Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels. La suite de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $u_{n+1}-u_n$.

En cas de convergence : $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty}(u_{k+1}-u_k)=\big(\lim_{n\to+\infty}u_n\big)-u_{n_0}$.

Application. La suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$.

Posons, pour tout élément n de $[\![n_0,+\infty[\![$, $v_n=u_{n+1}-u_n$ et $S_n=\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}v_k$.

Remarquons que $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ S_n=\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_{n_0}$.

L'équivalence des assertions suivantes donne alors le résultat.

- La série de terme général v_n converge.
- La suite de terme général S_n converge.
- La suite de terme général $u_{n+1}-u_{n_0}$ converge.
- La suite de terme général u_{n+1} converge.
- La suite de terme général u_n converge.

Application. Posons $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Au vosinage de 0 : $\dfrac{x}{1+x}=x-x^2+\mathrm{o}(x^2)$ et $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)$.

Alors $\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)=x-x^2-x+\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}\,x^2=-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)$. Ainsi $\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)\underset{x\to0}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}$.

Par conséquent $u_{n+1}-u_n=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{2n^2}$ ou $-(u_{n+1}-u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n^2}$.

La convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{2n^2}$ et les règles de comparaison des séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général $-(u_{n+1}-u_n)$.

Ainsi la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ converge donc la suite de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ converge.

Notons γ sa limite. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{\ln n}=0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}-1\right)=0$ Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n}=1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$.

<u>Exercice</u> Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{k}-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$

Exercice 2 Utiliser ce qui précède pour étudier la nature de la série de terme général $u_n=a^{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}$ $(a>0)$.

Rappelons que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ converge et notons γ sa limite. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n=\gamma+\mathrm{o}(1)$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$.

Ainsi $u_n = a^{\ln n+\gamma+o(1)} = a^{\gamma+o(1)}a^{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} a^{\gamma}a^{\ln n}$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a^{\gamma}a^{\ln n}\geqslant 0$.

Alors les règles de comparaison des séries à termes positifs indiquent que la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $a^{\gamma}a^{\ln n}$ ou que la série de terme général $a^{\ln n}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a^{\ln n} = e^{\ln a\ln n} = e^{\ln(n^{\ln a})} = n^{\ln a} = \dfrac{1}{n^{-\ln a}}$.

Donc la série de terme général $a^{\ln n}$ converge si et seulement si $-\ln a > 1$ ou si et seulement si $a<\dfrac{1}{e}$.

<u>La série de terme général $a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$ converge si et seulement si $a<\dfrac{1}{e}$.</u>

EX 3 $a\in\mathbb{N}^*$, $b\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a+kb} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{a+kb-1}\,dt = \int_0^1\sum_{k=0}^{n} t^{a-1}(-1)^k(t^b)^k\,dt = \int_0^1 t^{a-1}\sum_{k=0}^{n}(-t^b)^k\,dt$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 t^{a-1}\,\frac{1-(-t^b)^{n+1}}{1-(-t^b)}\,dt = \int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt - \int_0^1\frac{(-t^b)^{n+1}\times t^{a-1}}{1+t^b}\,dt.$$

Pour montrer le résultat il suffit de prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{(-t^b)^{n+1}t^{a-1}}{1+t^b}\,dt = 0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\displaystyle\left|\int_0^1\frac{(-t^b)^{n+1}t^{a-1}}{1+t^b}\,dt\right| = \left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)b+a-1}}{1+t^b}\,dt\right| = \int_0^1\frac{t^{(n+1)b+a-1}}{1+t^b}\,dt \leqslant \underbrace{\int_0^1 t^{(n+1)b+a-1}\,dt}_{1/((n+1)b+a)}$.

$$\left|\int_0^1\frac{(-t^b)^{n+1}t^{a-1}}{1+t^b}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)b+a} \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)b+a} = 0.$$

Alors par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{(-t^b)^{n+1}t^{a-1}}{1+t^b}\,dt = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$.

Ainsi la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{a+kb}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$

<u>EXERCICE.</u> Traiter les cas classiques $(a,b)=(1,1)$ et $(a,b)=(1,2)$

Exercice 4 **Etude d'une fonction définie par une série** $f : x \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$.

Q1. Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$. Montrer que cette fonction est paire.

Q2. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q3. x_0 est élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe un réel positif C tel que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right],\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant C|x - x_0|$$

En déduire que f est continue en x_0.

Q4. a) Montrer que f a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$ et en 0^+.

b) Trouver $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Q1 * Si $x=0$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+n^2x^2} = \frac{1}{n}$. Donc la série de terme général $\frac{1}{n+n^2x^2}$ est divergente. 0 n'est pas dans le domaine de définition de f

* Soit $x \in \mathbb{R}^*$. 1) $\frac{1}{n+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$ car $n = o(n^2x^2)$ $n \mapsto +\infty$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2x^2} \geqslant 0$

3) La série de terme général $\frac{1}{n^2x^2}$ converge (car $2>1$).

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\frac{1}{n+n^2x^2}$ converge. Ainsi x appartient au domaine de définition de f.

Finalement $D_f = \mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. 1) $-x \in \mathbb{R}^*$
2) $f(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2(-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2} = f(x)$.

f est paire sur son domaine de définition.

Q2 Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leqslant y$.

$x^2 \leqslant y^2$ par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < n + n^2x^2 \leqslant n+n^2y^2$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+n^2y^2} \leqslant \frac{1}{n+n^2x^2}$.

