Dans tout ce qui suit n est un élément de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Les éléments de $\mathcal{S}_n$ sont donc les permutations de $[\![1,n]\!]$.

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ en est une base.

A toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$ on associe la matrice $P_\sigma=(p_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ p_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=\sigma(j)\\ 0 & \text{si } i\neq\sigma(j)\end{cases}$$

A toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$ on associe également l'endomorphisme f_σ de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est P_σ.

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation si l'on peut trouver un élément σ de $\mathcal{S}_n$ (nécessairement unique) tel que $A=P_\sigma$.

I QUELQUES EXEMPLES

Q1 Ici $n=3$. On pose $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est une matrice de permutation et trouver la permutation correspondante.

b) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\boxed{\mathbb{C}})$ et la diagonaliser.

Q2 Ici $n=4$. On pose $A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est une matrice de permutation et trouver la permutation correspondante.

b) Calculer A^2. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A (dans $\mathbb{R}$...).

Q3 Ici n vaut encore 4. On considère l'élément σ de $\mathcal{S}_4$ défini par : $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=4$ et $\sigma(4)=1$.

a) Ecrire la matrice P_σ.

b) Calculer P_σ^2 et P_σ^4.

c) Trouver les valeurs propres réelles de P_σ et les sous-espaces propres correspondant.

d) Montrer que P_σ est semblable à $M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ (... $f_\sigma^2(e'_3)=?$ $e'_4=?!$).

e) **Facultatif** Montrer que P_σ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la diagonaliser.

II UN PEU DE GÉNÉRALITÉS

$\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des matrices de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans Q0, Q2, Q3, Q4, Q5 et Q7, σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$. $P_\sigma=(p_{ij})$.

Q-1 Justifier le “(nécessairement unique)” de la dernière phrase de l'introduction.

Q0 Que dire de $P\sigma$ si σ est la permutation “identité” ? (on justifiera sa réponse)

Q1 Trouver le cardinal de $\mathcal{P}_n$.

Q2 a) Déterminer, pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$, $f_\sigma(e_j)$.

b) $A=(a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer AP_σ et préciser de quelle manière cette matrice se déduit de A.

Q3 σ' est une seconde permutation de $[\![1,n]\!]$. Montrer que $P_{\sigma'}P_\sigma = P_{\sigma'\circ\sigma}$ (on pourra utiliser Q2 a) ou le produit matriciel).

Q4 Déduire de ce qui précède que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$. Montrer que $P_\sigma^{-1} = {}^tP_\sigma$.

Q5 a) Montrer que pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, P_σ^k est une matrice de permutation.

b) En raisonnant par l'absurde et en repensant à Q1, montrer qu'il existe deux éléments distincts q et q' de $\mathbb{N}$ tels que $P_\sigma^q = P_\sigma^{q'}$.

c) En déduire qu'il existe un élément r de $\mathbb{N}^*$ tel que $P_\sigma^r = I_n$.

d) Montrer que toutes les valeurs propres (réelles ou complexes) de P_σ ont pour module 1.

e) Montrer que P_σ admet pour valeur propre 1.

Q6 $\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec **toutes les matrices de permutation** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Soit $B=(b_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et σ une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Montrer que : $BP_\sigma = P_\sigma B$ si et seulement si $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ b_{i\sigma(j)} = b_{\sigma^{-1}(i)j}$.

b) α et β sont deux réels. On considère la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$M(\alpha,\beta) = (m_{ij})$ avec $m_{ij} = \alpha$ si $i=j$ et β sinon.

Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est dans $\mathcal{L}$.

c) Réciproquement, montrer que si B est dans $\mathcal{L}$, il existe deux réels α et β tels que $B = M(\alpha,\beta)$.

Q7

a) Montrer que dans chaque colonne de P_σ, il y a un 1 et un seul les autres coefficients étant nuls.

b) Montrer que dans chaque ligne de P_σ, il y a un 1 et un seul les autres coefficients étant nuls.

c) Montrer que si P_σ n'est pas l'identité, la trace de P_σ est un élément de $[\![0,n-2]\!]$.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur σ pour que P_σ ait pour trace $n-2$.

e) Montrer que deux matrices de permutation de trace $n-2$ sont semblables.
