Préliminaire

Cela n'est pas dans l'épreuve d'origine et c'est destiné à éclaircir le souk du début de la partie A.

Q1. • H_1 et H_2 sont deux sous-ensembles de H.

• $0_{\mathbb{R}[X]} \in H_1 \cap H_2$ donc $H_1 \neq \emptyset$ et $H_2 \neq \emptyset$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ - Soient P et φ deux éléments de H_2.

$$(\lambda P+\varphi)(-X) = \lambda P(-X)+\varphi(-X) = \lambda P(X)+\varphi(X) = (\lambda P+\varphi)(X) \; ; \; \lambda P+\varphi \in H_2$$

- Soient P et φ deux éléments de H_1.

$$(\lambda P+\varphi)(-X) = \lambda P(-X)+\varphi(-X) = \lambda(-P(X))-\varphi(X) = -(\lambda P+\varphi)(X) \; ; \; \lambda P+\varphi \in H_1.$$

Ainsi $\underline{H_1 \text{ et } H_2 \text{ sont deux sous-espaces vectoriels de } H.}$

Q2 Soit P un élément de H. Montrons par analyse/synthèse que :

$\exists! (P_1, P_2) \in H_1 \times H_2,\ P = P_1 + P_2$.

→ Supposons que : $\exists (P_1, P_2) \in H_1 \times H_2,\ P = P_1 + P_2$.

$P(X) = P_1(X) + P_2(X)$ et $P(-X) = P_1(-X) + P_2(-X) = -P_1(X) + P_2(X)$.

$$\begin{cases} P(X) = P_1(X) + P_2(X) \\ P(-X) = -P_1(X) + P_2(X) \end{cases} . \text{ Alors } \begin{cases} P_1(X) = (1/2)(P(X) - P(-X)) \\ P_2(X) = (1/2)(P(X) + P(-X)) \end{cases} .$$

D'où l'unicité.

→ Réciproquement posons $P_1(X) = \frac{1}{2}(P(X) - P(-X))$ et $P_2(X) = \frac{1}{2}(P(X)+P(-X))$.

• $P_1(X) + P_2(X) = P(X)$.

• $P_1(-X) = \frac{1}{2}(P(-X) - P(X)) = -P_1(X)$; $P_1 \in H_1$.

• $P_2(-X) = \frac{1}{2}(P(-X) + P(X)) = P_2(X)$; $P_2 \in H_2$.

D'où l'existence.

$\forall P \in H,\ \exists! (P_1, P_2) \in H_1 \times H_2,\ P = P_1 + P_2$. $\underline{H_1 \text{ et } H_2 \text{ sont supplémentaires.}}$

Q3 Soit P un élément de H_1. $P(-X)=-P(X)$ donne en dérivant $-P'(-X)=-P'(X)$ ou $P'(-X)=P'(X)$; $P'\in H_2$.

Soit P un élément de H_2. $P(-X)=P(X)$ donne en dérivant $-P'(-X)=P'(X)$ ou $P'(-X)=-P'(X)$; $P'\in H_1$.

$\forall P\in H_1,\ P'\in H_2$ et $\forall P\in H_2,\ P'\in H_1$.

Q4 $P=\sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ est un élément de H

$P\in H_2 \iff P(-X)=P(X) \iff P(X)-P(-X)=0_H \iff \sum_{k=0}^{r} a_k\left(X^k-(-X)^k\right)=0_H \iff \sum_{k=0}^{r} a_k\left(1-(-1)^k\right)X^k=0_H$

$P\in H_2 \iff \forall k\in [\![0,r]\!],\ a_k\left(1-(-1)^k\right)=0 \iff \forall k\in \left[\!\left[0,\left[\frac{r-1}{2}\right]\right]\!\right],\ a_{2k+1}\underbrace{\left(1-(-1)^{2k+1}\right)}_{=2}=0$

si k est pair $1-(-1)^k=0$

$P\in H_2 \iff \forall k\in \left[\!\left[0,\left[\frac{r-1}{2}\right]\right]\!\right],\ a_{2k+1}=0$.

