Dans tout ce problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$.

On rappelle qu'une permutation de $[\![1,n]\!]$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même. Par ailleurs, on note

• $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$;

• $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;

• $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes, q colonnes à coefficients réels ;

• $m_{i,j}$ l'élément générique d'une matrice M, c'est-à-dire le réel situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de M ;

• ${}^tM$ la transposée d'une matrice M.

Lorsque σ appartient à $\mathfrak{S}_n$, on appelle matrice de la permutation σ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée P_σ dont le terme générique $p_{i,j}$ vérifie : $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ p_{i,j}=1$ si $\sigma(i)=j$ et $p_{i,j}=0$ sinon.

Par exemple, pour $n=3$ et $\sigma\in\mathfrak{S}_3$ définie par $\sigma(1)=2,\ \sigma(2)=3,\ \sigma(3)=1,\ P_\sigma=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

E_n est l'ensemble des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante :

$\forall i\in[\![1,n]\!],\ \forall j\in[\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^n m_{i,k}=\sum_{k=1}^n m_{k,j}$.

Dans ce cas, la valeur commune de ces sommes sera notée $\omega(M)$. E_n^+ est l'ensemble des matrices de E_n dont les coefficients sont positifs ou nuls.

PARTIE I : Quelques généralités sur les matrices de permutation.

Q1 Montrer que le nombre de matrices de permutation de $[\![1,n]\!]$ est $n!$.

Q2 σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$. Montrer que P_σ est une matrice orthogonale.

Q3 Écrire la matrice P_φ correspondant à la permutation φ de $[\![1,n]\!]$ définie par :

$$\forall i\in[\![1,n-1]\!],\quad \varphi(i)=i+1 \text{ et } \varphi(n)=1.$$

Déterminer les matrices : $(P_\varphi)^2$ et $(P_\varphi)^3$, puis donner $(P_\varphi)^k$ pour tout k dans $[\![1,n]\!]$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^n P_\varphi^k$.

Q3 *Même chose par le chemin des écoliers...* Écrire la matrice P_φ correspondant à la permutation φ de $[\![1,n]\!]$ définie par :

$$\forall k\in[\![1,n-1]\!],\quad \varphi(k)=k+1 \text{ et } \varphi(n)=1.$$

a) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de P_φ considérée comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \lambda_k=e^{i\,\frac{k\,2\pi}{n}}$. Q est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont l'élément situé à l'intersection de la $k^{\text{ème}}$ ligne et la $\ell^{\text{ème}}$ colonne est λ_ℓ^k.

Montrer que $Q\overline{Q}=n\,I_n$ et que $Q^{-1}P_\varphi Q=\mathrm{Diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$.

c) Montrer que $Q^{-1}\left(\displaystyle\sum_{r=1}^n P_\varphi^r\right)Q=\mathrm{Diag}(0,0,\dots,0,n)$. En déduire $\displaystyle\sum_{r=1}^n P_\varphi^r$.

Q4 a) σ et σ' sont deux permutations de $[\![1,n]\!]$. Montrer que $P_\sigma\,P_{\sigma'}=P_{\sigma'\circ\sigma}$.

b) P est une matrice d'une permutation de $[\![1,n]\!]$. Montrer que pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, P^k est encore une matrice d'une permutation de $[\![1,n]\!]$.

c) P est une matrice d'une permutation de $[\![1,n]\!]$. Montrer que l'on peut trouver deux élémenst distincts q et q' de $\mathbb{N}$ tels que $P^q = P^{q'}$ (on pourra utiliser $Q1$). En déduire qu'il existe un élément r de $\mathbb{N}^*$ tel que $P^r = I_n$.

Q5 $\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec tous les matrices des permutations de $[\![1,n]\!]$.

a) Soit $B = (b_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et σ une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Montrer que : $BP_\sigma = P_\sigma B$ si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ b_{i,\sigma^{-1}(j)} = b_{\sigma(i),j}$.

b) α et β sont deux réels. On considère la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$M(\alpha,\beta) = (m_{i,j})$ avec $m_{i,j} = \alpha$ si $i = j$ et β sinon.

Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est dans $\mathcal{L}$.

c) Réciproquement, montrer que si B est dans $\mathcal{L}$, il existe deux réels α et β tels que $B = M(\alpha,\beta)$.

PARTIE II : Etude de l'ensemble $\mathbf{E_n}$.

On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et U la matrice colonne à n lignes égale à $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q1 a) Montrer que E_n est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'application $\omega\ :\ E_n \to \mathbb{R}\quad M \mapsto \omega(M)$ en est une forme linéaire.

