SÉRIES

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels. La suite de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $u_{n+1}-u_n$.

En cas de convergence : $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=\big(\lim_{n\to+\infty}u_n\big)-u_{n_0}$.

Application. La suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$.

Posons, pour tout élément n de $[\![n_0,+\infty[\![$, $v_n=u_{n+1}-u_n$ et $\displaystyle S_n=\sum_{k=n_0}^{n}v_k$.

Remarquons que $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ \displaystyle S_n=\sum_{k=n_0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_{n_0}$.

L'équivalence des assertions suivantes donne alors le résultat.

- La série de terme général v_n converge.
- La suite de terme général S_n converge.
- La suite de terme général $u_{n+1}-u_{n_0}$ converge.
- La suite de terme général u_{n+1} converge.
- La suite de terme général u_n converge.

Application. Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Au vosinage de 0 : $\displaystyle\frac{x}{1+x}=x-x^2+\mathrm{o}\,(x^2)$ et $\displaystyle\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\,(x^2)$.

Alors $\displaystyle\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)=x-x^2-x+\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\,x^2=-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\,(x^2)$. Ainsi $\displaystyle\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\underset{x\to0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$.

Par conséquent $\displaystyle u_{n+1}-u_n=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2n^2}$ ou $\displaystyle-(u_{n+1}-u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}$.

La convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{2n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $-(u_{n+1}-u_n)$.

Ainsi la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge donc la suite de terme général $\displaystyle u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ converge.

Notons γ sa limite. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\ln n}=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}-1\right)=0$ Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}=1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$.

<u>Exercice</u> Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$

Exercice 2 **Produit de Cauchy de deux séries** $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels positifs.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=0}^{2n} c_k.$$

Montrer que si les séries de terme généraux a_n et b_n convergent, la série de terme général c_n converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{+\infty} b_n.$$

• Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n} a_i\, b_{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-i} a_i\, b_j\right).$$

$\forall i \in [\![0,n]\!],\ \forall j \in [\![0,n]\!],\ a_i\, b_j \geqslant 0$; donc $\forall i \in [\![0,n]\!],\ \forall j \in [\![0,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n-i} a_i\, b_j \leqslant \sum_{j=0}^{n} a_i\, b_j$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-i} a_i\, b_j\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} a_i\, b_j\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(a_i\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right)\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$. D'ou la première inégalité.

$$\sum_{k=0}^{2n} c_k = \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{k=i}^{2n} a_i\, b_{k-i}\right) = \sum_{i=0}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{2n-i} a_i\, b_j\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{2n-i} a_i\, b_j\right) + \sum_{i=n+1}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{2n-i} a_i\, b_j\right).$$

$\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n}\left(\sum_{j=0}^{2n-i} a_i\, b_j\right)$ est positif car les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont à termes positifs.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} c_k \geqslant \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{2n-i} a_i\, b_j\right)$.

$\forall i \in [\![0,n]\!],\ \forall j \in [\![0,2n]\!],\ a_i\, b_j \geqslant 0$ et $2n-i \geqslant n$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} c_k \geqslant \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{2n-i} a_i\, b_j\right) \geqslant \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} a_i\, b_j\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j$.

Ceci achève de prouver la seconde inégalité.

• Supposons que les séries de terme généraux a_n et b_n convergent. Les suites de termes généraux $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$ sont croissantes et convergent respectivement vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

La série de terme général c_n est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée ; cette série est donc convergente.

Remarque Ce résultat vaut encore si les deux séries sont absolument convergentes (et même si l'une est convergente et l'autre est absolument convergente).

$\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=0}^{2n} c_n$. En passant à la limite il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Exercice 3 **Formule de Stirling**.

Q1. Soit $(t_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels. Montrer que la suite de terme général t_n converge si et seulement si la série de terme général $t_{n+1}-t_n$ converge.

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = n!\left(\dfrac{e}{n}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$.

a) Montrer que : $v_n \sim -\dfrac{1}{12n^2}$

b) Utiliser Q1 pour prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel L strictement positif. En déduire un équivalent de $n!$.

Q3. On rappelle que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n}\,dt = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \quad \text{(Wallis).}$$

Montrer que $L=\sqrt{2\pi}$ et donc que :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Q1 On pose $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} (t_{k+1}-t_k)$. $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $S_n = t_{n+1}-t_{n_0}$.

Alors la série de terme général $t_{n+1}-t_n$ converge si et seulement si la suite de terme général $S_n = t_{n+1}-t_{n_0}$ converge ; autrement dit si et seulement si la suite de terme général t_{n+1} converge. Ceci est encore équivalent à la convergence de la suite de terme général t_n.

Ainsi la série de terme général $t_{n+1}-t_n$ converge si et seulement si la suite de terme général t_n converge.

Q2 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)!\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n} = \frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{e}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\sqrt{\frac{n}{n+1}} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

$$v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_{n+1} = \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln e + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{n}{n+1} = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$v_n = n\left(\dfrac{1}{n} - \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$. Cherchons un équivalent de v_n.

$1+\dfrac{x}{2} = 1+\dfrac{x}{2}+\mathrm{o}(x^3)$ et $\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)$, donc $\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{4}+\mathrm{o}(x^3)$.

$\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\ln(1+x) = x+\dfrac{x^3}{12}+\mathrm{o}(x^3)$. $x-\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\ln(1+x) = -\dfrac{x^3}{12}+\mathrm{o}(x^3)$. $x-\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\ln(1+x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^3}{12}$.

Par conséquent $v_n \sim n\left(-\dfrac{1}{12n^3}\right) \sim -\dfrac{1}{12n^2}$.

$-v_n \sim \dfrac{1}{12n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{12n^2} \geqslant 0$ et la série de terme général $\dfrac{1}{12n^2}$ converge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $-v_n$ donc également celle de la série de terme général v_n.

La série de terme général $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$ converge donc la suite de terme général $\ln u_n$ converge. Notons ℓ sa limite.

