I QUELQUES EXEMPLES

Q1 a) Posons $A=(a_{ij})$. $a_{12}=a_{23}=a_{31}=1$ et $\forall (i,j)\in [\![1,3]\!]^3$, $a_{ij}=0$ si $(i,j)\notin \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$.

Posons $\sigma(1)=3$, $\sigma(2)=1$ et $\sigma(3)=2$.

σ est une bijection de $[\![1,3]\!]$ sur $[\![1,3]\!]$. et $\forall (i,j)\in [\![1,3]\!]^3$, $a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ si } i=\sigma(j)\\ 0 \text{ si } i\neq\sigma(j)\end{cases}$.

Ainsi $\sigma\in S_3$ et $A=P_\sigma$.

A est une matrice de permutation et la permutation σ correspondante est définie par : $\begin{cases}\sigma(1)=3\\ \sigma(2)=1\\ \sigma(3)=2\end{cases}$.

b) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Cherchons $\{X\in M_{3,1}(\mathbb{C})\mid AX=\lambda X\}$. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$AX=\lambda X \Leftrightarrow \begin{cases}y=\lambda x\\ z=\lambda y\\ x=\lambda z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\lambda x\\ z=\lambda^2 x\\ x=\lambda^3 x\end{cases}.$$

1er cas.. $\lambda^3\neq 1$. $AX=\lambda X \Leftrightarrow x=y=z=0 \Leftrightarrow X=0$. λ n'est pas valeur propre de A.

2e cas.. $\lambda^3=1$ $AX=\lambda X \Leftrightarrow y=\lambda x$ et $z=\lambda^2 x$.

Alors $\lambda\in Sp(A)$ et $SEP(A,\lambda)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\end{pmatrix}\right)$.

Notons que l'équation $\lambda\in\mathbb{C}$ et $\lambda^3=1$ admet trois solutions $1, j$ et j^2.

Ainsi $Sp_{\mathbb{C}}(A)=\{1,j,j^2\}$. $A\in M_3(\mathbb{C})$ et A admet trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$.

Ainsi A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

$\mathcal{B}_1=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,1)$, $\mathcal{B}_2=\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,j)$ et

$\mathcal{B}_3=\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j^4\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(A,j^2)$ et $M_{3,1}(\mathbb{C})=SEP(A,1)\oplus SEP(A,j)\oplus SEP(A,j^2)$.

Alors $\hat{\mathcal{B}}=$ "$\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\mathcal{B}_3$" est une base de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $1, j$ et j^2. Notons P la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ à $\hat{\mathcal{B}}$. Alors :

$P\in GL_3(\mathbb{C})$ et $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&j&0\\0&0&j^2\end{pmatrix}$. Remarque : $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}$ et $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix}$

Q2 a) Posons $A=(a_{ij})$. $\forall (i,j)\in [\![1,3]\!]^2$, $a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ si } (i,j)\in\{(3,1),(4,2),(1,3),(2,4)\}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

Posons $\sigma(1)=3, \sigma(2)=4, \sigma(3)=1$ et $\sigma(4)=2$.
σ est une bijection de $[\![1,4]\!]$ sur $[\![1,4]\!]$ et $\forall (i,j)\in[\![1,4]\!]^2$, $a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ si } i=\sigma(j)\\ 0 \text{ si } i\neq\sigma(j)\end{cases}$

Ainsi $\sigma\in S_4$ et $P_\sigma=A$.

A est une matrice de permutation et la permutation σ correspondante est définie par : $\begin{cases}\sigma(1)=3\\ \sigma(2)=4\\ \sigma(3)=1\\ \sigma(4)=2\end{cases}$

b) Un calcul simple donne $A^2=I_4$.

X^2-1 est un polynôme annulateur de A dont les zéros dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (!) sont $\{-1,1\}$.

Alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) \overset{?}{=} Sp_{\mathbb{C}}(A)\subset\{-1,1\}$. Reste à voir si -1 et 1 sont des valeurs propres de A.

