SUJET 7

Dans ce problème, on se propose de calculer un équivalent, lorsque x tend vers 1^-, de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, où (a_n) est une suite réelle positive, terme général d'une série divergente et $a_n x^n$ est le terme général d'une série convergente pour $x \in [0,1[$.

La partie I étudie le cas $a_n = n^\alpha$.

Dans la partie II, on utilise (**uniquement**) le résultat (2) de la partie I pour calculer la valeur d'une intégrale, et pour déterminer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

La partie III permet d'obtenir un équivalent de la série de terme général $a_n\, x^n$ lorsque x tend vers 1^-, en particulier pour $a_n = \dfrac{1}{n}$ et dans des situations où les coefficients a_n valent 0 ou 1.

PST signifie prendre son temps pour faire propre et juste en vérifiant tout ce l'on affirme et ceci de manière très concise.

Partie I

Q1 Dans cette question, f est une application **continue, positive** de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On est prié de remarquer que la fonction n'est pas définie en 0 ! !

On suppose de plus que f est **décroissante** sur $]0,+\infty[$ (c'est donc la quatrième hypothèse sur f). On note h un réel strictement positif.

a) Montrer proprement en utilisant un résultat de cours que la série de terme général $f(nh)$ (et pas $f(n)$! !) est convergente (on pourra faire intervenir $g : t \to f(th)$ sur $[1,+\infty[$) **PST**.

b) Montrer que : $hf(h) \leqslant \int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $hf\big((n+1)h\big) \leqslant \int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant hf(nh)$.

c) Montrer l'encadrement suivant :

$$\int_h^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(il est fortement conseillé de traiter le problème en deux temps et avec des sommes finies).

d) En déduire que :

$$\lim_{h\to 0^+} h\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

e) Application : Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]-1,0]$. On pose $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = e^{-x}x^\alpha$.

Montrer que f vérifie les hypothèses voulues.

Montrer que :

$$\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[he^{-nh}(nh)^\alpha\right] = \Gamma(\alpha+1).$$

Q2 a) Soit α un élément de $]-1,+\infty[$.

Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0,1[$, la série de terme général $n^\alpha x^n$ converge.

La série converge-t-elle si x vaut 1 ?

b) α est un élément de $]-1,0]$. En utilisant le résultat de la question I 1 e) montrer que l'on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \qquad (1)$$

($h=-\ln x$ devrait le faire, non ?)

Q3 Généralisation de la formule (1). Dans cette question, α désigne un réel strictement positif.

a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0,1[$:

$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^\alpha-(n-1)^\alpha\right) x^n.$$

b) On suppose que α est élément de $]0,1]$. Montrer que pour tout élément n de $[\![2,+\infty[\![$:

$$\alpha n^{\alpha-1} \leqslant n^\alpha-(n-1)^\alpha \leqslant \alpha(n-1)^{\alpha-1}$$

(on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis avec $t\to t^\alpha$).

En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n$ pour x dans $[0,1[$, puis en utilisant le résultat de la question I 2 b), montrer que la formule (1) vaut encore **PST**.

Ainsi (1) vaut pour tout réel α élément de $]-1,1]$.

c) **Facultatif** On suppose que $\alpha>1$. S'inspirer de ce qui précède pour retrouver (1).

Ainsi : $\forall\alpha\in]-1,+\infty[\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \qquad (2)$

Partie II

Q1 a et b sont deux réels. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t$.

Dans la suite si a et b sont deux réels strictement positifs : $I(a,b)=\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t \qquad (3)$

Q2 Dans cette question a et b sont deux réels strictement positifs.

a) Etablir à l'aide d'un changement de variable simple que $I(a,b)=I(b,a)$.

b) Prouver que $I(a+1,b)+I(a,b+1)=I(a,b)$.

c) Exprimer $I(a,b+1)$ en fonction de $I(a+1,b)$ (IPP propre).

d) En déduire $I(a+1,b)$ en fonction de $I(a,b)$.

Montrer alors que :

$$I(a+1,b+1)=\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)}\,I(a,b).$$

Exprimer $I(a+2,b+2)$ en fonction de $I(a,b)$.

Q3 Dans toute cette question a et b sont deux éléments de $[2, +\infty[$.

Pour tout réel x de $[0, 1[$ et pour tout réel α de $]-1, +\infty[$, on pose désormais $g_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n$.

a) On considère une application $\ell : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$, de classe C^1, et on désigne par M_1 le maximum de $|\ell'(x)|$ lorsque x décrit $[\gamma, \delta]$.

Montrer que :

$$\left| \int_\gamma^\delta \ell(t)\,\mathrm{d}t - (\delta - \gamma)\,\ell(\gamma) \right| \leqslant \frac{M_1(\delta-\gamma)^2}{2} \qquad (4)$$

(on pourra, mais ce n'est pas la seule méthode, appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à une primitive de ℓ) **PST**.

b) n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Etablir que la fonction $x \mapsto x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$.

En lui appliquant la formule (4) sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$ où $x_k = \frac{k}{n}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$, et en notant M_1 le maximum de la valeur absolue de sa dérivée lorsque x décrit $[0, 1]$, montrer que :

$$|I(a,b) - u_n| \leqslant \frac{M_1}{2n} \quad \text{où} \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{a-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{b-1}$$

c) On admet le résultat suivant : Soient deux suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de réels positifs telles que les séries de termes généraux a_n et b_n convergent.

On pose, pour tout élément n de $[\![2, +\infty[\![$, $c_n = a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k\, b_{n-k}$.