La suite de terme général u_n converge alors vers $L = e^{\ell}$ et L est strictement positif. L étant non nul $u_n \sim L$.

Par conséquent $n!\left(\dfrac{e}{n}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sim L$ ou $n! \sim L\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. On a également : $(2n)! \sim L\sqrt{2n}\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}$.

Alors $\dfrac{(2n)!}{(2^n\,n!)^2} \sim L\sqrt{2n}\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n} \dfrac{1}{2^{2n}}\,\dfrac{1}{(L\sqrt{n})^2}\left(\dfrac{e}{n}\right)^{2n} = \dfrac{\sqrt{2n}}{n\,L}$.

Or $\dfrac{(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$ donc $\dfrac{\sqrt{2n}}{n\,L}\,\dfrac{\pi}{2} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$. Alors $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{n}\,L} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. Ceci exige $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}\,L} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. C'est à dire $L = \sqrt{2\,\pi}$.

Finalement $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 4 **Séries et intégrales généralisées**

a est un entier et f une fonction **continue** (ou continue par morceaux), **décroissante** et **positive** sur $[a,+\infty[$.

Q1. On pose, pour tout n dans $[\![a,+\infty[\![$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=a}^{n} u_k$. Montrer que si n appartient à $[\![a,+\infty[\![$:

$$\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant S_n \leqslant \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(a).$$

Q2. Montrer que les suites de termes généraux $S_n - \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et $S_n - \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

Application. Montrer que $\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n\right)$ converge vers un réel γ appelé la constante d'Euler.

Q3. En suppose que la série de terme général $f(n)$ diverge. Montrer que pour tout élément n de $[\![a,+\infty[\![$:

$$S_n \sim \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Application. Montrer que : $\boxed{1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \sim \ln n}$.

Q1 f est décroissante sur $[a,+\infty[$. $\forall k \in [\![a,+\infty[\![,\ \forall t \in [k,k+1],\ f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$.

En intégrant il vient : $\forall k \in [\![a,+\infty[\![,\ f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$ (1).

En sommant on obtient $\forall n \in [\![a+1,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=a}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=a}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=a}^{n-1} f(k)$.

Soit encore $\forall n \in [\![a+1,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=a}^{n} f(k) - f(a) \leqslant \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=a}^{n} f(k) - f(n)$.

Ainsi $\forall n \in [\![a+1,+\infty[\![,\ \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant S_n = \sum_{k=a}^{n} f(k) \leqslant \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(a)$ (2).

Notons que ceci vaut encore pour $n = a$ ($f(a) \leqslant f(a) \leqslant f(a)$!)

Q2 Posons $\forall n \in [\![a,+\infty[\![, u_n = S_n - \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et $v_n = S_n - \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\forall n \in [\![a,+\infty[\![, u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ d'après (1).

$\forall n \in [\![a,+\infty[\![, v_{n+1} - v_n = f(n+1) - \displaystyle\int_a^{n+2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ d'après (1) (appliquée pour $n+1$).

Ainsi $(u_n)_{n\geqslant a}$ est décroissante et $(v_n)_{n\geqslant a}$ est croissante.

D'après (2), $\forall n \in [\![a,+\infty[\![,\ u_n = S_n - \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(n) \geqslant 0$. $(u_n)_{n\geqslant a}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente.

Toujours d'après (2), $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n \leqslant S_{n+1} \leqslant \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t + f(a)$. Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = S_n - \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(a)$.

$(v_n)_{n\geqslant a}$ est croissante et majorée par $f(a)$ donc convergente.

Application. On pose $a=1$ et $\forall t\in[1,+\infty[,\ f(t)=\dfrac{1}{t}\cdot$ f est continue, décroissante et positive sur $[1,+\infty[$.

Alors la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ converge.

Q3 Posons : $\forall n\in[\![a,+\infty[\![,\ I_n = \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme la série de terme général $f(n)$ diverge, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. f étant une fonction positive sur $[a,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

En particulier il existe un élément p de $[\![a,+\infty[\![$ tel que $\forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ I_n>0$.

$\forall n\in[\![a,+\infty[\![,\ I_n \leqslant I_n + f(n) \leqslant S_n \leqslant I_n + f(a)$. Donc $\forall n\in[\![p,+\infty[\![,\ 1 \leqslant \dfrac{S_n}{I_n} \leqslant 1 + \dfrac{f(a)}{I_n}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{f(a)}{I_n}=0$, il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{I_n}=1$. Ainsi $S_n\sim I_n$.

Reprenons l'application précédente. La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est divergente donc $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln n$.

Exercice 5 $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels qui est décroissante et qui converge vers zéro. ε est un réel qui vaut 1 ou -1.

Q1. Montrer que la série de terme général $u_n = \varepsilon\,(-1)^n a_n$ est convergente.

Q2. Montrer que, pour tout élément n de $[\![n_0,+\infty[\![$: $\left|R_{n+1}\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.

Q3. α est un réel. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\cdot$

Q4. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot$

Montrer que $u_n\sim v_n$ mais que les deux séries ne sont pas de même nature.

Pour simplifier, nous supposerons que $n_0=0$ et que $\varepsilon=1$. Alors $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante de réels qui converge vers zéro et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(-1)^n a_n$. Notons que dans ces conditions tous les termes de la suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ sont positifs.

Q1 Posons $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n u_k$. Montrons que $\Big(\big(S_{2p+1}\big)_{p\geqslant 0}, \big(S_{2p}\big)_{p\geqslant 0}\Big)$ est un couple de suites adjacentes.

$\forall p\in\mathbb{N},\ S_{2p+3}-S_{2p+1} = u_{2p+2}+u_{2p+3} = (-1)^{2p+2}\,a_{2p+2} + (-1)^{2p+3}\,a_{2p+3} = a_{2p+2}-a_{2p+3} \geqslant 0$.

$\big(S_{2p+1}\big)_{p\geqslant 0}$ est croissante.