En sommant il vient $f(y) \leqslant f(x)$. Ceci achève de montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Q3 Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $x \in [\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}]$. Notons que $[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}] = [x_0 - \frac{x_0}{2}, x_0 + \frac{x_0}{2}]$ cet intervalle est donc un voisinage de x_0.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\Delta_N = \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+n^2x^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+n^2x_0^2} \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n+n^2x^2} - \frac{1}{n+n^2x_0^2} \right) \right| \leq \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{n+n^2x_0^2 - n - n^2x^2}{(n+n^2x^2)(n+n^2x_0^2)} \right|$$

$$\Delta_N \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2|x_0^2 - x^2|}{(n+n^2x^2)(n+n^2x_0^2)} = |x-x_0|(x+x_0) \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{(n+n^2x^2)(n+n^2x_0^2)}.$$

Notons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+n^2x^2)(n+n^2x_0^2) \geq n^2x^2n^2x_0^2 > 0$.

Alors $\Delta_N \leq |x-x_0|(x+x_0) \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{n^4x^2x_0^2} = |x-x_0| \left(\frac{x+x_0}{x^2x_0^2} \right) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ étant convergente il vient en faisant tendre N vers $+\infty$: $|f(x) - f(x_0)| \leq |x-x_0| \left(\frac{x+x_0}{x^2x_0^2} \right) K$ où $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

$0 \leq x+x_0 \leq \frac{3x_0}{2} + x_0 = \frac{5x_0}{2}$, $0 \leq \frac{1}{x^2x_0^2} \leq \frac{1}{(\frac{x_0}{2})^2 x_0^2} = \frac{4}{x_0^4}$ et $|x-x_0| K \geq 0$.

Alors $|f(x) - f(x_0)| \leq |x-x_0| \left(\frac{5x_0}{2} \right) \times \left(\frac{4}{x_0^4} \right) K = |x-x_0| \frac{10}{x_0^3} K$

Posons $C = \frac{10}{x_0^3} K$. Alors $\forall x \in [\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}]$, $|f(x) - f(x_0)| \leq C|x-x_0|$.

$\lim_{x \to x_0} C|x-x_0| = 0$ donc par encadrement $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; f est continue en x_0.

Exercice.. Notez que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2n^3x}{(n+n^2x^2)^2}$.

Q4 a) f est décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc le théorème de la limite monotone montre que f admet une limite en 0^+ et en $+\infty$

Remarque.. f étant minorée par 0 en $+\infty$, la limite de f en $+\infty$ est nécessairement finie. La suite le confirme.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n + n^2x^2 \geqslant n^2x^2 > 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \frac{1}{n^2+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{n^2}$. En sommant on peut dire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{K}{x^2}$ avec $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{K}{x^2} = 0$ donc par encadrement $\underline{\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0}$.

Supposons que la limite de f en 0^+ soit finie et notons la L.

Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leqslant L$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+n^2x^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2} \leqslant L$.

Alors $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+n^2x^2} \leqslant L$. En faisant tendre x vers 0 (licite car la somme est finie) il vient $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant L$.

Donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant L$. Alors la série de terme général $\frac{1}{n}$ est convergente car elle est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée.

Cette légère absurdité montre clair que la limite de f en 0^+ n'est pas finie. Comme f est décroissante sur $]0, +\infty[$: $\lim_{x \mapsto 0^+} f(x) = +\infty$

Joli coup à retenir non !

Exercice 5 **Autour du produit de Cauchy**

Q0. a) Rappeler les résultats obtenus dans le cours sur le produit de Cauchy.

b) Rappeler les résultats obtenus dans le cours sur les séries alternées.

Q1. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$.

a) Justifier rapidement que les séries de terme généraux u_n et v_n convergent

b) Montrer que $\forall k \in [\![0,n]\!],\ (k+1)(n-k+1) \leqslant \left(\dfrac{n+2}{2}\right)^2$.

c) Montrer alors que la suite de terme général $|w_n|$ ne converge pas vers 0. Conclure.

Q2. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$.

a) Justifier rapidement que les séries de terme généraux u_n et v_n convergent.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (-1)^n \dfrac{2}{n+2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

c) Montrer alors que la suite $\left(\dfrac{2}{n+2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

En utilisant un équivalent classique montrer que cette suite converge vers 0. Conclure.

Q0 a) $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites de réels. On pose $\forall n\in\mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Si les séries de termes généraux u_n et v_n sont absolument convergentes alors

1) la série de terme général w_n est absolument convergente 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

b) $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ sont deux suites de réels et ε vaut 1 ou -1.

On suppose que 1) $\forall n\in [\![n_0,+\infty[\![,\ u_n = \varepsilon(-1)^n a_n$

2) la suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante et converge vers 0.

Alors 1) la série de terme général u_n converge.

2) $\forall n\in [\![n_0,+\infty[\![,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|$.

Q1 a) La suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est décroissante et converge vers 0 donc

la série de terme général u_n (resp. v_n) converge d'après Q0 b

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. V1 Rappelons que $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ (... $(a-b)^2\geq 0$!!)

Alors $\forall k\in [\![0,n]\!],\ (k+1)(n-k+1) \leq \frac{(k+1+n-k+1)^2}{4} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^2$ et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Vé. $\left(\frac{n+2}{2}\right)^2-(k+1)(n-k+1)=+k^2-nk-n-1-\left(\frac{n+2}{2}\right)^2=\left(k-\frac{n}{2}\right)^2-\frac{n^2}{4}-n-1-\left(\frac{n+2}{2}\right)^2=\left(k-\frac{n}{2}\right)^2\geqslant 0$

c) Ainsi $\forall k\in[\![0,n]\!], 0<(k+1)(n-k+1)\leqslant\left(\frac{n+2}{2}\right)^2$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

Alors $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\frac{2}{n+2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{k+1}\,\sqrt{n+1-k}}$.

Donc $\frac{2(n+1)}{n+2}\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\,\frac{1}{\sqrt{n+1-k}}$ (... il y a $n+1$ termes dans la somme).

$w_n=\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\times\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}\,\sqrt{n+1-k}}$.

Alors $|w_n|\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}\,\sqrt{n+1-k}}\geqslant\frac{2(n+1)}{n+2}\geqslant 0$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Supposons que la série de terme général w_n converge.