Alors la série de terme général c_n converge et $\sum_{n=2}^{+\infty} c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

En déduire que pour x élément de $[0, 1[$:

$$g_{a-1}(x)\; g_{b-1}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n n^{a+b-1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n n^{a+b-1} x^n.$$

d) A l'aide des résultats précédents, montrer enfin que :

$$\forall x \in [0,1[,\ \left| g_{a-1}(x)\, g_{b-1}(x) - I(a,b)\, g_{a+b-1}(x) \right| \leqslant \frac{M_1}{2}\, g_{a+b-2}(x).$$

e) Déduire de ce qui précède que :

$$I(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad (5)$$

(on pourra sans doute multiplier par $(1-x)^{a+b}$ et utiliser un résultat important de la partie I).

Q4 a) En utilisant II 2 d, montrer que la formule (5) reste valable lorsque a et b sont deux réels strictement positifs.

b) Calculer $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ à l'aide du changement de variable $t = \sin^2(x)$ dans la définition (3).

En déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Partie III

Dans cette partie, on se propose de calculer un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ lorsque x tend vers 1^- dans différents cas particuliers.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Soit $x \in [0,1[$. On se propose de calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

a) Montrer que la série de terme général $\frac{x^n}{n}$ converge.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul N : $\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\,dt$.

c) En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \qquad (6)$$

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Dans cette question, on pose $a_n = \ln(n)$ pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que la série de terme général $\ln(n)\,x^n$ est convergente si $x \in [0,1[$ et diverge pour $x = 1$.

b) Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0,1[$:

$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\,x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\ln(n) - \ln(n-1)\Big)x^n.$$

c) Montrer que pour tout élément n de $[\![2,+\infty[\![$ on a :

$$\frac{1}{n} \leqslant \ln(n) - \ln(n-1) \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

d) En utilisant la formule (6), trouver un équivalent, lorsque x tend vers 1^-, de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Dans cette question, on considère p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On définit une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un entier } k \text{ tel que } n = k^p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note enfin, pour tout entier naturel n non nul : $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Par convention, on pose $A_0 = 0$.

a) Montrer que les séries de termes généraux $a_n x^n$ et $A_n x^n$ sont convergentes pour tout x dans $[0,1[$.

Sont-elles convergentes pour $x = 1$?

b) Soit m un entier naturel non nul.

Donner la valeur de A_n pour tout entier naturel n vérifiant $m^p \leqslant n < (m+1)^p$.

En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$n^{\frac{1}{p}} - 1 \leqslant A_n < n^{\frac{1}{p}}.$$

c) En utilisant la formule (2), donner un équivalent lorsque x tend vers 1^- de $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n$.

d) En calculant $(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n$ pour x dans $[0,1[$, donner un équivalent lorsque x tend vers 1^- de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

PARTIE I

Q1 a) Posons $\forall t \in [1,+\infty[$, $g(t) = f(ht)$.

f est continue, positive et décroissante sur $]0,+\infty[$ donc g est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$ (h est strictement positif !)

Ainsi la série de terme général $g(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$.

Soit $A \in [1,+\infty[$. $\displaystyle\int_1^A g(t)\,dt = \int_1^A f(ht)\,dt \underset{u=ht}{=} \int_h^{hA} f(u)\,\frac{1}{h}\,du = \frac{1}{h}\int_h^{hA} f(u)\,du.$

Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}(hA) \underset{h>0}{=} +\infty$ et $\int_h^{+\infty} f(u)\,du$ converge car $\int_0^{+\infty} f(u)\,du$ converge ; ainsi $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

Finalement la série de terme général $g(n)$ converge.

Ainsi <u>la série de terme général $f(nh)$ converge</u>.

b) Soit $\varepsilon \in]0,h[$.

$\forall t \in [\varepsilon,h]$, $f(h) \leq f(t)$; $\displaystyle\int_\varepsilon^h f(h)\,dt \leq \int_\varepsilon^h f(t)\,dt$; $(h-\varepsilon)f(h) \leq \int_\varepsilon^h f(t)\,dt$

Or $\int_0^h f(t)\,dt$ converge et $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}(h-\varepsilon)f(h) = hf(h)$.

Il vient donc en faisant tendre ε vers 0 : $\displaystyle hf(h) \leq \int_0^h f(t)\,dt$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $[nh,(n+1)h] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $\forall t \in [nh,(n+1)h]$, $f((n+1)h) \leq f(t) \leq f(nh)$.

En intégrant il vient $\displaystyle f((n+1)h)\int_{nh}^{(n+1)h} 1\,dt \leq \int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,dt \leq f(nh)\int_{nh}^{(n+1)h} 1\,dt$.

ce qui donne : $\displaystyle h\,f((n+1)h) \leq \int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,dt \leq h\,f(nh)$.

c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\int_h^{(q+1)h} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{q}\int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,dt \leq h\sum_{n=1}^{q} f(nh)$. En faisant tendre q vers $+\infty$

il vient $\displaystyle\int_h^{+\infty} f(t)\,dt \leq h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)$ car l'intégrale et la série convergent.

b) et c) permettent d'écrire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $hf((n+1)h) \leq \int_{nh}^{(n+1)h} f(t)dt$.

Alors $\sum_{n=0}^{q} hf((n+1)h) \leq \sum_{n=0}^{q} \int_{nh}^{(n+1)h} f(t)dt$.