$\forall p\in\mathbb{N},\ S_{2p+2}-S_{2p} = u_{2p+1}+u_{2p+2} = (-1)^{2p+1}\,a_{2p+1} + (-1)^{2p+2}\,a_{2p+2} = -a_{2p+1}+a_{2p+2} \leqslant 0$.

$\big(S_{2p}\big)_{p\geqslant 0}$ est décroissante.

$\lim\limits_{p\to+\infty}\big(S_{2p}-S_{2p+1}\big)=\lim\limits_{p\to+\infty}(-u_{2p+1})=\lim\limits_{p\to+\infty}(-(-1)^{2p+1}\,a_{2p+1})=\lim\limits_{p\to+\infty}a_{2p+1}=0.$

Ceci achève de montrer que $\Big(\big(S_{2p+1}\big)_{p\geqslant 0},\big(S_{2p}\big)_{p\geqslant 0}\Big)$ est un couple de suites adjacentes.

Alors les suites $\big(S_{2p+1}\big)_{p\geqslant 0}$ et $\big(S_{2p}\big)_{p\geqslant 0}$ convergent et ont la même limite ce qui suffit pour affirmer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Par conséquent la série de terme général u_n converge.

Q2 Posons $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$. Montrons que $\forall n\in\mathbb{N},\ |R_{n+1}|=|S-S_n|\leqslant|u_{n+1}|=a_{n+1}$.

Il suffit de prouver que $\forall p\in\mathbb{N},\ |R_{2p}|\leqslant a_{2p+1}$ et $\forall p\in\mathbb{N},\ |R_{2p+1}|\leqslant a_{2p+2}$.

$\big(S_{2p+1}\big)_{p\geqslant 0}$ est croissante et converge vers S donc $\forall p\in\mathbb{N},\ S_{2p+1}\leqslant S$.

$\big(S_{2p}\big)_{p\geqslant 0}$ est décroissante et converge vers S donc $\forall p\in\mathbb{N},\ S_{2p}\geqslant S$.

• $\forall p\in\mathbb{N},\ S_{2p+1}\leqslant S\leqslant S_{2p}$. $\forall p\in\mathbb{N},\ S_{2p+1}-S_{2p}\leqslant S-S_{2p}\leqslant 0$.

$\forall p\in\mathbb{N},\ 0\leqslant S_{2p}-S=-R_{2p}\leqslant S_{2p}-S_{2p+1}=-u_{2p+1}=a_{2p+1}$.

Par conséquent : $\forall p\in\mathbb{N},\ |R_{2p}|=-R_{2p}\leqslant a_{2p+1}$.

• $\forall p\in\mathbb{N},\ S_{2p+1}\leqslant S\leqslant S_{2p+2}$ (ok ?). $\forall p\in\mathbb{N},\ 0\leqslant S-S_{2p+1}\leqslant S_{2p+2}-S_{2p+1}$.

$\forall p\in\mathbb{N},\ 0\leqslant S-S_{2p+1}=R_{2p+1}\leqslant S_{2p+2}-S_{2p+1}=u_{2p+2}=a_{2p+2}$.

Par conséquent : $\forall p\in\mathbb{N},\ |R_{2p}+1|=R_{2p}\leqslant a_{2p+2}$.

Q3 Supposons que α est un réel négatif ou nul. Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right|=n^{-\alpha}\geqslant 1$. La suite de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne peut converger vers zéro et la série proposée diverge.

Supposons que α est un réel strictement positif. Alors la suite de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est décroissante et converge vers zéro.

D'après Q1, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Q4 La série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge et la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (Q3 avec $\alpha=1/2$) donc la série de terme général u_n diverge et celle de terme général v_n converge.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Notons que $v_n^2=\dfrac{1}{n}$. Ainsi $u_n=v_n^2+v_n$. Alors $\dfrac{u_n}{v_n}=v_n+1$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$.

Ainsi $u_n\sim v_n$ et les séries de terme généraux u_n et v_n ne sont pas de nature.

Exercice 6 **Convergence normale** I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite d'applica-
tions continues de I dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant n_0}$ de réels telle que :

- la série de terme général α_n est convergente
- $\forall x\in I,\ \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ |u_n(x)|\leqslant\alpha_n$

Q1. Montrer que pour tout élément x de I, la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente.

Désormais si x est dans I et n dans $\mathbb{N}$, $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$, $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ et $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.

Q2. **Sans indication** Montrer que $S: x \to S(x)$ est continue en tout point de I.

Q2. **Avec indications** c est un élément de I. On se propose de montrer que $S: x \to S(x)$ est continue en c à l'aide de la définition.

Soit ε un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que l'on peut trouver un élément p de $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ |S(x)-S(c)| \leqslant |S_p(x)-S_p(c)| + 2\sum_{k=p+1}^{+\infty} \alpha_k \leqslant |S_p(x)-S_p(c)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Conclure en utilisant la continuité de S_p.

Q3. a et b sont deux éléments de I tels que : $a \leqslant b$. Montrer que :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

(montrer que si n est un élément de $\mathbb{N}$: $\left|\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b S_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k$).

$\boxed{\textbf{Q1}}$ $\forall x \in I,\ \forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ |u_n(x)| \leqslant \alpha_n$ et la série de terme général α_n converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la séries de terme général $|u_n(x)|$ converge pour tout élément x de I.

Ainsi, pour tout x dans I la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente (donc convergente).

$\boxed{\textbf{Q2}}$ $S: x \to \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur I. Montrons que cette fonction est continue sur I.

Posons pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k$.

Notons que $\forall x \in I,\ \forall n \in [\![n_0, +\infty[\![,\ |R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leqslant r_n$.

Soit c un élément de I. Montrons que S est continue en c. C'est à dire que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x-c| < \eta \Rightarrow |S(x)-S(c)| < \varepsilon.$$

Soit x un élément de I et n un élément de $[\![n_0, +\infty[\![$.