Alors $\lim_{n\to+\infty}w_n=0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}|w_n|=0$. Par encadrement on obtient :

$\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)}{n+2}=0$!! En effet $\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)}{n+2}=2$!!

Finalement la série de terme général w_n diverge bien que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent.

Q2 a) $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante qui converge vers 0 donc

la série de terme général u_n (resp. v_n) converge (d'après Q0 b)

b) Soit $n\in\mathbb{N}$. $w_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}\times(-1)^{n-k}\frac{1}{n-k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{1}{(k+1)(n-k+1)}$.

$w_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1}\right]\times\left(\frac{1}{n+2}\right)=\frac{(-1)^n}{n+2}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}\right]$.

$w_n=\frac{(-1)^n}{n+2}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right]=(-1)^n\times\frac{2}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$.

2 petits changements d'indice.

$\forall n\in\mathbb{N},\ \omega_n = (-1)^n \frac{2}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$

c) Pour $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n = \frac{2}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$. Montrons que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers 0.

* Soit $n\in\mathbb{N}$. $a_{n+1}-a_n = \frac{2}{n+3}\left[\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{k}\right] - \frac{2}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$.

$a_{n+1}-a_n = 2\left[\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right]\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{2}{n+3}\times\frac{1}{n+2}.$

$a_{n+1}-a_n = \frac{2}{(n+3)(n+2)}\left[1-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right] = -\frac{2}{(n+3)(n+2)}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} \leq 0$

$(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$. Ainsi $a_n \sim \frac{2}{n+2}\ln(n+1)$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln(n+1)}{n+2} = 0$. $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

$(a_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et converge vers 0 donc d'après Q0 b) la série de terme général $w_n = (-1)^n a_n$ converge.

Ainsi la série de terme général $\omega_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ converge.

Exercice 6 <u>Pour Marianne, le critère d'Abel</u>.

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite décroissante de réels positifs qui converge vers zéro. $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels. On pose pour tout n dans $[\![n_0,+\infty[\![$, $V_n=\sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$ et on suppose $(V_n)_{n\geqslant n_0}$ bornée.

Q1. Montrer que la série de terme général $t_n = V_n(u_n-u_{n+1})$ est de même nature que la série de terme général $w_n = u_n v_n$ (on pourra calculer : $\sum\limits_{k=n_0}^{n} t_k$)

Q2. Montrer que la série de terme général t_n est absolument convergente. Conclure pour la série de terme général w_n.

Q3. Application : étudier la nature de la série de terme général : $(-1)^n/n$ (resp. $\cos(\alpha n)/n$).

Q1 Soit $n \in [\![n_0+1,+\infty[\![$.

$$\sum_{k=n_0}^{n} t_k = \sum_{k=n_0}^{n} V_k(u_k-u_{k+1}) = \sum_{k=n_0}^{n} V_k u_k - \sum_{k=n_0}^{n} V_k u_{k+1} = \sum_{k=n_0}^{n} V_k u_k - \sum_{k=n_0+1}^{n+1} V_{k-1} u_k$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} t_k = V_{n_0}u_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} (V_k - V_{k-1})u_k - V_n u_{n+1} = V_{n_0}u_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k u_k - V_n u_{n+1}$$

Notons que $V_{n_0} = v_{n_0}$.

Alors $\sum\limits_{k=n_0}^{n} t_k = V_{n_0}u_{n_0} + \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} v_k u_k - V_n u_{n+1} = \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k u_k - V_n u_{n+1}$.

$(V_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée donc $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $|V_n| \leqslant M$.

Alors $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $|V_n u_{n+1}| \leqslant M|u_{n+1}|$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$, il vient par encadrement que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (V_n u_{n+1}) = 0$.

Rappelons que $\forall n \in [\![n_0+1,+\infty[\![$, $\sum\limits_{k=n_0}^{n} t_k = \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k u_k - V_n u_{n+1}$ et que la suite de terme général $V_n u_{n+1}$ converge.

Ainsi les suites de termes généraux $\sum\limits_{k=n_0}^{n} t_k$ et $\sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k u_k$ sont de même nature.

<u>Alors la série de terme général $t_n = V_n(u_n-u_{n+1})$ est de même nature que la série de terme général $w_n = u_n v_n$.</u>

Q2 $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $|t_n| = |V_n||u_n-u_{n+1}| \leqslant M|u_n-u_{n+1}| = M(u_n-u_{n+1})$.

$\uparrow$ $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante.

La suite de terme général u_n converge (vers 0) donc la série de terme général $u_n - u_{n+1}$ converge. Les critères de comparaison des séries à termes positifs donnent alors la convergence de la série de terme général $|t_n|$.

<u>La série de terme général t_n est absolument convergente donc convergente.</u>

La série de terme général t_n étant convergente, Q1 donne la convergence de <u>la série de terme général w_n converge.</u>

Q3 • Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = (-1)^n$.

→ $(u_n)_n$ est décroissante et converge vers 0

→ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|v_1+v_2+\dots+v_n| = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair}. \end{cases}$; $(|v_1+v_2+\dots+v_n|)_{n\geq 1}$ est bornée.

Alors ce qui précède donne la convergence de la série de terme général $w_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

• Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{\cos(\alpha n)}{n}$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \cos(\alpha n)$.

1er cas... $\alpha \equiv 0\ [2\pi]$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{1}{n}$; la série de terme général $w_n = \frac{\cos(\alpha n)}{n}$ diverge.