Ainsi $\sum_{n=1}^{q+1} hf(nh) \leq \int_{0}^{(q+1)h} f(t)dt$. En faisant tendre q vers $+\infty$ on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} hf(nh) \leq \int_{0}^{+\infty} f(t)dt.$$

Finalement : $$\int_{h}^{+\infty} f(t)dt \leq h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \leq \int_{0}^{+\infty} f(t)dt.$$

d) Comme $\lim_{h \to 0^+} \int_{h}^{+\infty} f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ on obtient par encadrement : $\lim_{h \to 0^+} \left(h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\right) = \int_{0}^{+\infty} f(t)dt$.

e) f est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

$x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto x^{\alpha}$ sont décroissantes et positives sur $]0,+\infty[$ $(\alpha \leq 0)$.

Par produit f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

f est continue, positive et décroissante sur $]0,+\infty[$.

Rappelons que $\Gamma : x \mapsto \int_{0}^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est définie sur $\mathbb{R}_{+}^{*}$.

Or $\alpha + 1 > 0$ donc $\int_{0}^{+\infty} t^{(\alpha+1)-1} e^{-t} dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

$\int_{0}^{+\infty} f(t)dt$ converge ... et vaut $\Gamma(\alpha+1)$.

D'après ce qui précède : $\Gamma(\alpha+1) = \int_{0}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{h \to 0^+} \left(h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)\right) = \lim_{h \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[h e^{-nh} (nh)^{\alpha}\right]$.

Alors $$\lim_{h \to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(h e^{-nh} (nh)^{\alpha}\right) = \Gamma(\alpha+1).$$

(Q2) a] Soit x un élément de $[0,1[$.

Comme $|x|<1$: $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^{2+\alpha}x^n)=0$ par croissance comparée.

$\exists p\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\in[\![p,+\infty[\![$, $0\leq n^{2+\alpha}x^n\leq 1$. $\forall n\in[\![p,+\infty[\![$, $0\leq n^{\alpha}x^n\leq \frac{1}{n^2}$.

La convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $n^\alpha x^n$.

Pour tout x dans $[0,1[$, la série de terme général $n^\alpha x^n$ converge.

Si $x=1$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n^\alpha x^n=n^\alpha=\dfrac{1}{n^{-\alpha}}$. $\alpha\in]-1,+\infty[$ donc $-\alpha<1$.

Ainsi pour $x=1$ la série de terme général $n^\alpha x^n$ diverge.

$\lim\limits_{x\to1^-}(-\ln x)=0^+$ et $\lim\limits_{h\to0^+}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}[he^{-nh}(nh)^\alpha]\right)=\Gamma(\alpha+1)$.

Par composition : $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[(-\ln x)e^{-n(-\ln x)}(-n\ln x)^\alpha\right]\right)=\Gamma(\alpha+1)$.

Alors $\Gamma(\alpha+1)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[(-\ln x)^{\alpha+1}n^\alpha x^n\right]\right)=\lim\limits_{x\to1^-}\left((-\ln x)^{\alpha+1}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^\alpha x^n\right)$

Comme $\Gamma(\alpha+1)\neq0$: $(-\ln x)^{\alpha+1}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^\alpha x^n\underset{x\to1^-}{\sim}\Gamma(\alpha+1)$.

Or $-\ln x\underset{x\to1^-}{\sim}-(x-1)=1-x$ donc $(-\ln x)^{\alpha+1}\underset{x\to1^-}{\sim}(1-x)^{\alpha+1}$.

Par conséquent : $(1-x)^{\alpha+1}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^\alpha x^n\underset{x\to1^-}{\sim}\Gamma(\alpha+1)$.

Ceci donne : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^\alpha x^n\underset{x\to1^-}{\sim}\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$, et ceci pour tout $\alpha\in]-1,0]$.

Q3 a) Soit $x \in [0,1[$.

$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n - \sum_{n=2 \text{ ou } 1}^{+\infty} (n-1)^\alpha x^n$$

Ainsi $\forall x \in [0,1[,\ (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^\alpha - (n-1)^\alpha\right)x^n$.

b) $\alpha \in]0,1]$. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$. Posons $\forall t \in [n-1,n],\ \varphi(t) = t^\alpha$.

$[n-1,n] \subset \mathbb{R}_+^*$ donc φ est dérivable sur $[n-1,n]$.

$\forall t \in [n-1,n],\ \varphi'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$. φ' est décroissante sur $[n-1,n]$ car $\alpha-1 \leq 0$.

Alors $\forall t \in [n-1,n],\ \varphi'(n) \leq \varphi'(t) \leq \varphi'(n-1)$, $\forall t \in [n-1,n],\ \alpha n^{\alpha-1} \leq \varphi'(t) \leq \alpha(n-1)^{\alpha-1}$

L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$\alpha n^{\alpha-1}(n-(n-1)) \leq \varphi(n) - \varphi(n-1) \leq \alpha(n-1)^{\alpha-1}(n-(n-1))$

Alors $\alpha n^{\alpha-1} \leq n^\alpha - (n-1)^\alpha \leq \alpha(n-1)^{\alpha-1}$

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \alpha n^{\alpha-1} \leq n^\alpha - (n-1)^\alpha \leq \alpha(n-1)^{\alpha-1}$.

Soit $x \in [0,1[$.

ce qui précède permet d'écrire $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \alpha n^{\alpha-1}x^n \leq (n^\alpha-(n-1)^\alpha)x^n \leq \alpha(n-1)^{\alpha-1}x^n$.

Ainsi $\forall q \in [\![2,+\infty[\![,\ \alpha\sum_{n=2}^{q} n^{\alpha-1}x^n \leq \sum_{n=2}^{q}(n^\alpha-(n-1)^\alpha)x^n \leq \alpha\sum_{n=2}^{q}(n-1)^{\alpha-1}x^n$.