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in M_{4,1}(\mathbb{R})$. $AX=X \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\t=y\\x=z\\y=t\end{cases} \Leftrightarrow x-z=0$ et $y-t=0$.

Ainsi $1\in Sp(A)$ et $SEP(A,1)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

$AX=-X \Leftrightarrow \begin{cases}z=-x\\t=-y\\x=-z\\y=-t\end{cases} \Leftrightarrow x+z=0$ et $y+t=0$. $-1\in Sp(A)$ et $SEP(A,-1)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$Sp_{\mathbb{R}}(A)=Sp_{\mathbb{C}}(A)=\{-1,1\}$; $SEP(A,1)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $SEP(A,-1)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Remarque.. ($\mathcal{B}_1=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{B}_2=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ sont clairement des familles libres de $M_{4,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $\mathcal{B}_1$ est une base de $SEP(A,1)$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de $SEP(A,-1)$.

Alors $\dim SEP(A,1)+\dim SEP(A,-1)=2+2=4$, A est diagonalisable.

Comme $SEP(A,1)\oplus SEP(A,-1)=M_{4,1}(\mathbb{R})$, $\widehat{\mathcal{B}}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ est une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée

de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $1, 1, -1, -1$.
Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ à $\hat{B}$.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Q3 a) $P_\sigma = (p_{ij})$. $\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{si } \sigma(j) \neq i \end{cases}$

$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$. $p_{21} = p_{32} = p_{43} = p_{14} = 1$ et

$\forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2 - \{(2,1),(3,2),(4,3),(1,4)\}$, $p_{ij} = 0$

Ainsi $$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$P_\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ et $P_\sigma^4 = I_4$. Notons que P_σ^2 est la matrice de Q2.

c) $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de P_σ dont les zéros dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) sont 1 et -1 (resp. $1, -1, i, -i$). $Sp_{\mathbb{R}}(P_\sigma) \subset \{-1, 1\}$ (resp. $Sp_{\mathbb{C}}(P_\sigma) \subset \{-1, 1, i, -i\}$).

Regardons si 1 et -1 sont des valeurs propres de P_σ. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$.

$P_\sigma X = X \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ x = y \\ y = z \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = t$. $1 \in Sp(P_\sigma)$ et $SEP(P_\sigma, 1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$P_\sigma X = -X \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x \\ x = -y \\ y = -z \\ z = -t \end{cases} \Leftrightarrow x = -y = z = -t$. $-1 \in Sp(P_\sigma)$ et $SEP(P_\sigma, -1) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

d) f_σ est l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est P_σ.

Pour montrer que P_σ est semblable à M il suffit de construire une base $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$ de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f_\sigma)=M$.

Analyse.. Supposons $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$ "solution"

$f_\sigma(e'_1)=e'_1$, $f_\sigma(e'_2)=-e'_2$, $f_\sigma(e'_3)=e'_4$ et $f_\sigma(e'_4)=-e'_3$.

Alors $e'_1\in SEP(f_\sigma,1)=\mathrm{Vect}(e_1+e_2+e_3+e_4)$ et $e'_2\in SEP(f_\sigma,-1)=\mathrm{Vect}(e_1-e_2+e_3-e_4)$.

Notons que $f_\sigma^2(e'_3)=f_\sigma(e'_4)=-e'_3$ et $e'_4=f_\sigma(e'_3)$.

Donc e'_3 est dans $SEP(f_\sigma^2,-1)=\mathrm{Vect}(e_1-e_3,e_2-e_4)$.

P_σ^2 est la matrice A de Q2 !!

Synthèse.. Posons $e'_1=e_1+e_2+e_3+e_4$, $e'_2=e_1-e_2+e_3-e_4$, $e'_3=e_1-e_3$ et $e'_4=f_\sigma(e'_3)$.

- $f_\sigma(e'_1)=e'_1$ • $f_\sigma(e'_2)=-e'_2$ • $f_\sigma(e'_3)=e'_4$! • $f_\sigma(e'_4)=f_\sigma^2(e'_3)=-e'_3$.