Montrer que le noyau de ω et la droite vectorielle engendrée par J sont supplémentaires dans E_n.

b) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Établir que : M appartient à E_n si et seulement si U est vecteur propre commun à M et ${}^tM$ associé à une même valeur propre.

c) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Établir que : M appartient à E_n si et seulement si M commute avec J.

d) Vérifier alors que E_n est stable pour le produit matriciel et préciser $\omega(MN)$ en fonction de $\omega(M)$ et $\omega(N)$ lorsque M et N appartiennent à E_n.

On se propose dans la suite de cette partie de montrer qu'il existe une base de E_n constituée de matrices de permutation.

Q2 Pour $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$, on note $A_{r,s}$ la matrice de E_n d'élément générique $a_{i,j}^{r,s}$, telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j}^{r,s} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (1,1) \text{ ou } (i,j) = (r,s) \\ -1 & \text{si } (i,j) = (1,s) \text{ ou } (i,j) = (r,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi si (i,j) appartient à $[\![1,n]\!]^2$, $E_{i,j}$ est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Si (r,s) est un élément de $[\![2,n]\!]$, exprimer $A_{r,s}$ en fonction de $E_{1,1}$, $E_{r,s}$, $E_{1,s}$ et $E_{r,1}$.

Soit $(\lambda_{r,s})_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2}$ une famille de réels. Montrer que :

$$\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} \lambda_{r,s}\, A_{r,s} = \left(\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} \lambda_{r,s}\right) E_{1,1} + \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} \lambda_{r,s}\, E_{r,s} - \sum_{s=2}^{n}\left(\sum_{r=2}^{n} \lambda_{r,s}\right) E_{1,s} - \sum_{r=2}^{n}\left(\sum_{s=2}^{n} \lambda_{r,s}\right) E_{r,1}.$$

b) Montrer alors que $(A_{r,s})_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2}$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}\omega$.

c) Soit $M = (m_{i,j})$ un élément de $\operatorname{Ker} w$. On pose $\forall (r,s) \in [\![2,n]\!]^2,\ \lambda_{r,s} = m_{r,s}$. Vérifier que $M = \sum\limits_{r=2}^{n} \sum\limits_{s=2}^{n} \lambda_{r,s}\, A_{r,s}$

d) Déterminer la dimension de $\operatorname{Ker} w$ puis celle de E_n.

Q3 a) Établir que pour toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$, la matrice P_σ appartient à E_n

Montrer que les matrices des permutations de $[\![1,n]\!]$ sont les seules matrices M de E_n telles que $\omega(M) = 1$ n'admettant qu'un seul élément non nul par ligne et par colonne.

b) Montrer que J est somme de matrices de permutations de $[\![1,n]\!]$.

c) Soit (r,s) un élément de $[\![2,n]\!]^2$. Montrer qu'il existe deux permutations τ_1 et τ_2 de $[\![1,n]\!]$ telles que :

$\tau_1(1) = 1,\ \tau_1(r) = s,\ \tau_2(1) = s,\ \tau_2(r) = 1$ et $\forall k \in [\![1,n]\!] - \{1,r\},\ \tau_1(k) = \tau_2(k)$.

Exprimer alors $A_{r,s}$ comme combinaison linéaire de matrices de permutations de $[\![1,n]\!]$.

d) Que dire de la famille $(P_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ pour E_n ?

Prouver qu'il existe $(n-1)^2+1$ permutations $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{(n-1)^2+1}$ de $[\![1,n]\!]$ telles que $(P_{\sigma_1},\ P_{\sigma_2}, \ldots, P_{\sigma_{(n-1)^2+1}})$ soit une base de E_n.

Que représente la somme des composantes d'une matrice M de E_n relativement à cette base ?

PARTIE III Etude de l'ensemble $\mathbf{E_n^+}$.

Q1 a) Montrer qu'une matrice de E_n^+ possédant au moins $n^2 - n + 1$ coefficients nuls est nulle.

b) Montrer que E_n^+ est stable pour le produit matriciel et que pour toute famille $(\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots, \sigma_p)$ de permutations de $[\![1,n]\!]$ et toute famille $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ de réels positifs ou nuls, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k P_{\sigma_k} \in E_n^+$.

Dans la suite de cette partie on admet le résultat suivant dont la démonstration sera l'objet de la partie **facultative !** **IV** : pour toute matrice non nulle $M = (m_{i,j})$ de E_n^+, il existe une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ telle que : $m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \ldots m_{n,\sigma(n)} > 0$.

Q2 a) M est une matrice non nulle de E_n^+. σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que $m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \ldots m_{n,\sigma(n)} > 0$.

On pose : $c = \operatorname{Min}\{m_{1,\sigma(1)}, m_{2,\sigma(2)}, \ldots, m_{n,\sigma(n)}\}$.