$\forall q \in [\![2,+\infty[\![,\ \alpha\sum_{n=2}^{q} n^{\alpha-1}x^n \leq \sum_{n=2}^{q}(n^\alpha-(n-1)^\alpha)x^n \leq \alpha x\sum_{n=1}^{q-1} n^{\alpha-1}x^n$.

Notons que les séries de termes généraux $n^{\alpha-1}x^n$ et $(n^\alpha-(n-1)^\alpha)x^n$ convergent.

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient alors :

$$\alpha\sum_{n=2}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n \leq \sum_{n=2}^{+\infty}(n^\alpha-(n-1)^\alpha)x^n \leq \alpha x\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n.$$

ou $\alpha\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n - \alpha x \leq \sum_{n=1}^{+\infty}(n^\alpha-(n-1)^\alpha)x^n - x \leq \alpha x\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n$.

Donc $\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n - \alpha x + x \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (n^\alpha - (n-1)^\alpha)x^n \leq \alpha x \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n + x.$

ou $\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n - \alpha x + x \leq (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n \leq \alpha x \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n + x.$

Alors $\underbrace{\alpha(1-x)^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n + (x-\alpha x)(1-x)^\alpha}_{A(x)} \leq (1-x)^{\alpha+1}\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n \leq \underbrace{\alpha x(1-x)^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n + x(1-x)^\alpha}_{B(x)}$

$\alpha \in]0,1]$ donc $\alpha - 1 \in]-1,0]$.

D'après ce qui précède $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n \underset{x\mapsto 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$; alors $\lim_{x\mapsto 1^-}\left((1-x)^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n\right) = \Gamma(\alpha).$

Alors $\lim_{x\mapsto 1^-} A(x) = \alpha\Gamma(\alpha) + (1-\alpha)\times 0 = \alpha\Gamma(\alpha)$ et

$\lim_{x\mapsto 1^-} B(x) = \alpha \times 1 \times \Gamma(\alpha) + 1\times 0 = \alpha\Gamma(\alpha).$

Par encadrement il vient $\lim_{x\mapsto 1^-}\left((1-x)^{\alpha+1}\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n\right) = \alpha\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha+1).$

ce qui donne encore $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n \underset{x\mapsto 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}.$

c) $\alpha > 1$. La démonstration est rigoureusement identique à la précédente sauf que l'accroissante sur $[n-1,n]$ et les inégalités du b) sont alors remplacées par $\alpha n^{\alpha-1} \leq n^\alpha - (n-1)^\alpha \leq \alpha(n-1)^{\alpha-1}$.

Exercice de contrôle : Retrouver le résultat pour $\alpha > 1$.

Ainsi ce qui précède donne bien : $\forall \alpha \in]-1,+\infty[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n \underset{x\mapsto 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}.$

PARTIE II

(Q1) a] $\omega : t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{b-1}$ est définie et continue sur $]0,1[$.

→ $\forall t \in]0,1[$, $\omega(t) \geq 0$

→ $\omega(t) \underset{0}{\sim} t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$

Ainsi $\int_0^{1/2} \omega(t)dt$ est de même nature que $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{1-a}}$ donc converge si et seulement si $1-a < 1$ (ou $a > 0$).

→ $\forall t \in]0,1[$, $\omega(t) \geq 0$

→ $\omega(t) \underset{1}{\sim} (1-t)^{b-1} = \frac{1}{(1-t)^{1-b}}$

. Ainsi $\int_{1/2}^1 \omega(t)dt$ est de même nature que $\int_{1/2}^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-b}}$ donc converge si et seulement si $1-b < 1$ (ou $b > 0$).

Finalement $\underline{\underline{I(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \text{ converge si et seulement si } a > 0, b > 0.}}$

(Q2) a] Soient u et v deux éléments de $]0,1[$.

$$\int_u^v t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \underset{x=1-t}{=} \int_{1-u}^{1-v} (1-x)^{a-1}x^{b-1}(-dx) = \int_{1-v}^{1-u} x^{b-1}(1-x)^{a-1}dx.$$

$\lim\limits_{u\to 0} (1-u) = 1$ et $\lim\limits_{v \to 1} (1-v) = 0$; ainsi $\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt$.

Donc $\underline{\underline{I(a,b) = I(b,a).}}$

b] $I(a+1,b) + I(a,b+1) = \int_0^1 t^a (1-t)^{b-1}dt + \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^b dt = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}[t+1-t]dt = I(a,b)$

$\underline{\underline{I(a+1,b) + I(a,b+1) = I(a,b).}}$

c] Soit $(u,v) \in]0,1[^2$. Faisons une intégration par parties.

$$\int_u^v t^{a-1}(1-t)^b \, dt = \left[\frac{t^a}{a}(1-t)^b \right]_u^v - \int_u^v \frac{t^a}{a}(-b(1-t)^{b-1})dt$$

$$\int_u^v t^{a-1}(1-t)^b dt = \frac{1}{a}v^a(1-v)^b - \frac{1}{a}u^a(1-u)^b + \frac{b}{a}\int_u^v t^a(1-t)^{b-1}dt.$$

$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^b dt$ converge, $\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}dt$ converge, $\lim\limits_{v\to 1}(\frac{1}{a}v^a(1-v)^b) = 0$ et

$\lim\limits_{u\to 0}(\frac{1}{a}u^a(1-u)^b) = 0$ ($a > 0, b > 0$!!). Ainsi en faisant tendre u vers 0 et v vers 1