Montrons que la famille $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$ est une base de E.

car $\mathcal{B}'=4=\dim E$. Il suffit donc de prouver que $\mathcal{B}'$ est libre.

Soit $(\alpha,\beta,\delta,S)\in\mathbb{R}^4$ tel que : $\alpha e'_1+\beta e'_2+\delta e'_3+Se'_4=0_E$. Notons que $e'_4=f_\sigma(e_1-e_3)=e_2-e_4$.

$\alpha(e_1+e_2+e_3+e_4)+\beta(e_1-e_2+e_3-e_4)+\delta(e_1-e_3)+S(e_2-e_4)=0_E$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\delta=0\\ \alpha-\beta+S=0\\ \alpha+\beta-\delta=0\\ \alpha-\beta-S=0\end{cases};\quad \begin{cases}\delta=0 & (1)-(3)\\ \alpha+\beta=0\\ S=0 & (2)-(4)\\ \alpha-\beta=0\end{cases};\quad \alpha=\beta=\delta=S=0.$$

Ceci achève de prouver que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$ est une base de E.

De plus $M_{\mathcal{B}'}(f_\sigma)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=M$.

Ainsi <u>P_σ et M sont semblables.</u>

Remarque. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

$$P^{-1} P_\sigma P = M, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

c) Nous avons $Sp_{\mathbb{C}}(P_\sigma) \subset \{1,-1,i,-i\}$, $1 \in Sp_{\mathbb{C}}(P_\sigma)$, $-1 \in Sp_{\mathbb{C}}(P_\sigma)$,

$SEP(P_\sigma, 1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $SEP(P_\sigma, -1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{C})$. $P_\sigma X = iX \Leftrightarrow \begin{cases} t = ix \\ x = iy \\ y = iz \\ z = it \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = ix \\ z = it = -x \\ y = iz = -ix \\ x = i(-ix) = x\ ! \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ix \\ z = -x \\ t = ix \end{cases}$

Ainsi $i \in Sp_{\mathbb{C}}(P_\sigma)$ et $SEP(P_\sigma, i) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}\right)$.

Par conjugaison (!) $-i \in Sp_{\mathbb{C}}(P_\sigma)$ et $SEP(P_\sigma, -i) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi $Sp_{\mathbb{C}}(P_\sigma) = \{1,-1,i,-i\}$. $P_\sigma \in M_4(\mathbb{C})$ et P_σ admet quatre valeurs propres distinctes ; P_σ est diagonalisable dans $M_4(\mathbb{C})$.

Il est aisé de montrer que $\vec{\mathcal{B}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}\right)$ est une base de $M_{4,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de P_σ respectivement associés à $1, -1, i, -i$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{4,1}(\mathbb{C})$ à $\vec{\mathcal{B}}$.

$$P^{-1} P_\sigma P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

II UN PEU DE GÉNÉRALITÉS

(Q-1) voir Q1 ! ($P_\sigma = P_{\sigma'} \Rightarrow \sigma = \sigma'$!!)

(Q0) Supposons que σ est la permutation identique. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(j) = j$.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \sigma(j) = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Alors $P_\sigma = I_n$.

Si σ est la permutation identique : $P_\sigma = I_n$.

(Q1) Posons $\forall \sigma \in S_n$, $\varphi(\sigma) = P_\sigma$. φ est une application de S_n dans $\mathcal{P}_n$ et par définition de $\mathcal{P}_n$ elle est surjective. Montrons que φ est injective.

Soit $(\sigma,\sigma') \in S_n^2$ tel que $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma')$. $P_\sigma = P_{\sigma'}$. Montrons que $\sigma = \sigma'$.

Posons $P_\sigma = (p_{ij})$ et $P_{\sigma'} = (p'_{ij})$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{ij} = p'_{ij}$.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Posons $i = \sigma(j)$. $p_{ij} = 1$ donc $p'_{ij} = 1$ alors nécessairement $\sigma'(j) = i = \sigma(j)$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(j) = \sigma'(j)$. $\sigma = \sigma'$.