2ème cas... $\alpha \not\equiv 0\ [2\pi]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\alpha)$

$$V_n = Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\alpha}\right) = Re\left(e^{i\alpha}\frac{1-(e^{i\alpha})^n}{1-e^{i\alpha}}\right) = Re\left(e^{i\alpha}\frac{e^{in\alpha/2}}{e^{i\alpha/2}}\,\frac{e^{-in\alpha/2}-e^{in\alpha/2}}{e^{-i\alpha/2}-e^{i\alpha/2}}\right).$$

$$V_n = Re\left(e^{i\alpha\frac{n+1}{2}}\frac{-2i\sin n\alpha/2}{-2i\sin\alpha/2}\right) = \cos\left(\alpha\frac{n+1}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{\alpha n}{2}\right)}{\sin(\alpha/2)}.$$

$|V_n| \leq \frac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}$; $(V_n)_{n\geq 1}$ est bornée. Comme la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est décroissante et converge vers 0, la série de terme général $w_n = \frac{\cos(\alpha n)}{n}$ converge.

La série de terme général $w_n = \frac{\cos(\alpha n)}{n}$ converge ssi $\alpha \not\equiv 0\ [2\pi]$.

Exercice 7 **ESCP 2004** On se donne une suite $(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{N}^*$ et on pose $\varphi(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha(k)$. On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.

Q1. Montrer que φ est une injection croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

On pose dans toute la suite et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha(n)u_{\varphi(n)}$, $w_0 = \sum\limits_{k=0}^{\varphi(0)} u_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sum\limits_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k$

Q2. Montrer que les séries de terme généraux u_n et w_n sont de même nature.

Q3. Montrer que si la série de terme général u_n converge, il en est de même pour la série de terme général v_n.

Q4. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le rapport $\dfrac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)}$ soit inférieur ou égal à M.

Montrer que si la série de terme général v_n converge, il en est de même pour la série de terme général u_n.

Q5. On pose $\alpha(n) = 2^n$ et $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\beta > 1$.

Q6. On pose $\alpha(n) = (n!)^n$ et $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$.

a) Montrer que $((\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$

b) Montrer que $\big(\ln(\alpha(n))\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équivalente à $(n^2 \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Étudier la convergence de la série de terme général v_n. Conclusion ?

Q1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) - \varphi(n) = \alpha(n+1) \geq 1$ (car $\alpha(n+1) \in \mathbb{N}^*$).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) > \varphi(n)$. La suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Alors $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p < q \Rightarrow \varphi(p) < \varphi(q)$ et $p > q \Rightarrow \varphi(p) > \varphi(q)$.

Donc $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $\varphi(p) = \varphi(q) \Rightarrow p = q$. φ est injective.

Ainsi <u>φ est une injection (strictement) croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.</u>

Q2 Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k$.

Les séries de termes généraux u_n et w_n sont à termes positifs.

Ainsi la série de terme général u_n (resp. w_n) converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est majorée.

Notons que les séries de termes généraux u_n et w_n sont de même nature revient à montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Notons que, à un petit chouïa près : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_k = \sum\limits_{i=0}^{\varphi(0)} u_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} u_i$.

Alors <u>$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum\limits_{i=0}^{\varphi(n)} u_i$</u> OK ?! <u>$\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = S_{\varphi(n)}$.</u>

* Supposons que $(S_n)_{n\geq 0}$ est majorée. $\exists S\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ S_n\leq S$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ T_n = S_{\varphi(n)} \leq S$. $(T_n)_{n\geq 0}$ est majorée.

* Supposons que $(T_n)_{n\geq 0}$ est majorée. $\exists T\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ T_n\leq T$.

Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \varphi(n)\geq n$.

C'est clair pour $n=0$ car $\varphi(0)=\alpha(0)$ et $\alpha(0)\in\mathbb{N}^*$.

Supposons la propriété vraie pour n dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$$\varphi(n+1)=\varphi(n)+\alpha(n+1) \underset{\alpha(n+1)\geq 1}{\geq} \varphi(n)+1 \geq n+1.$$ Ainsi s'achève la récurrence.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ S_n \underset{\forall i\in\mathbb{N},\ u_i\geq 0}{\overset{n\leq\varphi(n)}{\leq}} S_{\varphi(n)} = T_n \leq T$; $(S_n)_{n\geq 0}$ est majorée.

Ceci achève de montrer que <u>les séries de termes généraux u_n et w_n sont de même nature.</u>

<u>Remarque</u> : En cas de convergence : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n=\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$. Le tout ne surprendra pas les amateurs de sommation par paquets.

Q3 Supposons que la série de terme général u_n converge. Il en est de même pour la série de terme général w_n.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_n=\sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k \underset{(u_n)_{n\geq 0}\text{ est décroissante}}{\geq} \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_{\varphi(n)} = (\varphi(n)-\varphi(n-1))\,u_{\varphi(n)} = \alpha(n)\,u_{\varphi(n)} = v_n.$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq v_n\leq w_n$. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général v_n converge.

<u>Si la série de terme général u_n converge alors la série de terme général v_n converge.</u>

Q4 $$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq w_n=\sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_{\varphi(k)} \underset{(u_n)_{n\geq 0}\text{ est décroissante}}{\leq} \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_{\varphi(n-1)} = (\varphi(n)-\varphi(n-1))\,u_{\varphi(n-1)}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq w_n\leq \alpha(n)\,u_{\varphi(n-1)} = \frac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)}\,\alpha(n-1)\,u_{\varphi(n-1)} = \frac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)}\,v_{n-1} \leq M\,v_{n-1}.$$

La série de terme général v_n étant convergente il en est de même de la série de terme général v_{n-1}. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général w_n converge.
Ainsi la série de terme général u_n converge.

Q5 • Si $\beta=0$ $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $u_n = \frac{1}{n}$ et la série de terme général u_n diverge.

• Supposons $\beta<0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(\ln n)^\beta} = +\infty$. Ainsi $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n(\ln n)^\beta}\right)$.

1) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\frac{1}{n} \geqslant 0$ et $u_n \geqslant 0$
2) $\frac{1}{n} = o(u_n)$
3) la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général u_n diverge.

• Supposons $\beta > 0$. Posons $u_0 = u_1 = 0$. Alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite décroissante (non ?) de réels positifs (ou nuls).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha(n) = 2^n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)} = 2 \leq 2$!

