Remarque.. Les notations des différentes parties sont indépendantes

Rappel.. Une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1 (resp. C^2) sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $[a,b]$ et de dérivée continue sur $[a,b]$ (resp. deux fois dérivable sur $[a,b]$ et de dérivée seconde continue sur $[a,b]$)

PRELIMINAIRE α, β, γ sont trois réels tels que : $\alpha < \gamma < \beta$. u (resp. v) est une application de $[\alpha, \gamma]$ (resp. $[\gamma, \beta]$) dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur $[\alpha, \gamma]$ (resp. $[\gamma, \beta]$).

On pose : $\forall x \in [\alpha, \gamma]$, $w(x) = u(x)$ et $\forall x \in]\gamma, \beta]$, $w(x) = v(x)$.

Montrer que w est de classe C^2 sur $[\alpha, \beta]$ si et seulement si : $u(\gamma) = v(\gamma)$, $u'(\gamma) = v'(\gamma)$ et $u''(\gamma) = v''(\gamma)$

PARTIE I Dans cette partie E est l'espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur $[0,1]$. On se propose d'étudier le sous-ensemble S de E constitué des fonctions s telles que les restrictions de s à $[0, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, 1]$ soient polynomiales de degré inférieur ou égal à 3 et "d'approximer" une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par un élément de S.

Q1.. Un premier exemple.

On pose $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, $g(x) = 0$ et $\forall x \in]\frac{1}{2}, 1]$, $g(x) = (x - \frac{1}{2})^3$

utiliser le préliminaire pour montrer que $g \in S$.

Q2.. Un second exemple.

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, $h(x) = 2x^2 - x + 1$ et $\forall x \in]\frac{1}{2}, 1]$, $h(x) = ax^3 + bx + c$ trois!

Trouver (a,b,c) pour que h soit élément de S.

Q3.. Structure de S.

a.. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E.

b.. Soit G l'ensemble des éléments de S nuls sur $[0, \frac{1}{2}]$.
Montrer que $G = \{\lambda g ; \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(g)$ (On pourra procéder par double inclusion et utiliser la formule de Taylor en 1/2 pour les éléments de $\mathbb{R}_3[X]$)

c.. $\forall x \in [0,1]$, $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$ et $e_3(x) = x^3$. Montrer que e_0, e_1, e_2, e_3 sont des éléments de S.
On note F le sous-espace vectoriel engendré par e_0, e_1, e_2 et e_3.

Q4.. Dimension de S.

On se propose de montrer que : $S = F \oplus G$

a.. Montrer que (e_0, e_1, e_2, e_3, g) est une famille libre de S.

Qu'en déduire pour $F \cap G$, (e_0, e_1, e_2, e_3) et $\dim F$?

b.. Soit $s \in S$ et P l'élément de $\mathbb{R}_3[X]$ qui coïncide avec s sur $[0, \frac{1}{2}]$.
Vérifier que $s - P \in G$. En déduire que $s \in F + G$

c.. Déduire de ce qui précède que : $S = F \oplus G$; puis que : $\dim S = 5$
Montrer que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3, g)$ est une base de S.

d.. Trouver les coordonnées de h sur la base $\mathcal{B}$.

Q5.. Approximation d'une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ par un élément de S.

f est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 (!) sur $[0,1]$. On se propose de montrer qu'il existe un élément s de S et un seul tel que : $s(0) = f(0)$, $s(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$, $s(1) = f(1)$, $s'(0) = f'(0)$ et $s'(1) = f'(1)$.

a.. u est l'application de S dans $\mathbb{R}^5$ qui à s associe $(s(0), s(\frac{1}{2}), s(1), s'(0), s'(1))$.
Prouver que u est linéaire.

b.. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \{0_S\}$. En déduire que u est bijective ; puis le résultat proposé au début de Q5

c.. Trouver la matrice M de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}'$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Calculer M^{-1}.

Q6.. Application numérique.

$\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)(x-2)}$. f est clairement de classe C^1 sur $[0,1]$.

a.. Trouver l'unique élément s de S tel que : $s(0)=f(0)$, $s(1/2)=f(1/2)$, $s(1)=f(1)$, $s'(0)=f'(0)$, $s'(1)=f'(1)$

b.. Trouver $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = Ax + B + \dfrac{C}{x+1} + \dfrac{D}{x-2}$.
Calculer $\int_0^1 f(t)\,dt$ et comparer à $\int_0^1 s(t)\,dt$.

PARTIE II On se propose de généraliser l'approximation de Q6. On remplace $[0,1]$ par un segment $[a,b]$ quelconque $(a<b)$, que l'on subdivise en n intervalles (au lieu de 2) de même longueur.