$|S(x)-S(c)| = \big|\big(S_n(x)-S_n(c)\big) + \big(R_n(x)-R_n(c)\big)\big| \leqslant |S_n(x)-S_n(c)| + |R_n(x)-R_n(c)|$.

$|S(x)-S(c)| \leqslant |S_n(x)-S_n(c)| + |R_n(x)| + |R_n(c)| \leqslant |S_n(x)-S_n(c)| + 2r_n$.

Soit ε un réel strictement positif. $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ (reste d'une série convergente) donc il existe un élément p de $[\![n_0, +\infty[\![$ tel que : $\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ |r_n| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Ainsi on a $|S(x)-S(c)| \leqslant |S_p(x)-S_p(c)| + 2r_p \leqslant |S_p(x)-S_p(c)| + \frac{\varepsilon}{2}$.

S_p est continue sur I comme somme finie d'applications continues de I dans $\mathbb{R}$.

Alors $\exists \eta \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x-c| < \eta \Rightarrow |S_p(x)-S_p(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi $\forall x \in I,\ |x-c| < \eta \Rightarrow |S(x)-S(c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ceci achève de prouver la continuité de S en c.

$$\boxed{x \to \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k(x) \text{ est continue en tout point de } I.}$$

Q3 Soit a et b deux éléments de I tels que $a \leqslant b$. Montrons que $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Il s'agit de montrer que $\displaystyle\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{n} \int_a^b u_k(t)\,\mathrm{d}t$ ou que $\displaystyle\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \sum_{k=n_0}^{n} u_k(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrons donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\left|\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b S_n(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b R_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |R_n(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b r_n\,\mathrm{d}t = (b-a)\,r_n$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big((b-a)\,r_n\Big) = 0$ il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque Ceci vaut encore clairement pour $a > b$. Ainsi :

$$\boxed{\forall (a,b) \in I^2,\ \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 7 $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs telle que la série de terme général a_n soit convergente.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose : $\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $b_n = na_n$.

On se propose de montrer que les séries de termes généraux b_n et R_n sont de même nature et ont même somme.

Q1. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} ka_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n.$$

Q2. Montrer que si la série de terme général R_n converge alors la série de terme général b_n converge.

Q3. On suppose que la série de terme général b_n converge.

Montrer que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ nR_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

En déduire que la série de terme général R_n converge et a même somme que la série de terme général b_n.

Q4. Conclure.

Q5. **Application.** Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X possède une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > n)$ converge. En cas d'existence montrer que $\displaystyle E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Q1. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Observons que : $\displaystyle\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = \sum_{i=k}^{+\infty} a_i - \sum_{i=k+1}^{+\infty} a_i = R_{k-1} - R_k$.

Alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,a_k = \sum_{k=1}^{n} k\,a_k = \sum_{k=1}^{n} k\,(R_{k-1} - R_k) = \sum_{k=1}^{n} k\,R_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k\,R_k$.

Une petite translation d'indice donne sans difficulté : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,R_k - \sum_{k=1}^{n} k\,R_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,R_k - \sum_{k=0}^{n} k\,R_k$.

Alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1-k)\,R_k - n\,R_n = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n\,R_n.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} k\,a_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n\,R_n.}$$

Q2. Supposons que la série de terme général R_n converge. Posons $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} R_k$.

Cette série est à termes positifs donc $\forall n \in \mathbb{N},\ -n\,R_n \leqslant 0$ et $0 \leqslant \sum_{k=0}^{n} R_k \leqslant R$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,a_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n\,R_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} R_k \leqslant R.$

On obtient donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} k\,a_k \leqslant R$. Mieux $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k\,a_k \leqslant R$.

Alors la série de terme général $k\,a_k$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par R ; la série de terme général $k\,a_k$ est donc convergente.

$$\boxed{\text{Si la série de terme général } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \text{ converge alors la série de terme général } b_n = n\,a_n \text{ converge.}}$$

Q3. Réciproquement supposons que la série de terme général $b_n = n\,a_n$ converge.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons R'_n le reste d'indice n de cette série.

Notons que $\forall n \in \mathbb{N},\ R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,a_k$ et que $\lim_{n\to+\infty} R'_n = 0$.

Soit n dans $\mathbb{N}$. $n\,R_n = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\,a_k$.

Or $\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ n \leqslant k$ et $a_k \geqslant 0$. Donc $\forall k \in [\![n+1, +\infty[\![,\ n\,a_k \leqslant k\,a_k$.

Alors $n\,R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\,a_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,a_k = R'_n$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant n\,R_n \leqslant R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,a_k$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} R'_n = 0$ le théorème d'encadrement donne $\lim_{n\to+\infty} n\,R_n = 0$.

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,a_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - n\,R_n$; ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} R_k = \sum_{k=0}^{n} k\,a_k + n\,R_n$.

Les suites de termes généraux $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,a_k$ et $n\,R_n$ étant convergentes, la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} R_k$ converge.

Ainsi la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} R_k$ converge donc la série de terme général R_n converge.

Notons également que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} R_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} R_k = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} k\,a_k + n\,R_n \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,a_k + 0 = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,a_k.$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si la série de terme général } n\,a_n \text{ converge alors la série de terme général } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \text{ converge et} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n.\end{array}}$$

Q4. Il résulte de Q2 et Q3 que :

> Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs telle que la série de terme général a_n soit convergente.
>
> Les séries de terme généraux $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $n\,a_n$ sont de même nature.
>
> En cas de convergence : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n$.

Q5. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = P(X = n)$.

$(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs telle que la série de terme général $a_n = P(X = n)$ converge.

Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$; notons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) = P(X > n)$.

Ce qui précède montre que les séries de terme généraux $n\,a_n$ et R_n sont de même nature.

Ainsi les séries de terme généraux $n\,P(X = n)$ et $P(X > n)$ sont de même nature.