D'après Q3 et Q4, les séries de termes généraux u_n et $v_n = \alpha(n) u_{\varphi(n)}$ sont de même nature.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = \sum\limits_{\ell=0}^{n} \alpha(\ell) = \sum\limits_{\ell=0}^{n} 2^\ell = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$.

$$v_n = 2^n u_{2^{n+1}-1} = 2^n \times \frac{1}{(2^{n+1}-1)(\ln(2^{n+1}-1))^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n}{2^{n+1}} \frac{1}{(\ln(2^{n+1}-1))^\beta}.$$

$v_n \sim \frac{1}{2} \frac{1}{(\ln(2^{n+1}-1))^\beta}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\ln(2^{n+1}-1)}{(n+1)\ln 2} = \frac{\ln 2^{n+1} + \ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\ln 2^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2^{n+1}-1)}{(n+1)\ln 2} = \lim_{n\to+\infty}\left[1 - \ln\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \times \frac{1}{\ln 2^{n+1}}\right] = 1 \text{ ; } \ln(2^{n+1}-1) \sim (n+1)\ln 2$$

mieux : $\ln(2^{n+1}-1) \sim n\ln 2$. Finalement $v_n \sim \frac{1}{2}\frac{1}{(n\ln 2)^\beta}$.

$v_n \sim \frac{1}{2(\ln 2)^\beta}\frac{1}{n^\beta}$. Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2(\ln 2)^\beta}\frac{1}{n^\beta}>0$:

la série de terme général v_n est de même nature que la série de terme général $\frac{1}{2(\ln 2)^\beta}\frac{1}{n^\beta}$; elle converge donc si et seulement si $\beta>1$.

Ceci achève de prouver que la série de terme général $u_n=\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta>1$.

Q5 Remarque 1. $(u_n)_{n\geq 2}$ est une suite décroissante de réels positifs.

2. La série de terme général $u_n=\frac{1}{n\ln n}$ diverge.

3. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha(n)=(n!)^n\in\mathbb{N}^*$.

Le but de cette question est de montrer que la série de terme général $v_n=\alpha(n)u_{\varphi(n)}$ converge et ainsi de prouver que la réciproque du résultat de Q3 est fausse.

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\frac{\varphi(n)}{\alpha(n)}-1=\frac{\varphi(n)-\alpha(n)}{\alpha(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha(k)}{\alpha(n)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k!)^k}{(n!)^n}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k!}{n!}\right)^k\left(\frac{1}{n!}\right)^{n-k}$.

Alors $0\leq\frac{\varphi(n)}{\alpha(n)}-1=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k!}{n!}\right)^k\left(\frac{1}{n!}\right)^{n-k}\leq\sum_{k=0}^{n-1}1\times\left(\frac{1}{n!}\right)^1=\frac{n}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}$.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n-1)!}=0$ donc alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{\varphi(n)}{\alpha(n)}=1$. $\varphi(n)\sim\alpha(n)$.

b) Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n=\ln(\alpha(n))$; $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n=\ln(n!)^n=n\sum_{k=1}^{n}\ln k$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\ln k\leq\int_k^{k+1}\ln t\,dt\leq\ln(k+1)$

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\sum_{k=1}^{n-1}\ln k\leq\int_1^n\ln t\,dt=[t\ln t-t]_1^n=n\ln n-n+1\leq\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)=\sum_{k=2}^{n}\ln k$.

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $n\ln n-n+1\leq\sum_{k=1}^{n}\ln k=t_n/n\leq n\ln n-n+1+\ln n$.

Alors $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $n^2\ln n - n^2 + n \leq t_n \leq n^2 \ln n - n^2 + n + n\ln n$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n\ln n} \leq \frac{t_n}{n^2\ln n} \leq 1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n\ln n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{n\ln n} + \frac{1}{n}\right) = 1$.

On obtient alors par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t_n}{n^2\ln n} = 1$. $t_n \sim n^2\ln n$.

Ainsi $\underline{\underline{\ln \alpha(n) \sim n^2\ln n.}}$

c) Donc $v_n = \alpha(n) u_{\varphi(n)} = \alpha(n) \times \frac{1}{\varphi(n)\ln(\varphi(n))} \overset{\varphi(n)\sim\alpha(n)}{\sim} \frac{1}{\ln(\varphi(n))}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln \varphi(n)}{\ln \alpha(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{\ln \alpha(n)} \times \ln\frac{\varphi(n)}{\alpha(n)}\right) = 1 + 0 \times \ln 1 = 1$.

$\varphi(n) \sim \alpha(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha(n) = +\infty$

Alors $\ln \varphi(n) \sim \ln \alpha(n) \sim n^2 \ln n$.

Donc 1) $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\frac{1}{n^2\ln n} \geq 0$.

2) $v_n \sim \frac{1}{\ln \varphi(n)} \sim \frac{1}{n^2\ln n}$.

Ainsi les séries de terme général v_n et $\frac{1}{n^2\ln n}$ sont de même nature.

1° $\frac{1}{n^2\ln n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 2° $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\frac{1}{n^2\ln n} \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$

3) la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $\frac{1}{n^2\ln n}$ converge ; il en est de même de la série de terme général v_n.

<u>Ainsi la série de terme général $v_n = \alpha(n) u_{\varphi(n)}$ converge et la série de terme général</u> u_n diverge. La réciproque du résultat de Q3.

Exercice 8 E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

f est un élément de E. Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on pose : $I_n(f) = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

Q1 Montrer que la suite de terme général $I_n(f)$ converge ver 0.

Q2 a) Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{n+1}}{1+t} f(t)\,dt$.

En déduire que la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$ converge et a pour somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\,dt$.

b) Qu'obtient-on si : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = 1$?

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ en posant : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sqrt{x}$ (on commencera par calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\,dt$ en faisant un changement de variable).

