SUJET 5

Soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels **non nuls**. Nous appellerons (pour simplifier) produit infini de terme général a_n la suite de terme général $P_n = \prod_{k=n_0}^{n} a_k$.

On dit que le produit infini de terme général a_n converge (resp. diverge) si la suite de terme général P_n converge vers un réel **non nul** (resp. diverge ou converge vers 0).

Si le produit infini de terme général a_n converge, on note $\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ la limite de la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$.

Partie I : Généralités.

Dans toute cette partie $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels non nuls.

Q1 Etudier la convergence du produit de terme général a_n et calculer $\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ lorsque cela est possible dans les cas suivants.

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1 + \dfrac{1}{(2n+1)(n+2)}$.

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = e^{\frac{1}{n+1}}$.

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1 + x^{2^n}$ où x est un réel distinct de -1 (on pourra calculer P_0, P_1, P_2,...).

Q2 a) Montrer que si le produit infini de terme général a_n converge alors la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers 1.

Examiner la récipoque.

Dans la suite, on pose : $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ u_n = a_n - 1$. Ainsi $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite d'élément de $\mathbb{R} - \{-1\}$ et $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ a_n = 1 + u_n$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ est alors une condition nécessaire pour que le produit infini de terme général a_n soit convergent.

On considère la propriété (P) : à partir d'un certain rang les termes de la suite $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ sont strictement positifs.

Q3 Que dire pour le produit infini de terme général a_n si la propiété (P) n'est pas vérifiée ?

Désormais on suppose que (P) est vérifiée. Mieux on suppose que $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ a_n > 0$.

Q4 Montrer que le produit infini de terme général a_n est de même nature que la série de terme général $\ln a_n$.

Montrer qu'en cas de convergence, on a $\prod_{n=n_0}^{+\infty} a_n = e^{\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln a_n\right)}$

Q5 On suppose, dans cette seule question, que $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ u_n \geqslant 0$.

a) Montrer que le produit infini de terme général $a_n = 1 + u_n$ converge si et seulement si la série de terme général u_n converge.

b) Montrer que $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ 1 + u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n \leqslant \prod_{k=n_0}^{n} a_k \leqslant e^{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n}$.

Retrouver alors le résultat de a).

Q6 On ne fait plus l'hypothèse de Q5 mais on suppose que la série de terme général u_n^2 converge. En particulier $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Montrer que la série de terme général $\ln(1+u_n) - u_n$ converge.

En déduire que le produit infini de terme général $a_n = 1 + u_n$ converge si et seulement si la série de terme général u_n converge.

Q7 Montrer, en utilisant la question 6, que si la série de teme général u_n est absolument convergente alors le produit infini de terme général $a_n = 1 + u_n$ converge.

Q8 On rappelle que si $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite decroissante de réels qui converge vers 0 alors les séries de termes généraux $(-1)^n\, v_n$ et $(-1)^{n+1}\, v_n$ sont convergentes.

Soit α un réels stictement positif. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$.

a) Etudier la convergence des séries de terme généraux u_n, $|u_n|$ et u_n^2.

b) Etudier la convergence du produit infini $a_n = 1 + u_n$.

Partie II : Wallis.

John Wallis (1616-1703), en étudiant une famille de courbe, et en utilisant des insertions et des interpolations sans trop se soucier de rigueur proposa l'écriture suivante :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{3.3.5.5.7.7.9.9\ldots}$$

Le génie de la formule ce trouvant dans les points de suspension puisque à l'époque l'analyse infinitésimale balbutiait.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, \mathrm{d}t$.

On rappelle que $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite décroissante qui converge vers 0 et que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, I_n$.

Q0 Ecrire le résultat de Wallis en utilisant la notion de produit infini.

Q1 Retrouver rapidement I_{2p} et I_{2p+1} pour tout élément p de $\mathbb{N}$.

Q2 a) Montrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$ (utiliser la décroissance de la suite de terme général I_n).

b) Démontrer le résultat de Wallis.

Q3 Déduire de ce qui précède que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}$ ou $\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{7^2}\right)\cdots = \dfrac{\pi}{4}$

Donner les valeurs de $\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{6^2}\right)\cdots$ et $\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4^2}\right)\cdots$

Partie III : Calcul de $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2\,\pi^2}\right)$ pour t élément de $]-\pi,\pi[$.

Q1 Montrer que ce produit infini converge.

Q2 n est un élément impair de $\mathbb{N}$. p est l'élément de $\mathbb{N}$ tel que $n=2p+1$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall t\in\mathbb{R},\ \sin(nt)=\sin t\ Q(\sin^2 t)$.

Préciser le degré de Q.

Dans la suite de cette question on suppose que p n'est pas nul.

b) $\forall k\in[\![1,p]\!],\ y_k=\sin^2\dfrac{k\pi}{n}\cdot$ Montrer qu'il existe un réel λ non nul tel que :

$$Q=\lambda\ \prod_{k=1}^{p}(X-y_k).$$

c) En évaluant de deux manières différentes $Q(0)$, montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sin(nx)=n\sin x\ \prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)\cdot$$

d) Soit x un élément du domaine de définition de la fonction tangente. Montrer que :

$$\sin(nx)=n(\cos x)^n\tan x\ \prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\tan^2 x}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)\cdot$$

Q3 a) Etudier les variations de $\varphi : x\to\dfrac{\sin x}{x}$ sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.

En déduire que si x et y sont deux réels tels que $0<x\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ alors $\dfrac{x}{y}\leqslant\dfrac{\sin x}{\sin y}\cdot$

b) En utilisant la convexité de tan sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ montrer que si x et y sont deux réels tels que $0<x\leqslant y<\dfrac{\pi}{2}$ alors $\dfrac{\tan x}{\tan y}\leqslant\dfrac{x}{y}\cdot$

<u>Remarque</u>. On peut obtenir a) en utilisant la concavité de sin et b) en étudiant une fonction !

Q4 a) p est un élément de $\mathbb{N}$ et $n=2p+1$. t est un élément de $]0,\pi[$. Montrer que :

$$\frac{\sin t}{n\sin\frac{t}{n}}\leqslant\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{t^2}{k^2\,\pi^2}\right)\leqslant\frac{\sin t}{n\left(\cos\frac{t}{n}\right)^n\tan\frac{t}{n}}\cdot$$

b) Pouver que $\forall t\in]0,\pi[,\ \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{t^2}{n^2\,\pi^2}\right)=\frac{\sin t}{t}\cdot$

c) Etendre cette formule à $]-\pi,\pi[-\{0\}$. Et pour $t=0$?

d) Montrer que $\forall x\in]-1,1[-\{0\},\ \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=\frac{\sin\pi\,x}{\pi\,x}\cdot$

Terminons en donnant un remarquable résultat démontré par Euler.

$\xi : x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est clairement définie sur $]1,+\infty[$. On considère la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ des entiers premiers rangés dans l'ordre croissant ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$,...). Alors

$$\boxed{\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \frac{1}{\xi(k)} = \prod_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^k}\right) = \left(1-\frac{1}{2^k}\right)\left(1-\frac{1}{3^k}\right)\left(1-\frac{1}{5^k}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n^k}\right)\cdots}$$

Ramis p 50 ex 42

Tout en 1 p 300 ex 36 et 37.

Lelong p 291

Q9 $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1 - \dfrac{1}{4n^2}\cdot$

a) Montrer que le produit infini de terme général a_n converge.

b) On rappelle que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi\, n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. Montrer que $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{2}{\pi}\cdot$