Ceci achève de montrer l'injectivité de φ.

Ainsi φ est une bijection de S_n sur $\mathcal{P}_n$; S_n et $\mathcal{P}_n$ sont équipotents !

$\mathcal{P}_n$ est alors fini et card $\mathcal{P}_n$ = card $S_n = n!$ $\quad$ Card $\mathcal{P}_n = n!$

(Q2) a) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. $f_\sigma(e_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \underset{p_{ij} = 1 \text{ ssi } \sigma(j) = i}{=} e_{\sigma(j)}$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.

b) Notons f l'endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$.

AP_σ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de $f \circ f_\sigma$

Or $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $(f \circ f_\sigma)(e_j) = f(f_\sigma(e_j)) = f(e_{\sigma(j)})$.

Ainsi la $j^{ième}$ colonne de AP_σ est la $\sigma(j)^{ième}$ colonne de A, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

Par conséquent AP_σ se déduit de A en opérant la permutation σ^{-1} sur les indices des colonnes de A.

Exercice.- Etudier le produit $P_\sigma A$.

(Q3) Notre que $P_{\sigma'} P_\sigma = P_{\sigma' \circ \sigma}$ revient à prouver que $f_{\sigma'} \circ f_\sigma = f_{\sigma' \circ \sigma}$.

Comme $B=(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, pour obtenir cette égalité il suffit de prouver que :

$\forall j \in [\![1,n]\!],\ (f_{\sigma'} \circ f_\sigma)(e_j) = f_{\sigma' \circ \sigma}(e_j)$.

Or $\forall j \in [\![1,n]\!],\ (f_{\sigma'} \circ f_\sigma)(e_j) = f_{\sigma'}(f_\sigma(e_j)) = f_{\sigma'}(e_{\sigma(j)}) = e_{\sigma'(\sigma(j))} = e_{(\sigma' \circ \sigma)(j)} = f_{\sigma' \circ \sigma}(e_j)$.

Ainsi $\underline{P_{\sigma'} P_\sigma = P_{\sigma' \circ \sigma}}$.

(Q4) Notons σ_0 la permutation identique. D'après Q0 : $P_{\sigma_0} = I_n$.

Ainsi $I_n = P_{\sigma_0} = P_{\sigma^{-1} \circ \sigma} = P_{\sigma^{-1}} P_\sigma$

ceci suffit largement pour dire que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

Posons $P_\sigma^{-1} = (q_{ij})$; $P_{\sigma^{-1}} = (q_{ij})$;

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad q_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = \sigma^{-1}(j) \text{ ou } j = \sigma(i) \\ 0 \text{ si } i \neq \sigma^{-1}(j) \text{ ou } j \neq \sigma(i) \end{cases}$$

Posons ${}^tP_\sigma = (r_{ij})$.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad r_{ij} = p_{ji} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = \sigma(i) \\ 0 \text{ si } j \neq \sigma(i) \end{cases} ;\quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ r_{ij} = q_{ij}.$$

Ainsi $\underline{P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = {}^tP_\sigma}$.

Q5 a) Une récurrence simple donne $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_\sigma^k = P_{\sigma^k}$ (Q3 !).

Soit $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Posons $k' = -k$; $k' \in \mathbb{N}^*$,

P_σ est inversible donc $P_\sigma^{k'}$ également (produit de matrices inversibles).

$$P_\sigma^k = P_\sigma^{-k'} = (P_\sigma^{-1})^{k'} = (P_{\sigma^{-1}})^{k'} = P_{(\sigma^{-1})^{k'}} = P_{\sigma^{-k'}} = P_{\sigma^k}.$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P_\sigma^k = P_{\sigma^k}$.

<u>Pour tout k dans $\mathbb{Z}$, P_σ^k est la matrice de permutation P_{σ^k}.</u>

b) $\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n!}\}$ est un sous-ensemble de S_n et $\operatorname{card} S_n = n!$
["factoriel n !"]