Q3 On se propose de montrer, en utilisant la définition que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(n\, I_n(f)\big) = f(1)$.

a) Soit α un élément de $]0,1[$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^\alpha t^n f(t)\,dt = 0$.

b) Ici $f(1) = 0$. On se donne un réel ε strictement positif. Montrer que l'on peut trouver α dans $]0,1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| n \int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Conclure.

c) Etudier le cas général en se ramenant au cas particulier précédent.

Q4 Ici $\forall x \in [0,1],\ f(x) = e^{-x}$. On rappelle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(n\, I_n(f)\big) = f(1)$.

Calculer $\dfrac{I_{k-1}(f)}{(k-1)!} - \dfrac{I_k(f)}{k!}$ pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$. En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Q1 f est continue sur $[0,1]$ donc $|f|$ l'est également et $M = \max\limits_{u\in[0,1]} |f(u)|$ existe.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $|I_n(f)| = \left|\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right| \underset{0\leq 1}{\leq} \displaystyle\int_0^1 t^n |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 M t^n\,dt = M\int_0^1 t^n\,dt = \frac{M}{n+1}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $0 \leq |I_n(f)| \leq \dfrac{M}{n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n+1} = 0$.

Par encadrement il vient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(f) = 0$.

(Q2) a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k(f) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^k f(t)\,dt = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k\right) f(t)\,dt$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{n+1}}{1+t} f(t)\,dt. \text{ Ainsi :}$$

"$(-t\neq 1\,!)$"

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{n+1}}{1+t} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt + (-1)^n\int_0^1 \frac{t^{n+1}f(t)}{1+t}dt$$

$h : t\mapsto \frac{t f(t)}{1+t}$ est continue sur $[0,1]$ donc en appliquant $\varphi 1$ à h (!) on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h(t)t^n\,dt = 0 \text{ ou } \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+1}f(t)}{1+t}dt = 0.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1 \frac{t^{n+1}f(t)}{1+t}dt\right| = 0$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\left|(-1)^n\int_0^1 \frac{t^{n+1}f(t)}{1+t}dt\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1 \frac{t^{n+1}f(t)}{1+t}dt\right| = 0$.

Alors $\lim_{n\to+\infty}\left((-1)^n\int_0^1 \frac{t^{n+1}f(t)}{1+t}dt\right) = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k(f)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt + (-1)^n\int_0^1 \frac{t^{n+1}f(t)}{1+t}dt\right) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt$.

Par conséquent 1) la série de terme général $(-1)^k I_k(f)$ converge.

2) $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt$

b) $\forall x\in[0,1]$, $f(x)=1$. f est continue sur $[0,1]$. $f\in E$. Alors la série de terme général $(-1)^k I_k(f)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt$.

$\forall k\in\mathbb{N}$, $(-1)^k I_k(f) = (-1)^k\int_0^1 t^k\times 1\,dt = \frac{(-1)^k}{k+1}$ et $\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$.

Ainsi 1) la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1}$ (ou $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$) converge.

2) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$ (ou $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$).

c) $\forall x \in [0,1], f(x) = \sqrt{x}$. f est continue sur $[0,1]$. Posons $I = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt$.

La série de terme général $(-1)^k I_k(f)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_k(f) = I$.

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 t^k \sqrt{t}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 t^{k+1/2} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{t^{k+3/2}}{k+3/2}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+3/2}.$$

Alors $\frac{1}{2} I = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1} + 1 = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2} I$. Calculons $I = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$ en posant $u = \sqrt{t}$ qui est... NON ! Soit $\varepsilon \in]0,1]$.

$t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $[\varepsilon, 1]$. Le changement de variable $u = \sqrt{t}$ donne alors

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt \underset{\substack{u=\sqrt{t} \\ t=u^2 \\ dt=2u\,du}}{=} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \frac{u}{1+u^2} 2u\, du = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du.$$

$\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{1+t} dt$ et $\int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du$ existent (fonctions continues...). Ainsi en faisant tendre ε vers 0 il vient : $I = \int_0^1 \frac{2u^2}{1+u^2} du = 2\int_0^1 1\, du - 2\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$.

$I = 2 - 2[\arctan u]_0^1 = 2 - 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$. $1 - \frac{1}{2} I = 1 - 1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Alors 1) la série de terme général $\frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge.

2) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}$.

Q3 a) Posons encore $M = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|n\int_0^\alpha t^n f(t)\,dt\right| \underset{\alpha\in]0,1[}{\le} n\int_0^\alpha t^n |f(t)|\,dt \le Mn\int_0^\alpha t^n\,dt = M\,n\,\frac{\alpha^{n+1}}{n+1} = M\,\frac{n}{n+1}\,\alpha^{n+1}$

$$\underset{|\alpha|<1}{\lim_{n\to+\infty}} \alpha^{n+1} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\left(M\frac{n}{n+1}\alpha^{n+1}\right) = 0$$

Par encadrement on obtient $\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^\alpha t^n f(t)\,dt\right) = 0$.

b) On est prié d'admirer la belle mécanique ! Ici $f(1)=0$.

Le but est donc de montrer en utilisant la définition que $\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right) = 0$

c'est à dire que $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists p\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, n\ge p \Rightarrow \left|n\int_0^1 t^n f(t)\,dt\right| < \varepsilon$.

$\boxed{\text{Soit } \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*}$ Soit $\alpha\in]0,1[$. $\underset{\text{Soit } n\in\mathbb{N}}{\forall}$, $\left|n\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt\right| \underset{\alpha\le 1}{\le} n\int_\alpha^1 t^n |f(t)|\,dt \le n\max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)|\int_\alpha^1 t^n\,dt$.

$$\left|n\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt\right| \le n\max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)|\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^1 = \frac{n}{n+1}\max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)|\left(1-\alpha^{n+1}\right) \le \frac{n}{n+1}\max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)|$$

$$\left|n\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt\right| \le \frac{n}{n+1}\max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)| \le \max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)|.$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|n\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt\right| \le \max_{u\in[\alpha,1]}|f(u)|$ et ceci pour tout α dans $]0,1[$.