On se donne donc $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $x_i = a + ih$.

$(a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ et $\forall i \in [\![0,n-1]\!]$, $x_{i+1} - x_i = h)$

On se donne encore une application f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $[a,b]$ et on se propose de montrer qu'il existe une application s de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et une seule telle que :

i) Pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$ la restriction de s à $[x_i, x_{i+1}]$ est polynomiale de degré ≤ 3

ii) $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $s(x_i) = f(x_i)$

iii) s est de classe C^2 sur $[a,b]$ et : $s'(a) = f'(a)$ et $s'(b) = f'(b)$.

Soit s une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant i). Pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, P_i est l'élément de $\mathbb{R}_3[X]$ qui coïncide avec s sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Q1. a) Montrer que s est de classe C^2 sur $[a,b]$ si et seulement si
$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $P_{i-1}(x_i) = P_i(x_i)$, $P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i)$ et $P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i)$ (on pourra utiliser le préliminaire) Le redoublant !

b) Montrer que s vérifie ii) et iii) si et seulement si

$P_0(a) = f(a)$, $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $P_{i-1}(x_i) = P_i(x_i) = f(x_i)$ et $P_{n-1}(b) = f(b)$ (1)

et $P'_0(a) = f'(a)$, $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i)$ et $P'_{n-1}(b) = f'(b)$ (2)

et $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i)$ (3)

$m_0, m_1, m_2, \dots, m_n$ sont des réels donnés.

Q2 a) On suppose que s vérifie (1) et que :

$P''_0(a) = m_0$, $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i) = m_i$ et $P''_{n-1}(b) = m_n$ (3')

Vérifier que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, $P''_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)}{h} + m_i \frac{(x - x_{i-1})}{h}$

En déduire que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ il existe $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, $P_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h} + m_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h} + \alpha_i (x - x_{i-1}) + \beta_i$;

calculer α_i et β_i en fonction de $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$, m_{i-1}, m_i et h.

b) Déduire, proprement, de qui précède qu'il existe une application s de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et une seule vérifiant i), (1) et (3').

Q3 $m_0, m_1, \dots, m_n$ sont des réels donnés et s est l'unique application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant i), (1) et (1').

Montrer que s vérifie (2) si et seulement si :

$$\begin{cases} 4m_0+2m_1 = \dfrac{12}{h^2}\left(f(x_1)-f(x_0)-hf'(x_0)\right) \\ \forall i\in [\![1,n-1]\!],\ m_{i-1}+4m_i+m_{i+1} = \dfrac{6}{h^2}\left(f(x_{i-1})-2f(x_i)+f(x_{i+1})\right). \\ 2m_{n-1}+4m_n = \dfrac{12}{h^2}\left(-f(x_n)+f(x_{n-1})+hf'(x_n)\right) \end{cases}$$

Donner une écriture matricielle de ce système.

Q4 $A\in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. $U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et $V = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = AU$

a) Calculer $v_0, v_1, \dots, v_n$ en fonction de $u_0, u_1, \dots, u_n$!

b) On pose $\alpha = \max\limits_{0\le i\le n} |u_i|$ et $\beta = \max\limits_{0\le i\le n} |v_i|$.

Montrer que : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $|v_i| \geq 4|u_i| - 2\alpha$.

(Rappel : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|x+y| \geq \big||x|-|y|\big| \geq |x|-|y|$)

En déduire que : $\beta \geq 2\alpha$.

c) Utiliser b) pour montrer que : $AU = 0 \Rightarrow U = 0$.

En déduire proprement que A est inversible.

d) Utiliser ce qui précède pour justifier l'existence et l'unicité d'une application s de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant i), ii) et iii).

PARTIE III Majoration de l'erreur. On se propose de trouver un majorant de $\max_{x\in[a,b]} |f(x)-s(x)|$ en supposant f de classe C^4 sur $[a,b]$ et en posant $M_4 = \sup_{a\le t\le b} |f^{(4)}(t)|$

(Q1).. $C = \begin{bmatrix} m_0 - f''(x_0) \\ m_1 - f''(x_1) \\ \vdots \\ m_n - f''(x_n) \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = AC$ a) Montrer en utilisant II Q4 b) que: $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $|m_k - f''(x_k)| \le \frac{1}{2} \max_{0\le i\le n} |d_i|$

Prouver que : $d_0 = \frac{12}{h^2}\left[f(x_1) - f(x_0) - hf'(x_0) - \frac{h^2}{6}(2f''(x_0) + f''(x_1))\right]$,

$\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $d_i = \frac{6}{h^2}\left[f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1}) - \frac{h^2}{6}\left(f''(x_{i-1}) + f''(x_{i+1}) + 4f''(x_i)\right)\right]$

Calculer d_n.