On obtient : $\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^b\,dt = \frac{b}{a}\int_0^1 t^a(1-t)^{b-1}\,dt$; c'est-à-dire $\underline{\underline{I(a,b+1) = \frac{b}{a}\, I(a+1,b)}}$.

d) $I(a,b) \overset{b)}{=} I(a+1,b) + I(a,b+1) \overset{c)}{=} I(a+1,b) + \frac{b}{a}\, I(a+1,b) = \frac{a+b}{a}\, I(a+1,b)$.

$$\underline{\underline{I(a+1,b) = \frac{a}{a+b}\, I(a,b)}}.$$

$a \leftrightarrow b$

Alors $I(a+1,b+1) \overset{b \to b+1\,!}{=} \dfrac{a}{a+(b+1)}\, I(a,b+1) \overset{a)}{=} \dfrac{a}{a+b+1}\, I(b+1,a) = \dfrac{a}{a+b+1}\,\dfrac{b}{b+a}\, I(b,a)$

Donc $I(a+1,b+1) = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)}\, I(b,a) = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)}\, I(a,b)$

Finalement $\underline{\underline{I(a+1,b+1) = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)}\, I(a,b)}}$. Sans difficulté, en itérant on obtient :

$$\underline{\underline{I(a+2,b+2) = \frac{(a+1)(b+1)\,ab}{(a+b+3)(a+b+2)(a+b+1)(a+b)}\, I(a,b)}}$$

Q3 a) V1 f est de classe C^1 sur $[\gamma,\delta]$ et $M_1 = \max_{t\in[\gamma,\delta]} |f'(t)|$.

Alors $\left|\int_\gamma^\delta f(t)\,dt - (\delta-\gamma) f(\gamma)\right| = \left|\int_\gamma^\delta (f(t)-f(\gamma))\,dt\right| \le \int_\gamma^\delta |f(t)-f(\gamma)|\,dt$.

D'après l'inégalité des accroissements finis : $\forall t\in[\gamma,\delta],\ |f(t)-f(\gamma)| \le M_1|t-\gamma| = M_1(t-\gamma)$.

Ainsi $\left|\int_\gamma^\delta |f(t)-f(\gamma)|\,dt\right| \le \int_\gamma^\delta M_1(t-\gamma)\,dt = M_1\left[\frac{(t-\gamma)^2}{2}\right]_\gamma^\delta = M_1\,\frac{(\delta-\gamma)^2}{2}$

Finalement : $\left|\int_\gamma^\delta f(t)\,dt - (\delta-\gamma) f(\gamma)\right| \le \underline{\underline{\dfrac{M_1(\delta-\gamma)^2}{2}}}$.

V2 Soit H une primitive de f sur $[\gamma,\delta]$. H est de classe C^2 sur $[\gamma,\delta]$ car f est de classe C^1 sur ce segment. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à H sur $[\gamma,\delta]$ à l'ordre 1 donne :

$$|H(\delta) - H(\gamma) - (\delta-\gamma)H'(\gamma)| \le \frac{|\delta-\gamma|^2}{2}\max_{t\in[\gamma,\delta]}|H''(t)|$$

ce qui s'écrit encore :

$$\left|\int_\gamma^\delta f(t)\,dt - (\delta-\gamma) f'(\gamma)\right| \le \frac{(\delta-\gamma)^2}{2}\max_{t\in[\gamma,\delta]}|f'(t)| = \frac{(\delta-\gamma)^2 M_1}{2}.$$

b) $a>2, b>2$ donc $a-1>1$, $b-1>1$. Alors $a-1$ et $b-1$ sont strictement positifs.

Il faut donc comprendre que $\omega : x \mapsto x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est définie de la manière suivante :

$$\forall x \in [0,1],\ \omega(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{0,1\} \\ e^{(a-1)\ln x + (b-1)\ln(1-x)} & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}.$$

ω est de classe C^1 sur $]0,1[$.

$\lim_{x \to 0^+} \omega(x) = 0 = \omega(0)$ et $\lim_{x \to 1^-} \omega(x) = 0 = \omega(1)$ car $\lim_{x \to 0^+} [(a-1)\ln x + (b-1)\ln(1-x)] =$

$\lim_{x \to 1^-} [(a-1)\ln x + (b-1)\ln(1-x)] = -\infty$

Ainsi ω est continue sur $[0,1]$ et de classe C^1 sur $]0,1[$. (*)

$\forall x \in]0,1[,\ \omega'(x) = (a-1)x^{a-2}(1-x)^{b-1} + (b-1)x^{a-1}(1-x)^{b-2}$.

$$\lim_{x \to 0^+} \omega'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a>2 \\ 1 & \text{si } a=2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-} \omega'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } b>2 \\ 1 & \text{si } b=2 \end{cases}$$

Ainsi la restriction de ω' à $]0,1[$ admet une limite finie en 0 et 1. (**)

(*), (**) et le théorème de la limite de la dérivée montrent alors que ω est de classe C^1 sur $[0,1]$.

<u>Ainsi $\omega : x \mapsto x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$.</u>

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. La formule (4) appliquée à ω sur $[x_k, x_{k+1}]$ donne :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(t)\,dt - (x_{k+1}-x_k)\omega(x_k) \right| \leq \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} \max_{t \in [x_k, x_{k+1}]} |\omega'(t)| \leq \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} \max_{t \in [0,1]} |\omega'(t)|$$

Or $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$. Ainsi $\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(t)\,dt - \frac{1}{n}\omega(x_k) \right| \leq \frac{1}{2n^2} M_1$.