Mieux en cas de convergence : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\,P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Rappelons que X possède une espérance si et seulement si la série de terme général $n\,P(X = n)$ est absolument convergente.

Comme cette série est à termes positifs, $E(X)$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $n\,P(X = n)$ est convergente. Alors :

> X possède une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > n)$ est convergente.
>
> En cas d'existence $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,P(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - n\,P(X > n)$.
- X possède une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > k)$ converge. En cas d'existence :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$$

- Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\,P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\,\big(P(X > k-1) - P(X > k)\big)$.

$$\sum_{k=0}^{n} k\,P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k\,P(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\,P(X > k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,P(X > k) - \sum_{k=1}^{n} k\,P(X > k).$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\,P(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1-1)\,P(X > k) - n\,P(X > n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - n\,P(X > n).$$

- \- Supposons que la série de terme général $P(X > k)$ converge.

Cette série étant à termes positifs, la suite de ses sommes partielles est majorée pas sa somme.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,P(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - n\,P(X > n) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$. Notons que ceci vaut encore pour $n=0$.

La série de terme général est à termes positifs et la suite des ses sommes partielles est majorée (par $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$). Cette série est donc convergente et même absolument convergente (elle est à termes positifs !).

Ainsi $E(X)$ existe.

- Réciproquement supposons que $E(X)$ existe et montrons que la série de terme général $P(X>k)$ converge.

Commençons par montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(n\,P(X>n)\Big)=0$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall r \in [\![n+1,+\infty[\![,\ n \sum_{k=n+1}^{r} P(X=k) = \sum_{k=n+1}^{r} n\,P(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{r} k\,P(X=k)$.

$\forall r \in [\![n+1,+\infty[\![,\ n \sum_{k=n+1}^{r} P(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,P(X=k)$ (la série de terme général est convergente et à terme positifs).

En faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient : $0 \leqslant n\,P(X>n) = n \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,P(X=k)$.

De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,P(X=k)\right)=0$ comme reste d'une série convergente.

On obtient alors par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n\,P(X>n))=0$.

Rappelons que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - n\,P(X>n)$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} P(X>k)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k) + n\,P(X>n)\right) = E(X)+0 = E(X)$

Ainsi la série de terme général $P(X>k)$ converge et sa somme est $E(X)$.

Ceci achève largement de prouver ce qui est demandé.

<u>Exercice</u> Soit $(a_n)_{n\geqslant n}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série de terme général a_n converge et on pose : $\forall n\in\mathbb{N},\ r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $b_n = n\,a_n$. Montrer que les séries de termes généraux a_n et b_n sont de même nature et qu'en cas de convergence elles ont même somme. Retrouver le résultat précédent.

<u>Exercice</u> Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que X possède un moment d'ordre 2 si et seulement si la série de terme général $(2k+1)\,P(X>k)$ est convergente. En cas d'existence montrer que $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\,P(X>k)$.

Exercice 9 f est une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$. Si f est positive sur $[a,+\infty[$:

- L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{n} f(t)\,dt$ converge.
- L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est de même nature que la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$ converge.

La “positivité” est essentielle ; la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{n}\cos(\pi\,t)\,dt$ converge sans que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(\pi\,t)\,dt$ ne converge.

Posons $n_0 = \text{Max}(0, [a] + 1)$ et notons que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

• La fonction f étant positive, $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $g : x \to \displaystyle\int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[n_0, +\infty[$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ car f est positive.

La suite de terme général $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc croissante. Elle converge donc si et seulement si elle est majorée.

Il convient donc de prouver que g est majorée sur $[n_0, +\infty[$ si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

Supposons que g est majorée sur $[n_0, +\infty[$. Il existe un réel M tel que : $\forall x \in [n_0, +\infty[$, $\displaystyle\int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$.

En particulier $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$ $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$ et la suite de terme général $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

Réciproquement supposons que la suite de terme général $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

Il existe un réel M tel que : $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$.

Alors $\forall x \in [n_0, +\infty[$, $\displaystyle\int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_0}^{[x]+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$ (f est positive). g est majorée sur $[n_0, +\infty[$.

• Notons que les suites de termes généraux $\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Observons alors que $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Donc la série de terme général $\displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc si et seulement l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^n \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\big(\sin(\pi n) - \sin(0)\big) = 0$. Donc la suite de terme général $\displaystyle\int_0^n \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors $g : x \to \displaystyle\int_0^{x} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie ℓ.

$\forall x \in [0, +\infty[$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{x} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\big(\sin(\pi x) - \sin(0)\big) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(n) = \ell$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g\left(2n + \frac{1}{2}\right) = \ell$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = 0$ et $g\left(2n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\pi}$. Alors $\ell = 0 = \dfrac{1}{\pi}$! ! !

Ainsi g n'a pas de limite et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\pi t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 10 f est une application de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ convergent.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (t-n)f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Q2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

Q3. En déduire que la série de terme général $f(n)$ converge.

Q4. Application : déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$.

Q1 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Notons que $t \to t - n$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \to 1$. Une intégration par parties simple donne alors :

$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n+1) - \big[(t-n)\,f(t)\big]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} (t-n)\,f'(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} (t-n)\,f'(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Q2 Pour montrer que la suite de terme général $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge il suffit de montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. Montrons en fait que cette série est absolument convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant |u_{n+1} - u_n| = \left|\displaystyle\int_n^{n+1} (t-n)\,f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_n^{n+1} |t-n|\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} (t-n)\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant |u_{n+1} - u_n| \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} (n+1-n)\,|f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \quad (*)$

Montrons alors que la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Il suffit de montrer que la suite des sommes partielles de cette série est majorée car elle est à termes positifs.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ car $|f'|$ est positive et $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. $(*)$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent alors la convergence de la séries de terme général $|u_{n+1} - u_n|$.

La séries de terme général $u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente donc convergente. Alors :

$$\boxed{\text{La suite de terme général } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge}}.$$

Q3 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc $x \to \displaystyle\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$.

