Dans tout le problème φ est l'application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(0)=0$ et $\forall x\in]0,+\infty[,\ \varphi(x)=x\ln x$.

PARTIE I

X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega,\mathcal{B},P)$ à valeurs dans un ensemble fini S de cardinal s.

On pose $S_X=\{a\in S \mid P(X=a)\neq 0\}$ et $S_Y=\{a\in S \mid P(Y=a)\neq 0\}$.

On dit que Y est **vraisemblable** pour X s'il existe une application L de S dans $[0,+\infty[$, appelée **vraisemblance** de Y pour X, telle que :

$$\forall a\in S,\ P(Y=a)=L(a)\,P(X=a) \text{ et } \forall a\in S,\ P(X=a)=0\Rightarrow L(a)=0. \quad (*)$$

Si Y est vraisemblable pour X de vraisemblance L, on appelle **entropie relative** de Y pour X la quantité :

$$K(X,Y)=\sum_{a\in S}\varphi\big(L(a)\big)\,P(X=a)=E\left[\varphi\big(L(X)\big)\right].$$

On appelle **entropie** de X la quantité :

$$H(X)=-\sum_{a\in S}\varphi\big(P(X=a)\big).$$

Q0 a) Montrer que si Y est vraisemblable pour X l'application L de $(*)$ est unique.

b) Montrer que Y est vraisemblable pour X si et seulement si $S_Y\subset S_X$.

Q1 a) Soit t un réel strictement positif. Montrer que $\ln t\leqslant t-1$. Quand y a-t-il égalité ?

b) Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que $\ln x-\ln y\leqslant \dfrac{x}{y}-1$. Quand y a-t-il égalité ?

c) Soit x un réel positif. Montrer que $\varphi(x)+1-x\geqslant 0$. Quand y a-t-il égalité ?

Q2 a) Quel est le signe de $H(X)$?

b) Calculer $H(X)$ lorsque X suit une loi uniforme sur S.

Q3 On suppose que Y est vraisemblable pour X de vraisemblance L.

a) Montrer que : $K(X,Y)=\displaystyle\sum_{a\in S_Y}\Big[\ln\big(P(Y=a)\big)-\ln\big(P(X=a)\big)\Big]\,P(Y=a)$.

b) Montrer que $K(X,Y)$ est positif ou nul (on pourra utiliser Q1).

c) Montrer soigneusement que $K(X,Y)$ est nul si et seulement si X et Y suivent la même loi.

Q4 On suppose que X suit une loi uniforme sur S.

Montrer que Y est vraisemblable pour X et que $K(X,Y)=H(X)-H(Y)$. En déduire une majoration de $H(Y)$.

Q5 On suppose que Y est vraisemblable pour X de vraisemblance L.

a) u est une application de S dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que :

$$E\Big[L(X)\,\ln\big(u(X)\big)-\varphi\big(L(X)\big)\Big]\leqslant E\big[u(X)\big]-1$$

(on pourra s'inspirer de Q3 et commencer par se ramener à une somme indexée par S_Y).

Quand y a-t-il égalité ?

b) v est une application de S dans $\mathbb{R}$. Déduire de ce qui précède que :

$$E\big[v(Y)\big] - E\big[e^{v(X)}\big] + 1 \leqslant K(X,Y)$$

Quand y a-t-il égalité ?

c) v est encore une application de S dans $\mathbb{R}$. Pour tout λ dans $\mathbb{R}$ on pose : $v_\lambda = v + \lambda$.

Montrer que $h : \lambda \to E\big[v_\lambda(Y)\big] - E\big[e^{v_\lambda(X)}\big]$ possède un maximum sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

Déduire de ce qui précède que :

$$E\big[v(Y)\big] - \ln\Big(E\big[e^{v(X)}\big]\Big) \leqslant K(X,Y).$$

Quand y a-t-il égalité ?

$\boxed{\textbf{Q6}}$ Dans cette question $S = S_1 \times S_2$, $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$.

a) Ici (seulement) $S_1 = \{1,2\}$ et $S_2 = \{1,2,3\}$ et la loi de X est la suivante :

$$\forall j \in \{1,2,3\},\ P\big(X = (1,j)\big) = \frac{1}{6}, P\big(X = (2,3)\big) = \frac{1}{2} \text{ et } \forall j \in \{1,2\},\ P\big(X = (2,j)\big) = 0.$$

Trouver les lois de X_1 et X_2. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Montrer que si Y est vraisemblable pour X, les variables aléatoires Y_1 et Y_2 ne peuvent pas suivre toutes les deux une loi uniforme (sur S_1 et S_2...).

b) On suppose que X suit une loi uniforme sur S. Trouver les lois de X_1 et X_2. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Montrer que Y est vraisemblable pour X, puis que :

$$K(X,Y) \geqslant K(X_1,Y_1) + K(X_2,Y_2).$$

(on pourra utiliser Q5 c) avec $v(a_1,a_2) = v_1(a_1) + v_2(a_2)$ pour un choix judicieux de v_1 et v_2).