Alors $\left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(t)\,dt - \frac{1}{n}\omega(x_k) \right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(t)\,dt - \frac{1}{n}\omega(x_k) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2n^2} M_1 \right) = \frac{1}{2n} M_1$

ou $\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(t)\,dt - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \omega(x_k) \right| \leq \frac{1}{2n} M_1$.

Ne reste plus qu'à remarquer que : $\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} w(t)dt = \int_0^1 w(t)dt = I(a,b)$ et

$\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} w(x_\ell) = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{\ell}{n}\right)^{a-1}\left(1-\frac{\ell}{n}\right)^{b-1} = u_n$.

Alors $|I(a,b) - u_n| \leq \frac{M_1}{2n}$.

<u>Remarque</u>.. On retrouve bien évidemment la majoration de l'erreur dans la méthode des rectangles.

<u>c)</u> Soit $x \in [0,1[$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n^{a-1}x^n$ et $b_n = n^{b-1}x^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$. De plus les séries de termes généraux a_n et b_n convergent.

Posons $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $c_n = \sum_{\ell=1}^{n-1} a_\ell b_{n-\ell}$. Le rappel indique alors que la série de terme général c_n converge et $\sum_{n=2}^{+\infty} c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = g_{a-1}(x)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = g_{b-1}(x)$. $g_{a-1}(x)g_{b-1}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} c_n$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $c_n = \sum_{\ell=1}^{n-1} a_\ell b_{n-\ell} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^{a-1}x^\ell (n-\ell)^{b-1}x^{n-\ell} = x^n \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^{a-1}(n-\ell)^{b-1}$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $c_n = n^{a+b-2}x^n \sum_{\ell=\cancel{1}\,0}^{n-1}\left(\frac{\ell}{n}\right)^{a-1}\left(1-\frac{\ell}{n}\right)^{b-1} = n^{a+b-2}x^n\, n u_n$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $c_n = u_n\, n^{a+b-1}x^n$

Alors $\underline{\underline{g_{a-1}(x)\, g_{b-1}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(u_n n^{a+b-1}x^n\right) \overset{u_1=0}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n n^{a+b-1}x^n}}$, pour tout x dans $[0,1[$.

<u>e)</u> Soit $x \in [0,1[$.

$g_{a-1}(x)\, g_{b-1}(x) - I(a,b)\, g_{a+b-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n n^{a+b-1}x^n - I(a,b)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{a+b-1}x^n$

$\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{n=1}^{q} u_n n^{a+b-1}x^n - I(a,b)\sum_{n=1}^{q} n^{a+b-1}x^n\right| = \left|\sum_{n=1}^{q}(u_n - I(a,b))n^{a+b-1}x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{q}|u_n - I(a,b)|n^{a+b-1}x^n$.

$\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{n=1}^{q} u_n n^{a+b-1}x^n - I(a,b)\sum_{n=1}^{q} n^{a+b-1}x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{q}\frac{M_1}{2n}n^{a+b-1}x^n = \frac{M_1}{2}\sum_{n=1}^{q} n^{a+b-2}x^n$

En faisant tendre q vers $+\infty$ on obtient alors :

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\, n^{a+b-1}x^n - I(a,b)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{a+b-1}x^n\right| \le \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{a+b-2}x^n \quad \underline{\text{car}} \text{ les}$$

trois séries sont convergentes. Ce qui s'écrit encore :

$$|g_{a-1}(x)g_{b-1}(x) - I(a,b)\,g_{a+b-1}(x)| \le \frac{\pi}{2}\, g_{a+b-2}(x).$$

c) Rappelons que : $\forall \alpha \in]-1,+\infty[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha}x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$.

cela s'écrit encore : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\left((1-x)^{\alpha+1}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha}x^n\right) = \Gamma(\alpha+1)$.

Ce qui précède permet d'écrire, pour x dans $[0,1[$:

$$|(1-x)^{a+b}g_{a-1}(x)g_{b-1}(x) - I(a,b)(1-x)^{a+b}g_{a+b-1}(x)| \le |(1-x)^{a+b}|\frac{\pi}{2}g_{a+b-2}(x) ;$$

$$|(1-x)^{a}g_{a-1}(x)(1-x)^{b}g_{b-1}(x) - I(a,b)(1-x)^{a+b}g_{a+b-1}(x)| \overset{(\blacktriangle)}{\le} |(1-x)^{a+b}|\frac{\pi}{2}g_{a+b-2}(x) \underset{1-x>0}{=} (1-x)\frac{\pi}{2}(1-x)^{a+b-1}g_{a+b-2}(x)$$

$a-1\in]-1,+\infty[$, $b-1\in]-1,+\infty[$, $a+b-1\in]-1,+\infty[$ et $a+b-2\in]-1,+\infty[$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\left((1-x)^a g_{a-1}(x)\right)=\Gamma(a)$, $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\left((1-x)^b g_{b-1}(x)\right)=\Gamma(b)$, $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\left((1-x)^{a+b} g_{a+b-1}(x)\right)=\Gamma(a+b)$

et $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\left((1-x)\frac{\pi}{2}(1-x)^{a+b-1}g_{a+b-2}(x)\right) = 0\times\frac{\pi}{2}\times\Gamma(a+b-1) = 0$!

Par passage à la limite $(\blacktriangle)$ donne alors $|\Gamma(a)\Gamma(b) - I(a,b)\Gamma(a+b)| \le 0$!

Ainsi $\Gamma(a)\Gamma(b) - I(a,b)\Gamma(a+b) = 0$ ou $\displaystyle I(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ car $\Gamma(a+b)\neq 0$.