Montrer que $M - cP_\sigma$ est une matrice de E_n^+ dont le nombre de coefficients nuls est strictement inférieur au nombre de coefficients nuls de M.

b) En déduire que pour toute matrice non nulle M de E_n^+ il existe, un élément p de $[\![1, n^2 - n + 1]\!]$, p permutations $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ de $[\![1,n]\!]$ et p réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ strictement positifs tels que : $M = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k P_{\sigma_k}$.

c) Exemple : lorsque $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, exprimer M comme combinaison linéaire à scalaires strictement positifs de matrices de permutations de $[\![1,3]\!]$.

Q3 <u>Une application</u> : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et on note $< x, y >$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$.

On désigne par $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$.

a) Donner, pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, les coordonnées de u_i dans la base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Vérifier que la matrice $M_{u,v} = \big((< v_i, u_j >)^2\big)$ appartient à E_n^+ et donner la valeur de $\omega(M_{u,v})$.

Lorsque σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$, préciser $M_{u,v}$ dans le cas où $(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(n)})$.

b) On introduit un endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$ tel que $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ soit une base de vecteurs propres de s respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n. On note Λ la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Jusitifier que s est symétrique. Montrer l'égalité matricielle : $\begin{pmatrix} < s(v_1), v_1 > \\ \vdots \\ < s(v_n), v_n > \end{pmatrix} = M_{u,v}\Lambda$.

b) En utilisant la question **III.2.b**, établir que pour toute forme linéaire f de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe deux permutations σ et σ' de $[\![1,n]\!]$ vérifiant : $f(P_\sigma\Lambda) \leqslant f(M_{u,v}\Lambda) \leqslant f(P_{\sigma'}\Lambda)$.

d) On suppose que : $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ et $r \in [\![1,n]\!]$.

Trouver une forme linéaire f permettant d'en déduire les inégalités :

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \leqslant \sum_{k=1}^{r} < s(v_k), v_k > \leqslant \sum_{k=1}^{r} \lambda_{n-r+k}$$

Que représente le terme $< s(v_k), v_k >$ dans la matrice de s relativement à la base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$? Pouvez- vous donner une interprétation matricielle des inégalités obtenues ci-dessus ?

La partie qui suit est facultative

PARTIE IV : Démonstration du résultat admis.

L'objet de cette dernière partie est la justification du résultat admis dans la partie **III.1**.

Lorsque $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle sous-matrice de type (p,q) de la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice extraite de M en supprimant de M $n-p$ lignes et $n-q$ colonnes.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ On suppose que M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'elle contient une sous-matrice nulle de type (p,q).

a) Montrer qu'il existe deux permutations σ et σ' de $[\![1,n]\!]$ telles que : $P_\sigma M P_{\sigma'} = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Z & Y \end{array}\right)$ avec $X \in \mathcal{M}_{p,n-q}(\mathbb{R})$, $Z \in \mathcal{M}_{n-p,n-q}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n-p,q}(\mathbb{R})$.

b) En déduire que si M est une matrice non nulle de E_n^+ on a $p+q \leqslant n$ (on pourra s'intéresser à la somme des coefficients de M).

$\boxed{\textbf{Q2}}$ On désire établir la propriété $(\mathcal{P}_n)$ suivante : si M appartient à $M_n(\mathbb{R})$ et vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_n)$: $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \ldots m_{n,\sigma(n)} = 0$, alors M contient au moins une sous-matrice nulle de type (p,q) avec $p+q = n+1$.

Notons que l'on peut implicitement définir $\mathcal{H}_n$ pour $n = 1$ et qu'alors, une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ vérifie $\mathcal{H}_1$ si et seulement si c'est la matrice nulle.

a) Le vérifier pour $n = 2$.

b) n étant supérieur ou égal à 3, on suppose que la propriété $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$.

On désigne par M une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant $(\mathcal{H}_n)$.

- Établir que M contient une sous-matrice de type $(n-1, n-1)$ vérifiant $(\mathcal{H}_{n-1})$.
- En déduire qu'il existe deux permutations τ et τ' de $[\![1,n]\!]$ et deux éléments p et q de $[\![1,n]\!]$ tels que : $p+q = n$ et

$P_\tau M P_{\tau'} = \left(\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Z & Y \end{array}\right)$ avec $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $Z \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

- Montrer que X vérifie $(\mathcal{H}_p)$ ou Y vérifie $(\mathcal{H}_q)$.
- En déduire alors que M contient une sous-matrice nulle de type (p', q') telle que $p' + q' = n + 1$ et conclure.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Montrer alors, à l'aide de 2) b) que pour toute matrice non nulle M de E_n^+, il existe une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ telle que : $m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \dots m_{n,\sigma(n)} > 0$.