(Q2) a) Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$. Montrer que:

$\exists r_i \in]x_{i-1}, x_i[$, $f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(x_i) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(r_i)$ et que:

$\exists t_i \in]x_{i-1}, x_i[$, $f''(x_{i-1}) = f''(x_i) - hf^{(3)}(x_i) + \frac{h^2}{2} f^{(4)}(t_i)$

Donner deux égalités analogues pour $f(x_{i+1})$ et $f''(x_{i+1})$

En déduire que : $|d_i| \le \frac{3}{2} M_4 h^2$

b) Montrer en s'inspirant de ce qui précède que $|d_0| \le \frac{3}{2} M_4 h^2$ et $|d_n| \le \frac{3}{2} M_4 h^2$.

c) En déduire que: $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $|f''(x_k) - m_k| \le \frac{3}{4} M_4 h^2$

(Q3) $i \in [\![1,n]\!]$ a) v est la fonction affine sur $[x_{i-1}, x_i]$ qui vaut $f''(x_{i-1})$ en x_{i-1} et $f''(x_i)$ en x_i.

x est fixé dans $]x_{i-1}, x_i[$. On pose $\forall t \in [x_{i-1}, x_i]$, $\phi(t) = f''(t) - v(t) - k(t - x_{i-1})(x_i - t)$

Calculer k pour que l'on ait $\phi(x) = 0$.

En déduire que: $\exists c \in]x_{i-1}, x_i[$, $\phi''(c) = 0$.

Prouver alors que : $|f''(x) - v(x)| \le \frac{M_4}{2} |(x - x_{i-1})(x_i - x)| \le \frac{h^2}{8} M_4$.

Que dire de cela pour $x \in \{x_{i-1}, x_i\}$?

b) Montrer que: $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, $|f''(x) - s''(x)| \le \frac{h^2}{8} M_4 + \max\left(|f''(x_i) - m_i|, |f''(x_{i-1}) - m_{i-1}|\right)$

En déduire que : $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, $|f''(x) - s''(x)| \le \frac{7}{8} h^2 M_4$.

c) Montrer que: $\exists \xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$, $f'(\xi_i) = s'(\xi_i)$

En déduire par intégration que : $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, $|f'(x) - s'(x)| \le \frac{7}{8} h^3 M_4$; puis que : $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, $|f(x) - s(x)| \le \frac{7}{8} M_4 h^4$

(Q4) Conclure..

⚠ Dans la correction on ne reprend pas ce texte...

PARTIE IV

On se propose d'écrire un programme permettant d'approximer une fonction f définie sur $[a,b]$ par la méthode précédente. L'utilisateur donne n, a, b, x et le programme fournit $p(x)$. Pour simplifier nous supposerons que le programme contient une fonction f qui donne la valeur de f en un point (au moins si ce point appartient à l'ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ...) et une fonction derivee_f qui donne la valeur de f' en un point (au moins si ce point appartient à $\{a,b\}$).

Le programme contient la déclaration suivante :

```
Const DimMax=50;
Type Vecteur=array [0..DimMax] of real;
Var n:Integer; a,b,x:real; Point, fpoint, m:Vecteur;
```

Q1.. Ecrire une procédure qui donne les $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Appel : Subdi (n, a, b, Point)

Q2.. Ecrire une procédure qui donne les $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$

Appel : Valeur_Point (n, Point, fPoint)

Q3.. Ecrire une procédure qui calcule $\frac{12}{h^2}(f(x_1)-f(x_0)-hf'(x_0))$, $\frac{6}{h^2}(f(x_{i-1})-2f(x_i)+f(x_{i+1}))$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $\frac{12}{h^2}(f(x_{n-1})-f(x_n)+hf'(x_n))$.

Appel : Vect (n, Point, fPoint, m)...

Q4.. Ecrire une procédure qui calcule $m_0, m_1, \dots, m_n$.

1°. On rend le système triangulaire supérieur à l'aide du Pivot (seule la diagonale de la matrice est intéressante)

2°. On calcule la solution.

Appel : Donne_m (n, m) (m amène les valeurs obtenues en Q3 et ramène $m_0, m_1, \dots, m_n$).

Q5.. Ecrire une fonction calculant $p(x)$.

Appel : Approxime (n, x, Point, fpoint, m) ...

Q6.. Ecrire le programme principal.