$P\in H_1 \iff P(X)+P(-X)=0_H \iff \sum_{k=0}^{r} a_k\left[1+(-1)^k\right]X^k=0_H \iff \sum_{k=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} a_{2k}\times 2\times X^{2k}=0_H$

$1+(-1)^k=0$ si k est impair.

$P\in H_1 \iff \forall k\in \left[\!\left[0,\left[\frac{r}{2}\right]\right]\!\right],\ a_{2k}=0$.

Q5 Soit P un élément de E.

D'après ce qui précède : $P\in E_2 \iff \exists (a_0,a_2,\dots,a_{2n})\in\mathbb{K}^{n+1},\ P=\sum_{k=0}^{n} a_{2k}X^{2k}$.

Ainsi $E_2=\mathrm{Vect}(1,X^2,X^4,\dots,X^{2n})$; E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

$P\in E_1 \iff \exists (a_1,a_3,\dots,a_{2n+1})\in\mathbb{K}^{n},\ P=\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}X^{2k+1}$.

Ainsi $E_1=\mathrm{Vect}(X,X^3,\dots,X^{2n+1})$. E_1 est un sous-espace vectoriel de E.

$(1,X^2,X^4,\dots,X^{2n})$ et $(X,X^3,\dots,X^{2n+1})$ sont deux familles libres comme sous-familles de la base $(1,X,\dots,X^{2n+1})$ de E.

Alors $(1,X^2,\dots,X^{2n})$ est une base de $E_2=E\cap H_2$

$(X,X^3,\dots,X^{2n+1})$ est une base de $E_1=E\cap H_1$

PARTIE A

(Q1) E_1 (resp. E_2) est un sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B}_1 = (X, X^3, X^5)$ (resp. $\mathcal{B}_2 = (1, X^2, X^4)$) en est une base.

Comme $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E, E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

(Q2) a) . Soient P et Q deux éléments de E_2. Soit λ un réel.

$\sigma(\lambda P+Q)(X) = (X^2+1)(\lambda P+Q)''(X) - X(\lambda P+Q)'(X)$.

$\sigma(\lambda P+Q)(X) = (X^2+1)(\lambda P''+Q'')(X) - X(\lambda P'+Q')(X)$.

$\sigma(\lambda P+Q)(X) = \lambda\left((X^2+1)P''(X) - XP'(X)\right) + (X^2+1)Q''(X) - XQ'(X)$.

$\sigma(\lambda P+Q)(X) = \lambda\sigma(P)(X) + \sigma(Q)(X)$.

σ est linéaire.

. Soit $P \in E_2$. $\deg P \leq 5$ et même 4 ! ; $\deg P' \leq 4$ et $\deg P'' \leq 3$.

Alors $\deg((X^2+1)P''(X)) \leq 5$ et $\deg(XP'(X)) \leq 5$. Ainsi $\deg \sigma(P) \leq 5$.

$\sigma(P) \in \mathbb{R}_5[X]$.

Rappelons que P est pair donc P' est impair et P'' est pair.

$\sigma(P)(-X) = ((-X)^2+1)P''(-X) - (-X)P'(-X) = (X^2+1)P''(X) - XP'(X) = \sigma(P)(X)$. $\sigma(P)$ est pair.

Ainsi σ est une application de E_2 dans E_2.

σ est un endomorphisme de E_2.

b) $\sigma(e_0)(X) = (X^2+1)e_0''(X) - Xe_0'(X) = 0_{E_2}$

$\sigma(e_2)(X) = (X^2+1)e_2''(X) - Xe_2'(X) = (X^2+1)\times 2 - X\times 2X = 2 = 2e_0$

$\sigma(e_4)(X) = (X^2+1)e_4''(X) - Xe_4'(X) = (X^2+1)(12X^2) - X(4X^3) = 8X^4+12X^2 = 12e_2+8e_4$

Ainsi $M_{(e_0,e_2,e_4)}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

$M = M_{(e_0,e_2,e_4)}(\sigma)$ est triangulaire supérieure. $Sp\,\sigma = Sp\,M = \{0, 8\}$.

