infini de terme général $a_n = 1+u_n$ est de même nature que la série de terme général u_n.

Cette série étant ici absolument convergente et convergente ; le produit infini de terme général a_n converge.

Si la série de terme général u_n est absolument convergente alors le produit infini de terme général $a_n = 1+u_n$ converge.

Q8 a) La suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers 0 car $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Le rappel montre alors que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| = \frac{1}{n^\alpha}$; la série de terme général $|u_n|$ converge si $\alpha > 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 = \frac{1}{n^{2\alpha}}$; la série de terme général u_n^2 converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.

b) Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 + u_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} > 0$.

• 1er cas... $\alpha > \frac{1}{2}$. La série de terme général u_n^2 converge.

Alors le produit infini de terme général $a_n = 1+u_n$ est de même nature que la série de terme général u_n qui est convergente. Le produit infini de terme général a_n est donc convergent.

• 2e cas... $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Le produit infini de terme général $a_n = 1+u_n$ est de même nature que la série de terme général $\ln(1+u_n)$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\ln(1+u_n) - u_n \sim -\frac{1}{2} u_n^2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{n^{2\alpha}}$.

$-(\ln(1+u_n) - u_n) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2\alpha}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} \frac{1}{n^{2\alpha}} \geq 0$; la série de terme général $\frac{1}{2} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ diverge $(2\alpha \leq 1)$.

Alors la série de terme général $-(\ln(1+u_n) - u_n)$ diverge.

La série de terme général $\ln(1+u_n) - u_n$ diverge également.

Comme la série de terme général u_n converge, la série de terme général $\ln(1+u_n)$ diverge. Ainsi le produit infini de terme général $a_n = 1+u_n$ diverge.

Finalement le produit infini de terme général $a_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Remarque... Pour $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$ la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente mais le produit infini de terme général $a_n = 1+u_n$ converge.