Alors $\operatorname{card}\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n!}\} \leqslant n!$

Nécessairement deux éléments, au moins, de la famille $(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{n!})$ sont égaux. $\exists (q, q') \in [\![0, n!]\!]^2$, $\sigma^q = \sigma^{q'}$ et $q \neq q'$.

Ainsi <u>il existe deux éléments distincts q et q' de $\mathbb{N}$ tels que $P_\sigma^q = P_\sigma^{q'}$.</u>

c) Soit $(q, q') \in \mathbb{N}^2$ tel que $P_\sigma^q = P_\sigma^{q'}$ et $q \neq q'$.

$P_{\sigma^q} = P_{\sigma^{q'}}$; $\sigma^q = \sigma^{q'}$.

1er cas. $q > q'$. $\sigma^q \circ \sigma^{-q'} = \sigma^{q'} \circ \sigma^{-q'} = \sigma_0$; $\sigma^{q-q'} = \sigma_0$.

Posons $r = q - q'$. $r \in \mathbb{N}^*$ et $P_\sigma^r = P_{\sigma^r} = P_{\sigma_0} = I_n$.

2e cas. $q < q'$. De la même manière en posant $r = q' - q$ on a $r \in \mathbb{N}^*$ et $P_\sigma^r = I_n$.

Ainsi : <u>$\exists r \in \mathbb{N}^*$, $P_\sigma^r = I_n$.</u>

d) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_\sigma^r = I_n$. $X^r - 1$ est un polynôme annulateur de P_σ.

Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(P_\sigma)$. $\lambda^r - 1 = 0$. $\lambda^r = 1$. $|\lambda|^r = 1$. $|\lambda| = 1$ ($r \in \mathbb{N}^*$).

Ainsi toutes les valeurs propres (réelles ou complexes) de P_σ ont pour module 1.

c] Posons $U=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ ($\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$!). $U \neq O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Posons $V=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\\vdots\\t_n\end{pmatrix}=P_\sigma U$. $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $t_i=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\times 1 \underset{\uparrow}{=} p_{i\sigma^{-1}(i)}=1$; $V=U$.

$p_{ij}=1$ si $\sigma(j)=i$ ou $j=\sigma^{-1}(i)$

Alors $U\in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})-\{O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ et $P_\sigma U=U$.

1 est valeur propre de P_σ.

(Q6) a] $BP_\sigma=P_\sigma B \Leftrightarrow \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}p_{kj}=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}b_{kj}$

$BP_\sigma=P_\sigma P \underset{\uparrow}{\Leftrightarrow} \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i\sigma(j)}=b_{\sigma^{-1}(i)j}$.

$$\begin{cases} p_{kj}=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq\sigma(j)\\ 1 \text{ si } k=\sigma(j)\end{cases} \\ p_{ik}=\begin{cases}0 \text{ si } i\neq\sigma(k) \text{ ou } k\neq\sigma^{-1}(i)\\ 1 \text{ si } i=\sigma(k) \text{ ou } k=\sigma^{-1}(i)\end{cases}\end{cases}$$

b] Soit $\sigma\in S_n$. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Montrons que : $m_{i\sigma(j)}=m_{\sigma^{-1}(i)j}$.

1er cas.. $\sigma(j)\neq i$. Alors $\sigma^{-1}(i)\neq j$.

Ainsi $m_{i\sigma(j)}=\beta=m_{\sigma^{-1}(i)j}$; $m_{i\sigma(j)}=m_{\sigma^{-1}(i)j}$

2e cas.. $\sigma(j)=i$. Alors $\sigma^{-1}(i)=j$

$m_{i\sigma(j)}=m_{ii}=\alpha=m_{jj}=m_{\sigma^{-1}(i)j}$; $m_{i\sigma(j)}=m_{\sigma^{-1}(i)j}$

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $m_{i\sigma(j)}=m_{\sigma^{-1}(i)j}$. Ainsi $M(\alpha,\beta)P_\sigma=P_\sigma M(\alpha,\beta)$.