Soit $P = a_0 + a_2 e_2 + a_4 e_4$ un élément de E_2

$$P \in \operatorname{Ker}\sigma \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 12 a_4 = 0 \\ 8 a_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_2 = a_4 = 0.$$

Ainsi $\operatorname{Ker}\sigma = SEP(\sigma, 0) = \operatorname{Vect}(e_0)$.

$$P \in SEP(\sigma,8) \Leftrightarrow \sigma(P) = 8P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_2 = 8a_0 \\ 12a_4 = 8a_2 \\ 8a_4 = 8a_4 \end{cases}$$

$$P \in SEP(\sigma,8) \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 4a_0 \\ 3a_4 = 2a_2 \end{cases}.$$ $SEP(\sigma, 8) = \operatorname{Vect}(3e_0 + 12 e_2 + 8 e_4)$.

d) $Sp\,\sigma = \{0,8\}$ et $\dim SEP(\sigma,0) + \dim SEP(\sigma,8) = 2 < \dim E_2$.

σ n'est pas diagonalisable.

Q3 a) • Soit $(P,Q) \in E_2^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Delta(\lambda P + Q)(X) = (X^2-1)(\lambda P + Q)''(X) + X(\lambda P + Q)'(X) = (X^2-1)(\lambda P''(X) + Q''(X)) + X(\lambda P'(X) + Q'(X))$.

$\Delta(\lambda P + Q)(X) = \lambda\left((X^2-1)P''(X) + XP'(X)\right) + (X^2-1)Q''(X) + XQ'(X)$.

$\Delta(\lambda P + Q)(X) = \lambda\,\Delta(P)(X) + \Delta(Q)(X)$.

Δ est linéaire.

• Soit $P \in E_2$. $\deg P \leq 5$. $\deg P'' \leq 3$ et $\deg P' \leq 4$.

$\deg((X^2-1)P''(X)) \leq 5$ et $\deg(XP'(X)) \leq 5$. Alors $\deg(\Delta(P)(X)) \leq 5$.

$\Delta(P)(-X) = ((-X)^2-1)P''(-X) + (-X)P'(-X) = (X^2-1)P''(X) + XP'(X) = \Delta(P(X))$

P'' est pair et P' impair.

Ainsi $\Delta(P)(X) \in E_2$.

Δ est une application de E_2 dans E_2.

Δ est un endomorphisme de E_2.

b) $\Delta(e_0)(X) = (X^2-1)\,e_0''(X) + X e_0'(X) = 0_{E_2}$

$\Delta(e_2)(X) = (X^2-1)\,e_2''(X) + X e_2'(X) = (X^2-1)2 + X(2X) = 4X^2-2 = -2e_0+4e_2$.

$\Delta(e_4)(X) = (X^2-1)\,e_4''(X) + X e_4'(X) = (X^2-1)(12X^2) + X(4X^3) = 16X^4-12X^2 = -12e_2+16e_4$.

$$\hat{M} = M_{(e_0,e_2,e_4)}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

c) $\hat{M}$ est triangulaire supérieure donc $Sp\,\Delta = Sp\,\hat{M} = \{0,4,16\}$.