Utilisons alors la continuité de f en 1 et le fait que $f(1)=0$.

$\exists\eta\in\mathbb{R}_+^*, \forall t\in[0,1], |t-1|<\eta \Rightarrow |f(t)| = |f(t)-f(1)| < \varepsilon/2$.

Alors $\forall t\in[0,1]\cap]1-\eta, 1+\eta[$, $|f(t)| < \varepsilon/2$.

<u>Choisissons un élément α dans $]0,1[\,\cap\,]1-\eta, 1+\eta[$</u>

Par exemple prendre $\alpha = \frac{\max(0,1-\eta)+1}{2}$. Alors $[\alpha,1] \subset]1-\eta, 1+\eta[$.

donc $\forall t\in[\alpha,1]$, $|f(t)|<\varepsilon/2$. Ainsi $\max_{t\in[\alpha,1]}|f(t)| < \varepsilon/2$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $|n\int_\alpha^1 t^n f(t)dt| \leq \max_{u\in[\alpha,1]} |f(u)| < \varepsilon/2$.

Donc pour le α choisi : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|n\int_\alpha^1 t^n f(t)dt| < \varepsilon/2$.

$\alpha\in]0,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^\alpha t^n f(t)dt\right) = 0$.

Ainsi $\boxed{\exists p\in\mathbb{N}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq p \Rightarrow |n\int_0^\alpha t^n f(t)dt| < \varepsilon/2$.

Notons que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|n\int_0^1 t^n f(t)dt| = |n\int_0^\alpha t^n f(t)dt + n\int_\alpha^1 t^n f(t)dt| \leq |n\int_0^\alpha t^n f(t)dt| + |n\int_\alpha^1 t^n f(t)dt|$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq p \Rightarrow |n\int_0^1 t^n f(t)dt| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Finalement : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists p\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq p \Rightarrow |n\int_0^1 t^n f(t)dt| < \varepsilon$.

Ainsi $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 t^n f(t)dt\right) = 0}}$. ou $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}(n\,I_n(f)) = f(1)}}$ car ici $f(1)=0$!

c) Soit $f\in E$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty}(n\,I_n(f)) = f(1)$. } Idée classique.

Posons $g = f - f(1)$. $g\in E$ et $g(1)=0$.

D'après b) $\lim_{n\to+\infty}(n\,I_n(g)) = g(1) = 0$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n I_n(f) = n\int_0^1 t^n(g(t)+f(1))dt = n\,I_n(g) + nf(1)\int_0^1 t^n dt$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $n I_n(f) = n\,I_n(g) + nf(1)\frac{1}{n+1}$.

$\lim_{n\to+\infty}(n\,I_n(g)) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(nf(1)\times\frac{1}{n+1}\right) = f(1)$ donc $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}(nI_n(f)) = f(1)}}$.

(Q4) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Une intégration par parties simple donne :

$I_k(f) = \int_0^1 t^k f(t)dt = \int_0^1 t^k e^{-t}dt = [t^k(-e^{-t})]_0^1 - \int_0^1 k t^{k-1}(-e^{-t})dt$

$I_k(f) = -e^{-1} + k I_{k-1}(f)$. $\frac{I_k(f)}{k!} = -\frac{e^{-1}}{k!} + \frac{I_{k-1}(f)}{(k-1)!}$.

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{I_{k-1}(f)}{(k-1)!} - \dfrac{I_k(f)}{k!} = \dfrac{e^{-1}}{k!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $N \in [\![n+1, +\infty [\![$

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{e^{-1}}{k!} = \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{I_{k-1}(f)}{(k-1)!} - \frac{I_k(f)}{k!} \right) = \frac{I_n(f)}{n!} - \frac{I_N(f)}{N!}$$

$\lim\limits_{p \to +\infty} \left(p\, I_p(f)\right) = f(1) = e^{-1} \neq 0$ donc $p\, I_p(f) \underset{p \to +\infty}{\sim} e^{-1}$. $I_p(f) \underset{p \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{p}$.

Alors $\dfrac{I_N(f)}{N!} \underset{N \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{N \times N!}$. donc $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{I_N(f)}{N!} = 0$.

donc $\lim\limits_{N \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{e^{-1}}{k!} = \frac{I_n(f)}{n!}$.

Alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{k!} = \frac{I_n(f)}{n!}$. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e\,\frac{I_n(f)}{n!} \underset{n \to +\infty}{\sim} e \times \frac{\frac{e^{-1}}{n}}{n!} = \frac{1}{n\, n!}$.

donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n\, n!}$ ... ou $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sim \frac{1}{(n+1)!}$.

Un piste pour retrouver que $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \underset{n \to +\infty}{\sim} 3_n = \frac{1}{(n+1)!}$ de manière rapide

$$0 \leq \frac{R_n - 3_n}{3_n} = (n+1)! \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots k} \leq \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}}$$

$$0 \leq \frac{R_n - 3_n}{3_n} \leq \frac{1}{n+2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{n+1}$$

$\left|\dfrac{1}{n+2}\right| < 1$

!! Beau, hein ? Et pas cher ! ... et très classique.

Exercice 9. $(a_n)_{n\geq n_0}$ et $(b_n)_{n\geq n_0}$ sont deux suites de réels positifs telles que : $a_n \sim b_n$.

Q1. On suppose que la série de terme général a_n converge.
Montrer alors que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$

Q2. On suppose que la série de terme général a_n diverge. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k \sim \sum_{k=n_0}^{n} b_k$

Notons qu'il existe un élément p de $[\![n_0,+\infty[\![$ et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq p}$ tels que :
$\forall n\in [\![p,+\infty[\![,\quad a_n=(1+\varepsilon_n)\,b_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$

Notons encore que les séries de termes généraux a_n et b_n sont de même nature.