Mieux $\forall\sigma\in S_n$, $M(\alpha,\beta)P_\sigma=P_\sigma M(\alpha,\beta)$. $M(\alpha,\beta)\in\mathcal{L}$.

c) Réciproquement soit $B=(b_{ij})$ un élément de $\mathcal{L}$. $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n$, $BP_\sigma = P_\sigma B$.

$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i\sigma(j)} = b_{\sigma^{-1}(i)j}$. Posons $\alpha = b_{11}$ et $\beta = b_{12}$.

- Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Considérons un élément σ de $\mathcal{S}_n$ tel que $\sigma(1)=i$ (ex : $\sigma(1)=i, \sigma(i)=1, \forall k \in [\![1,n]\!]-\{1,i\}, \sigma(k)=k$).

  Alors $b_{ii} = b_{i\sigma(1)} = b_{\sigma^{-1}(i)1} \underset{\sigma^{-1}(i)=1}{=} b_{11} = \alpha$.

  Finalement $\underline{\forall i \in [\![1,n]\!],\ b_{ii} = \alpha}$.

- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

  Considérons un élément σ de $\mathcal{S}_n$ tel que : $\sigma(1) = i$ et $\sigma(2) = j$

  (il en existe au moins un car $1 \neq 2$! et $i \neq j$).

  Alors $b_{ij} = b_{i\sigma(2)} = b_{\sigma^{-1}(i)2} = b_{12} = \beta$.

  $\underline{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow b_{ij} = \beta}$. Ainsi $B = \Pi(\alpha,\beta)$.

Par conséquent si $B \in \mathcal{L}$, $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $B = \Pi(\alpha,\beta)$.

Ainsi $\underline{\underline{\mathcal{L} = \{\Pi(\alpha,\beta)\ ;\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}}}$.

<u>Conclusion</u>.. $\underline{\underline{\mathcal{L} = \{\Pi(\alpha,\beta)\ ;\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}}}$.

Q7 a) Fixons j dans $[\![1,n]\!]$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \end{cases}$

Dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de P_σ le terme $p_{\sigma(j)j}$ vaut 1 et les autres sont nuls.

<u>Dans chaque colonne de P_σ, il y a un 1 et un seul les autres coefficients étant nuls.</u>

Fixons i dans $[\![1,n]\!]$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=\sigma(j) \text{ ou } j=\sigma^{-1}(i) \\ 0 & \text{si } i\neq\sigma(j) \text{ ou } j\neq\sigma^{-1}(i) \end{cases}$

dans la $i^{\text{ème}}$ ligne de P_σ le terme $p_{i\,\sigma^{-1}(i)}$ vaut 1 et les autres sont nuls.

Dans chaque ligne de P_σ, il y a un 1 et un seul les autres coefficients étant nuls.

c) Notons encore σ_0 la permutation identique de $[\![1,n]\!]$. Ici $P_\sigma \neq I_n = P_{\sigma_0}$.
Ainsi $\sigma\neq\sigma_0$. Alors $\exists j\in[\![1,n]\!]$, $\sigma(j)\neq j$.

Alors $p_{jj}=0$ car $j\neq\sigma(j)$. Posons $i=\sigma(j)$. $i\neq j$.

Nécessairement $\sigma(i)\neq i$ ($\sigma(i)=i \Rightarrow \sigma(i)=\sigma(j) \Rightarrow i=j$!!). Alors $p_{ii}=0$.

Ainsi $p_{ii}=p_{jj}=0$ avec $i\neq j$.

$Tr(P_\sigma) = \sum_{l=1}^{n} p_{ll} = \sum_{l\in[\![1,n]\!]-\{i,j\}} p_{ll} \underset{p_{ll}\in\{0,1\}}{\leq} n-2$ et $Tr(P_\sigma) = \sum_{l=1}^{n} p_{ll} \in [\![0,n]\!]$ ($p_{ll}\in\{0,1\}$).