Alors $\forall a\in[2,+\infty[$, $\forall b\in[2,+\infty[$, $\displaystyle I(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Q4 Soit a et b deux réels strictement positifs.

$$I(a+2,b+2) \underset{Q2a)}{=} \frac{(a+1)(b+1)ab}{(a+b+3)(a+b+2)(a+b+1)(a+b)}\, I(a,b).$$

$$I(a,b) = \frac{(a+b+3)(a+b+2)(a+b+1)(a+b)}{(a+1)(b+1)\,ab} I(a+2,b+2) = \frac{(a+b+3)(a+b+2)(a+b+1)(a+b)}{(a+1)(b+1)ab} \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b+2)}{\Gamma(a+b+4)}$$

$a+2 \geq 2$
$b+2 \geq 2$!

Rappelons que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\Gamma(x+1)}{x} = \Gamma(x)$

Alors $\dfrac{\Gamma(a+2)}{a+1} = \Gamma(a+1)$; $\dfrac{\Gamma(a+2)}{(a+1)a} = \dfrac{\Gamma(a+1)}{a} = \Gamma(a)$; de même $\dfrac{\Gamma(b+2)}{(b+1)b} = \Gamma(b)$.

$$\frac{(a+b+3)(a+b+2)(a+b+1)(a+b)}{\Gamma(a+b+4)} = \frac{(a+b+2)(a+b+1)(a+b)}{\Gamma(a+b+3)} = \frac{(a+b+1)(a+b)}{\Gamma(a+b+2)} = \frac{a+b}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{1}{\Gamma(a+b)}.$$

Alors $I(a,b) = \dfrac{(a+b+3)(a+b+2)(a+b+1)(a+b)}{\Gamma(a+b+4)} \times \dfrac{\Gamma(a+2)}{(a+1)a} \times \dfrac{\Gamma(b+2)}{(b+1)(b)} = \dfrac{1}{\Gamma(a+b)}\Gamma(a)\Gamma(b)$

Finalement $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $I(a,b) = \displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

<u>Remarque</u>.- A ce propos on pourra revisiter ESSEC M 1 94.

⚠ Voir Q4 à la fin du devoir !!

PARTIE III

(Q1) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \dfrac{x^n}{n} \leq x^n$ et la série de terme général x^n converge car $x \in [0,1[$.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs indiquent que

<u>la série de terme général $\dfrac{x^n}{n}$ converge.</u>

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^x t^{n-1}\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{N} t^{n-1}\,dt = \int_0^x \frac{1-t^N}{1-t}\,dt$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\,dt = \Big[-\ln|1-t|\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\,dt = \underbrace{-\ln|1-x|}_{=-\ln(1-x)} - \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\,dt.$$

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\,dt$$

c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [0,x]$, $0 \le t^N$ et $0 \le \frac{1}{1-t} \le \frac{1}{1-x}$

$\forall t \in [0,x]$, $0 \le \frac{t^N}{1-t} \le \frac{1}{1-x} t^N$. $0 \le \int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt \le \frac{1}{1-x} \int_0^x t^N dt = \frac{1}{1-x} \frac{x^{N+1}}{N+1}$.

$$0 \le \int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt \le \frac{1}{1-x} \frac{x^{N+1}}{N+1} \le \frac{1}{1-x} \frac{1}{N+1}$$

$\lim\limits_{N \to +\infty} \left(\frac{1}{1-x} \frac{1}{N+1} \right) = 0$; par encadrement il vient alors $\lim\limits_{N \to +\infty} \int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt = 0$.

L'égalité du b) donne alors : $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Ainsi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

Q2 a) $x \in [0,1[$. $\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 \ln n \, x^n) = 0$ par croissance comparée.

Alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \le n^2 \ln n \, x^n \le 1$.

$\forall n \in [\![p,+\infty[\![$, $0 \le \ln n \, x^n \le \frac{1}{n^2}$ et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

Alors la série de terme général $\ln n \, x^n$ converge pour tout $x \in [0,1[$.

Si $x = 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln n \, x^n) = +\infty$ et la série de terme général $\ln n \, x^n$ diverge.

b) Soit $x \in [0,1[$.

$\forall q \in [\![2,+\infty[\![$, $(1-x)\sum\limits_{n=1}^{q} \ln n \, x^n = \sum\limits_{n=1}^{q} \ln n \, x^n - \sum\limits_{n=1}^{q} \ln n \, x^{n+1} = \sum\limits_{n=2}^{q} \ln n \, x^n - \sum\limits_{n=2}^{q+1} \ln(n-1) x^n$

Les séries de termes généraux $\ln n \, x^n$ et $\ln(n-1) x^n$ étant convergentes, en faisant tendre q vers $+\infty$ il vient :

$$(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln n \, x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n - \ln(n-1)) x^n.$$

c) Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall t \in [n-1,n]$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n-1}$.

Alors $\frac{1}{n}\int_{n-1}^{n} 1\,dr \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n-1}\int_{n-1}^{n} 1\,dr$ car $n-1 \leq n$.

Donc $\frac{1}{n}(n-(n-1)) \leq [\ln|t|]_{n-1}^{n} = \ln n - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}(n-(n-1))$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\frac{1}{n} \leq \ln n - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$.

d) Soit $x \in [0,1[$ et soit $q \in [\![2,+\infty[\![$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\frac{x^n}{n} \leq \ln n\, x^n - \ln(n-1)x^n \leq \frac{1}{n-1}x^n$

Alors $\sum_{n=2}^{q} \frac{x^n}{n} \leq \sum_{n=2}^{q}(\ln n - \ln(n-1))x^n \leq \sum_{n=2}^{q} \frac{1}{n-1}x^n = x\sum_{n=1}^{q+1}\frac{1}{n}x^n$

En faisant tendre q vers $+\infty$ il vient :

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \leq \sum_{n=2}^{+\infty}(\ln n - \ln(n-1))x^n \leq x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ car toutes les séries convergent.