Soit $P = a_0 e_0 + a_2 e_2 + a_4 e_4$.

$$P \in Ker\,\Delta = SEP(\Delta,0) \Leftrightarrow \Delta(P) = 0_{E_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a_2 = 0 \\ 4a_2 - 12a_4 = 0 \\ 16a_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

$Ker\,\Delta = SEP(\Delta,0) = Vect(e_0)$.

$$P \in SEP(\Delta,4) \Leftrightarrow \Delta(P) = 4P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a_2 = 4a_0 \\ 4a_2 - 12a_4 = 4a_2 \\ 16a_4 = 4a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -2a_0 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

$SEP(\Delta,4) = Vect(e_0 - 2e_2)$.

$$P \in SEP(\Delta,16) \Leftrightarrow \Delta(P) = 16P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = 16\begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a_2 = 16a_0 \\ 4a_2 - 12a_4 = 16a_2 \\ 16a_4 = 16a_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -8a_0 \\ a_4 = -a_2 \end{cases}$$

$SEP(\Delta,16) = Vect(e_0 - 8e_2 + 8e_4)$.

d) Δ est un endomorphisme de E_2 ayant trois valeurs propres distinctes et $\dim E_2 = 3$.

Alors Δ est diagonalisable.

Q4 a) Soit $(P,Q) \in E_2^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f(\lambda P+Q) = 2X(\lambda P+Q)(X) - (\lambda P+Q)'(X) = 2X(\lambda P(X)+Q(X)) - (\lambda P'(X)+Q'(X))$.

$f(\lambda P+Q) = \lambda(2XP(X) - P'(X)) + (2XQ(X) - Q'(X)) = \lambda f(P) + f(Q)$.

f est linéaire.

• Soit $P \in E_2$. $\deg P \leq 4$; $\deg XP \leq 5$ et $\deg P' \leq 3$; $\deg f(P) \leq 5$.

$f(P)(-X) = 2(-X)P(-X) - P'(-X) = -2XP(X) + P'(X) = -f(P)(X)$; $f(P)$ est impaire.

<u>Ainsi f est une application linéaire de E_2 dans E_1.</u>

b) $f(e_0) = 2Xe_0(X) - e_0'(X) = 2X = 2e_1(X)$.

$f(e_2) = 2Xe_2(X) - e_2'(X) = 2X^3 - 2X = -2e_1(X) + 2e_3(X)$

$f(e_4) = 2Xe_4(X) - e_4'(X) = 2X^5 - 4X^3 = -4e_3(X) + 2e_5(X)$.

$$\check{M} = M(f, (e_0, e_2, e_4), (e_1, e_3, e_5)) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) $\check{M}$ est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale donc $\check{M}$ est inversible. <u>f est un isomorphisme de E_2 sur E_1.</u>

<u>Exercice</u> .- généraliser les résultats précédents en prenant $E = \mathbb{R}_{2p+1}[X]$.

PARTIE B

Q1) a) Montrons que F est linéaire. Soient $(x,y) \in E^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\exists ! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $\exists ! (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$, $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$.

Alors $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)$, $\lambda x_1 + y_1 \in E_1$ et $\lambda x_2 + y_2 \in E_2$. Ainsi :

$F(\lambda x + y) = f^{-1}(\lambda x_1 + y_1) + f(\lambda x_2 + y_2) + s(\lambda x_2 + y_2)$. La linéarité de f^{-1}, f et s donne alors:

$F(\lambda x + y) = \lambda f^{-1}(x_1) + f^{-1}(y_1) + \lambda f(x_2) + f(y_2) + \lambda s(x_2) + s(y_2)$.

$F(\lambda x + y) = \lambda (f^{-1}(x_1) + f(x_2) + s(x_2)) + f^{-1}(y_1) + f(y_2) + s(y_2) = \lambda F(x) + F(y)$.

F est linéaire.

F est donc une application linéaire de E dans E. F est un endomorphisme de E.

Montrons que F est un endomorphisme injectif.

Soit $x = x_1 + x_2$ un élément de $\mathrm{Ker}\, F$. $\exists ! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x = x_1 + x_2$

$$0_E = F(x) = f^{-1}(x_1) + f(x_2) + s(x_2) = \underbrace{f(x_2)}_{\in E_1} + \underbrace{(f^{-1}(x_1) + s(x_2))}_{\in E_2}.$$

Comme E_1 et E_2 sont en somme directe: $f(x_2) = f^{-1}(x_1) + s(x_2) = 0_E$.

f étant une application linéaire injective, ceci donne $\begin{cases} x_2 = 0_E \\ \text{et} \\ f^{-1}(x_1) + s(x_2) = 0_E \end{cases}$.