Ceci permet de dire que la suite de terme général $\displaystyle\int_1^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = u_n + \displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi la suite de terme général $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ converge comme somme de deux suites convergentes.

$$\boxed{\text{La série de terme général } f(n) \text{ converge}}.$$

Q4 Posons $\forall x\in[1,+\infty[,\ f(x)=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}\cdot$ f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.

D'après ce qui précède la convergence de la série de terme général $\dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ résultera de la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Soit A un élément de $[1,+\infty[$. Le changement de variable $u=\sqrt{t}$ donne $\displaystyle\int_1^A\frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{A}}\frac{\sin u}{u^2}\,(2u)\,\mathrm{d}u=2\int_1^{\sqrt{A}}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$.

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\sqrt{A}=+\infty$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ (Dirichlet) converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

$\forall x\in[1,+\infty[,\ |f'(x)|=\dfrac{1}{x^2}\left|\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\cos\sqrt{x})\,x-\sin\sqrt{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}|\cos\sqrt{x}|+|\sin\sqrt{x}|\right)\leqslant\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}+1\right)$.

$\forall x\in[\boxed{4}+\infty[,\ 0\leqslant|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)=\dfrac{1}{x^{3/2}}$.

La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ et les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_1^{+\infty}|f'(t)|\,\mathrm{d}t$. Ce qui achève de montrer que

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{\sin\sqrt{n}}{n} \text{ converge}}.$$

Exercice 11 **Etude d'une fonction définie par une série**.

On considère la fonction numérique de la variable réelle $f:\ x\to\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^2x}$.

Q1. Trouver le domaine de définition de f.

Q2. Etudier la monotonie de f.

Q3. Etudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ (on pourra remarquer que : $n\leqslant n^2$!).

Q4. x est un réel strictement positif. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que : $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}-1\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$ (on pourra encadrer $\int_k^{k+1}e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$).

En déduire la limite de f en 0.

Q5. a est un élément du domaine de f. On se propose de montrer que f est dérivable en a et que $f'(a)=-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\,e^{-n^2a}$.

a) Montrer que si p est dans $\mathbb{N}$ et c dans $]0,+\infty[$ la série de terme général $n^p\,e^{-c\,n^2}$ converge.

b) Soit h un réel non nul tel que : $|h|<a/2$. Montrer que $\left|\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\,e^{-n^2a}\right|\leqslant|h|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4}{2}\,e^{-n^2a/2}$ et conclure (on rappelle que $|e^u-1-u|\leqslant\frac{|u|^2}{2}\,e^{|u|}$).

Q6. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ • Notons que si x est un réel négatif ou nul, la suite de terme général $e^{-n^2 x}$ ne tend pas vers zéro et la série associée n'est donc pas convergente.

• Soit x un réel strictement positif. $\forall n \in \mathbb{N}^*, -n^2 x \leqslant -n\, x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant e^{-n^2 x} \leqslant e^{-n\, x} = \left(e^{-x}\right)^n$.

La convergence de la série de terme général $\left(e^{-x}\right)^n$ ($|e^{-x}| < 1$) et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général e^{-nx^2}.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } f \text{ est }]0, +\infty[.}$$

Remarque Soit x *un élément de* $]0, +\infty[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant e^{-n^2 x} \leqslant (e^{-x})^n$.

Donc $0 \leqslant f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n = e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}\cdot$

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Soient x et y deux éléments de $]0, +\infty[$ tels que $x \leqslant y$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant e^{-n^2 y} \leqslant e^{-n^2 x}$.

Donc $f(y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 y} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x} = f(x)$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est décroissante}}.$$

$\boxed{\textbf{Q3}}$ La remarque de Q1. donne $\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{e^x - 1}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$, par encadrement on obtient : $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$

$\boxed{\textbf{Q4}}$ x est un réel strictement positif.

a) Soit A un réel positif. Le changement de variable $u = \sqrt{x}\, t$ donne $\displaystyle\int_0^A e^{-x\, t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}\, A} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u$.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-x\, t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\cdot$ Ainsi

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x\, t^2}\, \mathrm{d}t \text{ existe et vaut } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\cdot}$$

b) $g_x : t \to e^{-x\, t^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$. $\forall k \in \mathbb{N},\ g_x(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} g_x(t)\, \mathrm{d}t \leqslant g_x(k)$.

En sommant on obtient : $\forall N \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N} g_x(k+1) \leqslant \sum_{k=0}^{N} \int_k^{k+1} g_x(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{N} g_x(k)$.

Ainsi $\forall N \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N+1} g_x(k) \leqslant \int_0^{N+1} g_x(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{N} g_x(k) + 1$ et en faisant tendre N vers $+\infty$ il vient :

$f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\, t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant f(x) + 1$. Par conséquent : $\boxed{\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}} - 1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}\cdot}$

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} - 1\right) = +\infty$ donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.}$

Remarque $\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}\, f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Par encadrement il vient alors $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\,f(x)\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ *et ainsi :* $f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot$

Q5 a) $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2\,n^p\,e^{-n^2\,c}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(n^{p+2}\,e^{-n^2\,c}\right)=0$ par croissance comparée.