Alors $-\ln(1-x) - x \leq (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \ln n\, x^n \leq -x\ln(1-x)$

Comme $x \in]0,1[$, $-\ln(1-x) > 0$. Alors $1 + \frac{x}{\ln(1-x)} \leq \frac{1-x}{-\ln(1-x)}\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, x^n \leq x$.

$\lim_{x\to1^-}\left(1 + \frac{x}{\ln(1-x)}\right) = \lim_{x\to1^-} x = 1$.

Par encadrement il vient alors : $\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1-x}{-\ln(1-x)}\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, x^n\right) = 1$.

Alors $\frac{1-x}{-\ln(1-x)}\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, x^n \underset{x\to1^-}{\sim} 1$.

Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln n\, x^n \underset{x\to1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.

(Q3) a) Soit $x \in [0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n \leq 1$ et $0 \leq A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \leq n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n x^n \leq x^n$ et $0 \leq A_n x^n \leq n x^n$.

Comme les séries de termes généraux x^n et $n x^n$ convergent il en est de même des séries de termes généraux $a_n x^n$ et $A_n x^n$.

Pour tout élément x de $[0,1[$ les séries de termes généraux $a_n x^n$ et $A_n x^n$ convergent.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_{k^p} = 1$; ainsi la suite de terme général a_n ne converge pas vers 0.

La série de terme général a_n diverge. De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n \leq A_n$; alors la série de terme général A_n diverge.

Ainsi pour $x = 1$, les séries de termes généraux $a_n x^n$ et $A_n x^n$ divergent.

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in [\![m^p, (m+1)^p [\![$.

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{1 \leq k^p \leq n} a_{k^p} = \sum_{k=1}^{m} a_{k^p} \overset{a_{k^p}=1\,!}{=} m.$$

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, $m^p \leq n < (m+1)^p \Rightarrow A_n = m$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $m = E(n^{1/p})$. $m \leq n^{1/p} < m+1$; $m^p \leq n < (m+1)^p$.

Notons également que $m \in \mathbb{N}^*$ car $n^{1/p} \geq 1$.

Alors $A_n = m = E(n^{1/p})$. Ainsi $A_n \leq n^{1/p} < A_n + 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^{\frac{1}{p}} - 1 \leq A_n \leq n^{\frac{1}{p}}$.

c) Soit $x \in [0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^{\frac{1}{p}} x^n - x^n \leq A_n x^n \leq n^{\frac{1}{p}} x^n$

Ainsi $g_{\frac{1}{p}}(x) - g_0(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n \leq g_{\frac{1}{p}}(x)$

Or $g_{\frac{1}{p}}(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \dfrac{\Gamma(\frac{1}{p}+1)}{(1-x)^{\frac{1}{p}+1}}$ et $g_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

$$(1-x)^{\frac{1}{p}+1} g_{\frac{1}{p}+1}(x) - \underbrace{g_0(x)(1-x)^{\frac{1}{p}+1}}_{(1-x)^{1/p}} \leq (1-x)^{\frac{1}{p}+1} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n \leq (1-x)^{\frac{1}{p}+1} g_{\frac{1}{p}+1}(x)$$

Alors $\lim\limits_{x \to 1^-} \left((1-x)^{\frac{1}{p}+1} g_{\frac{1}{p}+1}(x)\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \left[(1-x)^{\frac{1}{p}+1} g_{\frac{1}{p}+1}(x) - g_0(x)(1-x)^{\frac{1}{p}+1}\right] = \Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right) + 0$

Par encadrement il vient : $\lim\limits_{x\to 1^-} \left((1-x)^{\frac{1}{p}+1} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n x^n\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)$

Finalement $\displaystyle \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)}{(1-x)^{\frac{1}{p}+1}}$.

d) Soit $x \in [0,1[$. $\displaystyle (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} A_{n-1} x^n$

notons que $A_0 = 0$ par convention.

Alors $\displaystyle (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n - A_{n-1}) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors $\displaystyle \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} (1-x) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)}{(1-x)^{\frac{1}{p}+1}}$; $\displaystyle \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)}{(1-x)^{1/p}}$.

II Q4 a) Soit $(u,v) \in]0,1[^2$.

$$\int_u^v (t)^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\,dt \underset{\substack{t = \sin^2 x \\ x = \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}}}{=} \int_{\operatorname{Arcsin}\sqrt{u}}^{\operatorname{Arcsin}\sqrt{v}} (\sin^2 x)^{-1/2}(1-\sin^2 x)^{-1/2}\, 2\sin x \cos x\, dx$$

$$\int_u^v t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\,dt = \int_{\operatorname{Arcsin}\sqrt{u}}^{\operatorname{Arcsin}\sqrt{v}} \frac{1}{\sin x}\,\frac{1}{\cos x}\, 2\sin x\cos x\,dx = 2\left(\operatorname{Arcsin}\sqrt{v} - \operatorname{Arcsin}\sqrt{u}\right).$$

$\lim\limits_{u\to 0} \operatorname{Arcsin} u = 0$ et $\lim\limits_{v\to 1} \operatorname{Arcsin} v = \frac{\pi}{2}$. Alors $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \pi$.

b) $\pi = I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2$ or $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.