Ainsi $x_2 = 0_E$ et $f^{-1}(x_1) + s(0_E) = 0_E$.

Alors $x_2 = 0_E$ et $f^{-1}(x_1) = 0_E$; finalement $x_2 = x_1 = 0_E$ car f^{-1} est injective.

Donc si $x \in \mathrm{Ker}\, F$, $x = 0_E$. $\mathrm{Ker}\, F = \{0_E\}$. F est injective.

F est un endomorphisme injectif de E.

b) Montrons que F est un endomorphisme surjectif.

Soit $(x,y) \in E^2$. $\exists ! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x = x_1 + x_2$ et $\exists ! (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$, $y = y_1 + y_2$.

$$F(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(x_1) + f(x_2) + s(x_2) = y_1 + y_2 \Leftrightarrow \underbrace{f(x_2)}_{\in E_1} + \underbrace{(f^{-1}(x_1) + s(x_2))}_{\in E_2} = \underbrace{y_1}_{\in E_1} + \underbrace{y_2}_{\in E_2}.$$

$$F(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_2) = y_1 \\ f^{-1}(x_1) + s(x_2) = y_2 \end{cases}$$

$$F(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = f^{-1}(y_1) \\ f^{-1}(x_1) = y_2 - s(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = f^{-1}(y_1) \\ x_1 = f(y_2) - f(s(x_2)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = f^{-1}(y_1) \\ x_1 = f(y_2) - f(s(f^{-1}(y_1))) \end{cases}$$

Ainsi si $y \in E$ et si $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in E_1$ et $y_2 \in E_2$, y possède un antécédent (et un seul) par F : $x = \left(f(y_2) - f(s(f^{-1}(y_1)))\right) + f^{-1}(y_1)$.

Finalement F est surjectif.

Pour finir $\underline{F \text{ est un automorphisme de } E.}$

Si $y = y_1 + y_2 \in E$ avec $(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$: $F^{-1}(y) = f(y_2) - f(s(f^{-1}(y_1))) + f^{-1}(y_1)$.

Q2 a) $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

$$F(x) = \lambda x \; ; \quad \underbrace{f(x_2)}_{\in E_1} + \underbrace{f^{-1}(x_1) + s(x_2)}_{\in E_2} = \underbrace{\lambda x_1}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda x_2}_{\in E_2} \; ; \quad \begin{cases} f(x_2) = \lambda x_1 \\ f^{-1}(x_1) + s(x_2) = \lambda x_2 \end{cases}$$

Supposons que $x_1 = 0_E$. Alors $f(x_2) = 0_E$; $x_2 = 0_E$ car f est injective ; ainsi $x = x_1 + x_2 = 0_E$

Supposons $x_2 = 0_E$. $f^{-1}(x_1) + s(0_E) = \lambda 0_E$; $f^{-1}(x_1) = 0_E$; $x_1 = 0_E$; $x = x_1 + x_2 = 0_E$.

Ainsi : $x_1 \neq 0_E$ et $x_2 \neq 0_E$.

F est injective donc 0 n'est pas valeur propre de F. Par conséquent : $\lambda \neq 0$.

Ainsi $x_1 = \frac{1}{\lambda} f(x_2)$. Alors $f^{-1}\left(\frac{1}{\lambda} f(x_2)\right) + s(x_2) = \lambda x_2$; $s(x_2) = \lambda x_2 - \frac{1}{\lambda} f^{-1}(f(x_2))$.

Donc $s(x_2) = \left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) x_2$ et $x_2 \neq 0_E$.