En déduire que $H(Y) \leqslant H(Y_1) + H(Y_2)$ avec égalité lorsque Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

PARTIE II

Dans cette partie $S = \mathbb{N}$, donc n'est plus fini. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$).

n est un élément de $\mathbb{N}$, et Y est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.

Comme $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) \neq 0$, Y est vraisemblable pour X (au sens de la première partie) et sa vraisemblance L vérifie :

$$\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ L(k) = 0.$$

On peut donc encore définir l'entropie relative de Y pour X par :

$$K(X,Y) = \sum_{k=0}^{n} \varphi\big(L(k)\big)\, P(X = k) = E\left[\varphi\big(L(X)\big)\right]$$

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Dans cette question pour n dans $\mathbb{N}^*$ et $n > \lambda$, Y_n suit une loi binômiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$, et on note L_n sa vraisemblance pour X.

a) Montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ L_n(k+1) = \dfrac{n-k}{n-\lambda}\, L_n(k)$.

En déduire que :

$$K(X,Y_n)=\ln\big(L_n(0)\big)+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=0}^{k-1}\ln\left(\frac{1-(i/n)}{1-(\lambda/n)}\right)\right)P(Y_n=k)\right]$$

b) Déterminer $L_n(0)$. Montrer alors que :

$$K(X,Y_n)\leqslant\lambda+(n-\lambda)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right).$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}K(X,Y_n)=0$.

Q2 On pose $d(X,Y)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\Big|P(X=k)-P(Y=k)\Big|$.

a) Vérifier que $d(X,Y)$ est bien défini et que $d(X,Y)=E\big[|L(X)-1|\big]$.

b) On pose : $\forall x\in[0,+\infty[,\ \psi(x)=(\varphi(x)+1-x)(4+2x)-3(x-1)^2$.

Montrer que ψ est continue sur $[0,+\infty[$ et deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. Calculer $\psi'(x)$ et $\psi''(x)$ pour tout élément x de $]0,+\infty[$.

Montrer que $\forall x\in[0,+\infty[,\ \psi(x)\geqslant0$. Quand y a-t-il égalité ?

c) Déduire de ce qui précède que $d(X,Y)\leqslant\sqrt{2\,K(X,Y)}$ (on pourra utiliser Cauchy-Schwarz).

Q3 Montrer à l'aide de Q1 et Q2 que :

$$\lim_{n\to+\infty}d(Y_n,X)=0.$$

Qu'en déduire pour la suite (Y_n) ?

PARTIE III

Ici X et Y sont deux variables aléatoires à densité de densités f_X et f_Y. On suppose que f_X et f_Y sont strictement positives et continues sur $\mathbb{R}$.

La vraisemblance de Y pour X est alors définie par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ L(t)=\frac{f_Y(t)}{f_X(t)}.$$

L'entropie relative de Y pour X est définie par :

$$K(X,Y)=E\left[\varphi\big(L(X)\big)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\big(L(t)\big)\,f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

lorsque cette intégrale est absolument convergente.

Q0 Pour tout réel θ strictement positif montrer que $f_\theta:t\to\theta\,e^{-2\theta\,|t|}$ est une densité de probabilité.

Q1 Pour tout réel θ strictement positif on considère une variable aléatoire X_θ de densité f_θ.

a) Calculer $K(\theta,\theta')=K(X_\theta,X_{\theta'})$ lorsque θ et θ' sont deux réels strictement positifs.

b) Calculer $\lim\limits_{\theta'\to\theta}\dfrac{K(\theta,\theta')}{(\theta-\theta')^2}$ pour tout réel strictement positif θ.

c) On considère $f:(\theta,t)\to\theta\,e^{-2\theta\,|t|}$. g est le quotient de $\dfrac{\partial f}{\partial\theta}$ par f

Pour θ strictement positif calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big(g(\theta,t)\big)^2\,f_\theta(t)\,\mathrm{d}t$.

Comparer avec b).

Q2 Reprendre Q1 en supposant que pour X_θ suit une loi normale centrée de variance θ.