Si $P_\sigma\neq I_n$, $Tr(P_\sigma)\in[\![0,n-2]\!]$.

d) • Supposons que $Tr(P_\sigma)=n-2$.
Alors $\sum_{l=1}^{n} p_{ll}=n-2$. Comme $\forall l\in[\![1,n]\!]$, $p_{ll}\in\{0,1\}$:

$\exists (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i\neq j$, $p_{ii}=p_{jj}=0$ et $\forall k\in[\![1,n]\!]-\{i,j\}$, $p_{kk}=1$.

Alors nécessairement $\sigma(i)\neq i$, $\sigma(j)\neq j$ et $\forall k\in[\![1,n]\!]-\{i,j\}$, $\sigma(k)=k$.
Alors $\{\sigma(i),\sigma(j)\}=\{i,j\}$ avec $\sigma(i)\neq i$ et $\sigma(j)\neq j$.
Finalement $\sigma(i)=j$, $\sigma(j)=i$ et $\forall k\in[\![1,n]\!]-\{i,j\}$, $\sigma(k)=k$.
Ainsi σ est une TRANSPOSITION (elle échange deux éléments de $[\![1,n]\!]$ et laisse fixe les autres).

Réciproquement supposons que σ est une transposition. $\exists(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i\neq j$, $\sigma(i)=j$, $\sigma(j)=i$ et $\forall k\in[\![1,n]\!]-\{i,j\}$, $\sigma(k)=k$.

Alors $p_{ii}=0$ ($\sigma(i)\neq i$), $p_{jj}=0$ ($\sigma(j)\neq j$), $\forall k\in[\![1,n]\!]-\{i,j\}$, $p_{kk}=1$ ($\sigma(k)=k$).

Ainsi $\underline{\underline{Tr(P_\sigma) = n-2 \Leftrightarrow \sigma \text{ est une transposition.}}}$

e) Soit σ' une seconde permutation. Supposons que $Tr(P_\sigma) = Tr(P_{\sigma'}) = n-2$.
Alors σ et σ' sont deux transpositions de $[\![1,n]\!]$.
$\exists (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$ tel que : $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ et $\forall \ell \in [\![1,n]\!] - \{i,j\}$, $\sigma(\ell) = \ell$.
$\exists (i',j') \in [\![1,n]\!]^2$, $i' \neq j'$ tel que $\sigma'(i') = j'$, $\sigma'(j') = i'$ et $\forall \ell \in [\![1,n]\!] - \{i',j'\}$, $\sigma'(\ell) = \ell$.
$i \neq j$ et $i' \neq j'$; on peut donc trouver une permutation σ'' de $[\![1,n]\!]$ telle que : $\sigma''(i) = i'$ et $\sigma''(j) = j'$.
Montrons que $\sigma = \sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma''$

$(\sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'')(i) = \sigma''^{-1}(\sigma'(i')) = \sigma''^{-1}(j') = j = \sigma(i)$.

$(\sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'')(j) = \sigma''^{-1}(\sigma'(j')) = \sigma''^{-1}(i') = i = \sigma(j)$

Soit $k \in [\![1,n]\!] - \{i,j\}$.
$\sigma''(k) \notin \{i',j'\}$ donc $\sigma'(\sigma''(k)) = \sigma''(k)$, alors $(\sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'')(k) = \sigma''^{-1}(\sigma''(k)) = k = \sigma(k)$.
Finalement $\sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma''$ et σ coïncident en tout point de $[\![1,n]\!]$.
Ainsi $\sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'' = \sigma$

Alors $P_\sigma = P_{\sigma''^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma''} = P_{\sigma''^{-1}} P_{\sigma'} P_{\sigma''} = (P_{\sigma''})^{-1} P_{\sigma'} P_{\sigma''}$

Par conséquent : $\underline{\underline{P_\sigma \text{ et } P_{\sigma'} \text{ sont semblables.}}}$