$\underline{\lambda - \frac{1}{\lambda} \text{ est une valeur propre de } s \text{. } x_2 \text{ est un vecteur propre associé}}$. Notons que

$x_1 = \frac{1}{\lambda} f(x_2) \dots$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda^2 - p\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{p}{2}\right)^2 = 1 + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow \lambda = \frac{p}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{p^2}{4}}$.

$\lambda' = \frac{p}{2} + \sqrt{1 + \frac{p^2}{4}}$ et $\lambda'' = \frac{p}{2} - \sqrt{1 + \frac{p^2}{4}}$ sont les deux solutions de l'équation

$\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda^2 - p\lambda + 1 = 0$. Notons que : $\lambda' \neq \lambda''$.

$u \neq 0_E$ et $s(u) = pu$. Posons $v' = \frac{1}{\lambda'} f(u) + u$; $\frac{1}{\lambda'} f(u) \in E_1$ et $u \in E_2$.

$F(v') = f^{-1}\left(\frac{1}{\lambda'} f(u)\right) + f(u) + s(u) = \frac{1}{\lambda'} u + f(u) + pu = \lambda' \left[\frac{1}{\lambda'^2} u + \frac{1}{\lambda'} f(u) + \frac{p}{\lambda'} u\right]$

$$F(v') = \lambda' \left[\frac{1 + p\lambda'}{\lambda'^2} u + \frac{1}{\lambda'} f(u)\right] \underset{1 + p\lambda' = \lambda'^2}{=} \lambda' \left[\frac{\lambda'^2}{\lambda'^2} u + \frac{1}{\lambda'} f(u)\right] = \lambda' v.$$

Donc $F(v') = \lambda' v'$. Si $v' = 0_E$: $\underbrace{\frac{1}{\lambda'} f(u)}_{\in E_1} + \underbrace{u}_{\in E_2} = 0_E$ et alors $\frac{1}{\lambda'} f(u) = u = 0_E$!!

Donc $F(v') = \lambda' v'$ et $v' \neq 0_E$.

<u>λ' est une valeur propre de F et $v' = \frac{1}{\lambda'} f(u) + u$</u> est un vecteur propre associé.
On montre de même que λ'' est une valeur propre de F et $v'' = \frac{1}{\lambda''} f(u) + u$ est un vecteur propre associé.

c) Posons $\lambda' = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}$ et $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $v'_i = \frac{1}{\lambda'} f(u_i) + u_i$.
Montrons que $(v'_1, v'_2, \dots, v'_k)$ est libre.
Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que : $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v'_i = 0_E$.
Alors $0_E = \underbrace{\frac{1}{\lambda'} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(u_i)}_{\in E_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i}_{\in E_2}$; donc $\frac{1}{\lambda'} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(u_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = 0$.

Comme $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ est libre on obtient : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.
Ceci achève de prouver que <u>$(v'_1, v'_2, \dots, v'_k)$ est libre.</u>
On montre de même que <u>$(v''_1, v''_2, \dots, v''_k)$ est libre.</u>

(Q3) a) f est un isomorphisme de E_2 sur E_1 ; ainsi $\dim E_2 = \dim E_1 = n$.
$E = E_1 \oplus E_2$ donc $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 = n + n = 2n$.
<u>$\dim E_1 = \dim E_2 = n$</u> et <u>$\dim E = 2n$.</u>

b) Notons λ'_k et λ''_k racines de $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda^2 - \gamma_k \lambda - 1 = 0$, pour tout k dans $[\![1, p]\!]$
$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda'_k \neq \lambda''_k$.
Mieux comme les $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ sont deux à deux distincts :
$\lambda'_1, \lambda''_1, \lambda'_2, \lambda''_2, \dots, \lambda'_p, \lambda''_p$ sont $2p$ réels deux à deux distincts (ok ?)
Mieux encore $\lambda'_1, \lambda''_1, \lambda'_2, \lambda''_2, \dots, \lambda'_p, \lambda''_p$ sont $2p$ valeurs propres de F deux à deux distinctes. Montrons que F n'a pas d'autres valeurs propres
Soit λ une valeur propre de F. D'après Q2a, $\lambda - \frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de D. Ainsi $\exists k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda - \frac{1}{\lambda} = \gamma_k$; $\lambda^2 - \lambda \gamma_k - 1 = 0$ et donc $\lambda = \lambda'_k$ ou $\lambda = \lambda''_k$.