Ainsi il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que $\forall n\in[\![q,+\infty[\![,\ n^2\,n^p\,e^{-n^2\,c}\leqslant 1$. $\forall n\in[\![q,+\infty[\![,\ 0\leqslant n^p\,e^{-n^2\,c}\leqslant\dfrac{1}{n^2}\cdot$

La convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $n^p\,e^{-n^2\,c}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N} \text{ et pour tout réel strictement positif } c, \text{ la série de terme général } n^p\,e^{-c\,n^2} \text{ converge.}}$$

b) h est un réel non nul tel que : $|h|<a/2$. Posons $\Delta(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\,e^{-n^2\,a}$ (la somme existe d'après a) et $a+h$ est dans le domaine de f car $|h|<a/2$ donne $-a/2<h<a/2$ donc $0<a/2<a+h$).

$$h\,\Delta(h)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^2\,(a+h)}-\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^2\,a}+h\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\,e^{-n^2\,a}=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-n^2\,a}\left(e^{-n^2\,h}-1+n^2\,h\right).$$

Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{N}e^{-n^2\,a}\left(e^{-n^2\,h}-1+n^2\,h\right)\right|\leqslant\displaystyle\sum_{n=1}^{N}e^{-n^2\,a}\left|e^{-n^2\,h}-1-(-n^2\,h)\right|$.

$$\left|\sum_{n=1}^{N}e^{-n^2\,a}\left(e^{-n^2\,h}-1+n^2\,h\right)\right|\leqslant\sum_{n=1}^{N}e^{-n^2\,a}\frac{(-n^2\,h)^2}{2}\,e^{|-n^2\,h|}=\frac{|h|^2}{2}\sum_{n=1}^{N}n^4\,e^{-n^2\,a}\,e^{n^2\,|h|}.$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N}e^{-n^2\,a}\left(e^{-n^2\,h}-1+n^2\,h\right)\right|\leqslant\frac{|h|^2}{2}\sum_{n=1}^{N}n^4\,e^{-n^2\,a}\,e^{n^2\,(a/2)}=\frac{|h|^2}{2}\sum_{n=1}^{N}n^4\,e^{-n^2\,(a/2)}.$$

Les séries de termes généraux $e^{-n^2\,a}\left(e^{-n^2\,h}-1+n^2\,h\right)$ et $n^4\,e^{-n^2\,(a/2)}$ étant convergentes, il vient en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$|h\,\Delta(h)|\leqslant\frac{|h|^2}{2}\sum_{n=1}^{N}n^4\,e^{-n^2\,(a/2)}\ \text{ou}\ |\Delta(h)|\leqslant\frac{|h|}{2}\sum_{n=1}^{N}n^4\,e^{-n^2\,(a/2)}.$$

Par encadrement on obtient $\lim_{h\to 0}\Delta(h)=0$.

Ainsi $\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\,e^{-n^2\,a}\right)=0$ ou $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\,e^{-n^2\,a}$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a)=-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^2\,e^{-n^2\,a}.}$

Q6 f est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc f est continue sur $]0,+\infty[$.

$f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, f est positive sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge ($1/2<1$).

Les règles de comparaison des intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

$\forall x\in[1,+\infty[,\ 0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{e^x-1}\leqslant\dfrac{2}{e^x}=2\,e^{-x}$ ($e^x\geqslant 2$ donc $\frac{e^x}{2}\geqslant 1$ et $e^x-1\geqslant e^x-\frac{e^x}{2}$...).

La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ ($\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe) et les règles de comparaison des intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$.

Finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

Exercice 12 Q1. Etudier la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$a_0 \in \mathbb{R}^{+*} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \ln(1+a_n)$$

Q2. Trouver la limite de la suite de terme général $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$. Trouver la nature de la série de terme général a_n (chercher un équivalent en utilisant ce qui précède et Cesaro).

Q1 Montrons par récurrence que pour tout élément n dans $\mathbb{N}$, a_n existe et est strictement positif.

C'est clair pour $n = 0$. Supposons la propriété vraie pour n élément de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

a_n existe et $a_n > 0$. Alors $\ln(1+a_n)$ existe et est strictement positif ; a_{n+1} existe et est strictement positif. Ainsi s'achève la récurrence.

Rappel. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x \leqslant x-1$ avec égalité si et seulement si $x=1$. Donc $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \ln(a_n+1) \leqslant a_n$. La suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente.

Soit ℓ la limite de cette suite ; $\ell \geqslant 0$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ donc $\ell = \ln(1+\ell)$ (ln est continue en $1+\ell$). Le rappel indique alors que $\ell = 0$.

$$\boxed{(a_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers } 0}.$$

Q2 $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}\,a_n} = \dfrac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n\,\ln(1+a_n)}\cdot$

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$. $x - \ln(1+x) = \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$. $x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}\cdot$ De plus $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Alors $\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\,\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2/2}{x^2} = \dfrac{1}{2}\cdot$ Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x\,\ln(1+x)} = \dfrac{1}{2}\cdot$

Comme $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n\,\ln(1+a_n)}\right) = \frac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}}.$$

Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}\cdot$

Cesaro montre alors que la suite de terme général $\dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}}{n}$ converge également vers $\dfrac{1}{2}\cdot$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{n\,a_n} - \dfrac{1}{n\,a_0}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n\,a_n} - \frac{1}{n\,a_0}\right) = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\,a_0} = 0$. Par addition $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\,a_n} = \frac{1}{2}$.

Finalement $\dfrac{1}{n\,a_n} \sim \dfrac{1}{2}$ ce qui donne $a_n \sim \dfrac{2}{n}\cdot$ La divergence de la série de terme général $\dfrac{2}{n}$ et les règles de comparaion des séries à termes positifs permettent de dire que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } a_n \text{ diverge}}.$$

Exercice 13 **Produit de convolution (ou de Cauchy) de deux séries. Théorème de Mertens.**

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels. On suppose que la série de terme général u_n est absolument convergente et que celle de terme général v_n converge et on pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ et $W_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k$.

Q1. Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$: $U_nV_n - W_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Big(u_k(V_n - V_{n-k})\Big)$.

Q2. a) M est un majorant strictement positif de la suite $(|V_n|)_{n\geqslant 0}$. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$.