Finalement $Sp(F) = \{\lambda'_1, \lambda''_1, \lambda'_2, \lambda''_2, \dots, \lambda'_p, \lambda''_p\}$.

F admet exactement $2p$ valeurs propres.

c) Supposons δ diagonalisable.

$E_2 = \bigoplus_{i=1}^{p} SEP(\delta, \mu_i)$; $n = \dim E_2 = \sum_{i=1}^{p} \dim SEP(\delta, \mu_i)$.

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ une base de $SEP(\delta, \mu_i)$; ainsi en reprenant les notations des questions précédentes $(v'_1, v'_2, \dots, v'_k)$ est une famille libre de $SEP(F, \lambda'_i)$; ainsi $\dim SEP(F, \lambda'_i) \geq \dim SEP(\delta, \mu_i)$; de même $\dim SEP(F, \lambda''_i) \geq \dim SEP(\delta, \mu_i)$.

Alors $\dim E = 2n \geq \sum_{i=1}^{p} \dim SEP(F, \lambda'_i) + \sum_{i=1}^{p} \dim SEP(F, \lambda''_i) \geq 2 \sum_{i=1}^{p} \dim SEP(\mu_i) = 2n$

Finalement : $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim SEP(F, \lambda'_i) + \sum_{i=1}^{p} \dim SEP(F, \lambda''_i) = \sum_{\lambda \in Sp(F)} \dim SEP(F, \lambda)$.

Par conséquent F est diagonalisable.

PARTIE C

(Q1) Rappelons que $Sp(\delta) = \{0, 4, 16\}$, $SEP(\delta, 0) = Vect(1)$, $SEP(\delta, 4) = Vect(1 - 2X^2)$ et $SEP(\delta, 16) = Vect(1 - 8X^2 + 8X^4)$

$(\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda^2 - 0 \times \lambda - 1 = 0) \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$

$(\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0) \Leftrightarrow \lambda = 2 - \sqrt{5}$ ou $\lambda = 2 + \sqrt{5}$

$(\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda^2 - 16\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8 - \sqrt{65}$ ou $\lambda = 8 + \sqrt{65}$. Ainsi : $Sp(F) = \{-1, 1, 2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}, 8-\sqrt{65}, 8+\sqrt{65}\}$

Pour $U_1 = 1$; $V'_1 = \frac{1}{1} f(U_1) + U_1$; $V''_1 = \frac{1}{-1} f(U_1) + U_1$.

$V'_1 = 2X U_1 - U'_1 + U_1 = 2X + 1$; $V''_1 = -(2X U_1 - U'_1) + U_1 = -2X + 1$.

$SEP(F, 1) = Vect(2X+1)$ et $SEP(F, -1) = Vect(-2X+1)$

Pour $U_2 = 1 - 2X^2$; $V'_2 = \frac{1}{2-\sqrt{5}} f(U_2) + U_2$ et $V''_2 = \frac{1}{2+\sqrt{5}} f(U_2) + U_2$.

$f(U_2) = 2XU_2 - U_2' = 2X(1-2X^2) - 4X = -4X^3 - 2X.$

$SEP(F, 2-\sqrt{5}) = Vect\left(\frac{1}{2-\sqrt{5}}(-4X^3-2X) + 1 - 2X^2\right)$ et $SEP(F, 2+\sqrt{5}) = Vect\left(\frac{1}{2+\sqrt{5}}(-4X^3-2X) + 1 - 2X^2\right).$

On montre de même que :

$SEP(F, 8-\sqrt{65}) = Vect\left(\frac{1}{8-\sqrt{65}}(16X^5 - 48X^3 + 18X) + (1 - 8X^2 + 8X^4)\right)$ et

$SEP(F, 8+\sqrt{65}) = Vect\left(\frac{1}{8+\sqrt{65}}(16X^5 - 48X^3 + 18X) + (1 - 8X^2 + 8X^4)\right).$

Q2 a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension 6 (prendre, par exemple $E = \mathbb{R}^6$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^6$).