Montrer que pour tout élément n de $[\![p, +\infty[\![$:

$$\big|U_nV_n - W_n\big| \leqslant \sum_{k=0}^{n-p} \Big(|u_k|\big|V_n - V_{n-k}\big|\Big) + 2M \sum_{k=n-p+1}^{+\infty} |u_k|.$$

b) Montrer à l'aide de la définition que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(U_nV_n - W_n) = 0$. En déduire que la série de terme général w_n converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Q1. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $W_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} w_i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} u_k\, v_{i-k}$. En commutant les deux sommes il vient :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} u_k\, v_{i-k} = \sum_{k=0}^{n}\left(u_k \sum_{j=0}^{n-k} v_j\right) = \sum_{k=0}^{n} u_k\, V_{n-k}.$$

Alors $U_n\, V_n - W_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right) V_n - \sum_{k=0}^{n} u_k\, V_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (u_k\, V_n - u_k\, V_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} \Big(u_k\,(V_n - V_{n-k})\Big)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n\, V_n - W_n = \sum_{k=0}^{n} \Big(u_k\,(V_n - V_{n-k})\Big).}$$

Q2. a) p est un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit n un élément de $[\![p, +\infty[\![$.

$$|U_n\, V_n - W_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} \Big(u_k\,(V_n - V_{n-k})\Big)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \Big(|u_k|\,|V_n - V_{n-k}|\Big).$$

$$|U_n\, V_n - W_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-p} \Big(|u_k|\,|V_n - V_{n-k}|\Big) + \sum_{k=n-p+1}^{n} \Big(|u_k|\,|V_n - V_{n-k}|\Big).$$

$$|U_n\, V_n - W_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-p} \Big(|u_k|\,|V_n - V_{n-k}|\Big) + \sum_{k=n-p+1}^{n} \Big(|u_k|\,(|V_n| + |V_{n-k}|)\Big).$$

$$|U_n\, V_n - W_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-p} \Big(|u_k|\,|V_n - V_{n-k}|\Big) + \sum_{k=n-p+1}^{n} \Big(|u_k|\,(M + M)\Big) \leqslant \sum_{k=0}^{n-p} \Big(|u_k|\,|V_n - V_{n-k}|\Big) + 2M \sum_{k=n-p+1}^{n} |u_k|.$$

Or $2M \displaystyle\sum_{k=n-p+1}^{n} |u_k| \leqslant 2M \sum_{k=n-p+1}^{+\infty} |u_k|$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ |U_n\, V_n - W_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-p} \Big(|u_k|\, |V_n - V_{n-k}| \Big) + 2M \sum_{k=n-p+1}^{+\infty} |u_k|.}$$

b) Montrons à l'aide de la définition que $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n\, V_n - W_n) = 0$.

Il s'agit de montrer que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists r \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant r \Rightarrow |U_n\, V_n - W_n| < \varepsilon$.

$\boxed{\text{Fixons } \varepsilon \text{ dans } \mathbb{R}^{+*}}$. Posons $S = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \right) + 1$ (le plus 1 est destiné à rendre strictement positive cette constante pour l'inverser).

• La suite $(V_n)_{n \geqslant 0}$ converge. Notons V sa limite. Soit ε' un réel strictement positif.

$\exists q_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant q_1 \Rightarrow |V_n - V| < \varepsilon'$.

Soient n et m deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que $n \geqslant q_1$ et $m \geqslant q_1$.

$|V_n - V| < \varepsilon'$ et $|V_m - V| < \varepsilon'$ donc $|V_n - V_m| = |(V_n - V) - (V_m - V)| \leqslant |V_n - V| + |V_m - V| < 2\,\varepsilon'$.

Finalement : $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists q_1 \in \mathbb{N},\ \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2\ \ n \geqslant q_1$ et $m \geqslant q_1 \Rightarrow |V_n - V_m| < 2\,\varepsilon'$.

Posons alors $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{4\,S}$. $\exists q_1 \in \mathbb{N},\ \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2\ \ n \geqslant q_1$ et $m \geqslant q_1 \Rightarrow |V_n - V_m| < 2\,\dfrac{\varepsilon}{4\,S} = \dfrac{\varepsilon}{2\,S}$.

Dès lors choisissons $\boxed{\text{UN}}$ élément non nul p de l'intervalle $[\![q_1, +\infty[\![$.

$\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ \forall k \in [\![0, n-p]\!],\ n \geqslant p \geqslant q_1$ et $n - k \geqslant n - (n-p) = p \geqslant q_1$.

Ainsi $\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ \forall k \in [\![0, n-p]\!],\ |V_n - V_{n-k}| < \dfrac{\varepsilon}{2\,S}$.

Alors $\forall n \in [\![p, +\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-p} \big(|u_k| (V_n - V_{n-k}) \big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,S} \sum_{k=0}^{n-p} |u_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,S} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2\,S} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| + 1 \right) = \frac{\varepsilon}{2}$.

• La série de terme général $|u_k|$ converge donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=s+1}^{+\infty} |u_k| \right)_{s \geqslant 0}$ converge vers zéro.

Alors il existe un élément q_2 de $\mathbb{N}$ tel que : $\forall s \in \mathbb{N},\ s \geqslant q_2 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=s+1}^{+\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{4\,M}$.

Donc $\forall s \in \mathbb{N},\ s \geqslant q_2 \Rightarrow 2\,M \displaystyle\sum_{k=s+1}^{+\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\boxed{\text{Posons alors } r = p + q_2}$. $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant r \Rightarrow n \geqslant p$ et $n - p \geqslant q_2$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant r \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n-p} \big(|u_k| (V_n - V_{n-k}) \big) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $2\,M \displaystyle\sum_{k=n-p+1}^{+\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\boxed{\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant r \Rightarrow |U_n\, V_n - W_n| < \varepsilon.}$

Ceci achève de prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n\, V_n - W_n) = 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = U_n\, V_n - (U_n\, V_n - W_n)$. Comme les suites de termes généraux U_n, V_n et $U_n\, V_n - W_n$ convergent et ont pour limites respectives $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ et 0, la suite de terme général W_n converge vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. Alors :

$$\boxed{\text{la série de terme général } w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.}$$

Pour finir une petite gâterie (inaccessible) :

si la série de terme général w_n converge alors LES séries de termes généraux u_n et v_n convergent.