Posons $E_1 = Vect(e_1, e_2, e_3)$ et $E_2 = Vect(e_4, e_5, e_6)$.

$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E_1, $\mathcal{B}_2 = (e_4, e_5, e_6)$ est une base de E_2 et $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ est une base de E, alors $E = E_1 \oplus E_2$.

- Soit f l'unique application linéaire de E_2 dans E_1 qui transforme $\mathcal{B}_2 = (e_4, e_5, e_6)$ en $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$.

Alors → $f(e_4) = e_1$, $f(e_5) = e_2$, $f(e_6) = e_3$.

→ f est un isomorphisme de E_2 dans E_1 car il transforme une base de E_2 en une base de E_1.

→ $M(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

→ $f^{-1}(e_1) = e_4$, $f^{-1}(e_2) = e_5$, $f^{-1}(e_3) = e_6$.

- Soit s l'endomorphisme de E_2 dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_2$ est B.

On considère l'application F qui à tout $x = x_1 + x_2 \in E$, $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, associe $F(x) = f^{-1}(x_1) + f(x_2) + s(x_2)$.

D'après B), F est un isomorphisme de E.

$e_1 = e_1 + 0_E$ avec $e_1 \in E_1$ et $0_E \in E_2$ donc $F(e_1) = f^{-1}(e_1) + f(0_E) + s(0_E) = e_4$.

De même $F(e_2) = e_5$ et $F(e_3) = e_6$.

$e_4 = 0_E + e_4$ avec $e_4 \in E_2$ et $0_E \in E_1$ donc $F(e_4) = f^{-1}(0_E) + f(e_4) + s(e_4)$.

$F(e_4) = e_1 + s(e_4) = e_1 + 2e_5 - 2e_6$.

De même $F(e_5) = e_2 + s(e_5) = e_2 + 2e_4 + 2e_6$ et $F(e_6) = e_3 + s(e_6) = e_3 + (-e_4 + e_5 + e_6)$.

Pour $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$. $\Pi_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$.

$\underline{\Pi_{\mathcal{B}}(F) = A}$.

donc $\Pi(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1, f) = I_3$, $\Pi_{\mathcal{B}_2}(s) = B$ et $\Pi_{\mathcal{B}}(F) = A$.

b) Cherchons les valeurs propres de B. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de

$$B - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 2 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & \frac{\lambda^2-\lambda-2}{2} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$; $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{\lambda}{2} L_1 \end{cases}$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$P(\lambda) = \frac{\lambda^2-\lambda-2}{2} - (2-\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda^2+\lambda-6) = \frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda+3)$

$\lambda \in Sp(B) \Leftrightarrow B - \lambda I_3$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$ non inversible $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\lambda = 0 \\ \text{ou} \\ P(\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou -3.

$Sp(B) = \{-3, 2\}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $BX = -3X \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = -3x \\ 2x + z = -3y \\ -2x + 2y + z = -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 5x + 5y = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ 5y + 5z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = x \end{cases}$

$SEP(B, -3) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$BX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = 2x \\ 2x + z = 2y \\ -2x + 2y + z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 2y + z = 0$.

$SEP(B, 2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

$Sp(B) = \{-3, 2\}$, $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\dim SEP(B,-3) + \dim SEP(B,2) = 3$ donc B est diagonalisable.

Alors s est diagonalisable, donc F est diagonalisable. Finalement $\underline{A \text{ est diagonalisable}}$.