Q1. Supposons que la série de terme général a_n converge ; alors celle de terme général b_n converge également. Posons $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\displaystyle R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k$ et $\displaystyle \hat R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$

1er cas. $\exists n_1\in[\![n_0,+\infty[\![, \hat R_{n_1}=0$. Alors $\forall k\in[\![n_1+1,+\infty[\![$, $b_k=0$ et $\forall n\in[\![n_1,+\infty[\![$, $\hat R_n=0$.

Donc $\forall k\in[\![\max(p,n_1+1),+\infty[\![$, $a_k=(1+\varepsilon_k)\,b_k=0$.

Ainsi si $q=\max(p,n_1+1)$, $R_q=0$.
Mieux $\forall n\in[\![q,+\infty[\![$, $R_n=\hat R_n=0$. Dans ces conditions $R_n\sim\hat R_n$.

2e cas. $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![$, $\hat R_n\neq 0$

Montrons alors que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(R_n/\hat R_n)=1$

$\forall n\in[\![p,+\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1+\varepsilon_k)b_k=\sum_{k=n+1}^{+\infty}b_k+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varepsilon_k b_k$ (... au moins deux convergeront...)

$\forall n\in[\![p,+\infty[\![$, $\displaystyle R_n=\hat R_n+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varepsilon_k b_k$

Fixons ε dans $\mathbb{R}_+^*$. $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall k\in[\![N,+\infty[\![$, $|\varepsilon_k|<\varepsilon$; $\forall k\in[\![N,+\infty[\![$, $|\varepsilon_k b_k|\leq\varepsilon|b_k|$

Donc $\forall n\in[\![N,+\infty[\![$, $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varepsilon_k b_k\right|\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}|\varepsilon_k|b_k\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varepsilon\, b_k=\varepsilon\hat R_n$

Ainsi $\forall n\in[\![N,+\infty[\![$, $|R_n-\hat R_n|\leq\varepsilon\hat R_n$; $\forall n\in[\![N,+\infty[\![$, $\displaystyle\left|\frac{R_n}{\hat R_n}-1\right|\leq\varepsilon$

Finalement : $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq N\Rightarrow\displaystyle\left|\frac{R_n}{\hat R_n}-1\right|\leq\varepsilon$

Ceci prouve alors que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{\hat R_n}=1$ et donc : $R_n\sim\hat R_n$.

(Q2) Supposons que la série de terme général a_n diverge. Il en est de même de la série de terme général b_n. De plus $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} b_k = +\infty$.

: $\forall n \in [\![n_0,+\infty[\![$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ et $\hat{S}_n = \sum_{k=n_0}^{n} b_k$ et montrons que : $S_n \sim \hat{S}_n$.

Fixons ε dans $\mathbb{R}^*_+$. $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall k \in [\![N_1,+\infty[\![$, $|\varepsilon_k| < \varepsilon/2$.

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![N_2,+\infty[\![$, $\hat{S}_n > 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \hat{S}_n = +\infty$.

Fixons alors q dans $[\![\max(p,N_1,N_2),+\infty[\![$.

$\forall n \in [\![q,+\infty[\![$, $S_n = \sum_{k=n_0}^{q-1} a_k + \sum_{k=q}^{n} (1+\varepsilon_k) b_k = \sum_{k=n_0}^{q-1} (a_k - b_k) + \hat{S}_n + \sum_{k=q}^{n} \varepsilon_k b_k$

$\forall n \in [\![q,+\infty[\![$, $\left|\frac{S_n}{\hat{S}_n} - 1\right| = \frac{1}{\hat{S}_n} \left| \sum_{k=n_0}^{q-1} (a_k - b_k) + \sum_{k=q}^{n} \varepsilon_k b_k \right|$

$\forall n \in [\![q,+\infty[\![$, $\left|\frac{S_n}{\hat{S}_n} - 1\right| \leq \underbrace{\frac{1}{\hat{S}_n} \sum_{k=n_0}^{q-1} |a_k - b_k|}_{t_n} + \frac{1}{\hat{S}_n} \sum_{k=q}^{n} |\varepsilon_k| b_k \leq t_n + \frac{1}{\hat{S}_n} \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=q}^{n} b_k$

$\forall n \in [\![q,+\infty[\![$, $\left|\frac{S_n}{\hat{S}_n} - 1\right| \leq t_n + \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\frac{1}{\hat{S}_n} \sum_{k=q}^{n} b_k}_{\leq 1} \leq t_n + \frac{\varepsilon}{2}$

Or $\lim_{n\to+\infty} t_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\hat{S}_n} \underbrace{\left(\sum_{k=n_0}^{q-1} |a_k - b_k| \right)}_{\text{constante}} = 0$; donc $\exists N_3 \in [\![q,+\infty[\![$, $\forall n \in [\![N_3,+\infty[\![$, $0 \leq t_n < \frac{\varepsilon}{2}$

Ainsi $\forall n \in [\![N_3,+\infty[\![$, $\left|\frac{S_n}{\hat{S}_n} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Nous avons donc montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$, $\exists N_3 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in [\![N_3,+\infty[\![$, $\left|\frac{S_n}{\hat{S}_n} - 1\right| < \varepsilon$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\hat{S}_n} = 1$. $S_n \sim \hat{S}_n$.

<u>Exercice de contrôle</u> .. f et g sont deux applications continues et positives de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $f \underset{+\infty}{\sim} g$.

Q1.. On suppose que : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge. Montrer que $\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_a^x g(t)\,dt$.

Q2.. On suppose que : $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. A-t-on $\int_x^{+\infty} f(t)\,dt \underset{+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t)\,dt$?

Exercice 10 **Théorème de Fubuni. Application.** ESSEC MII 1998

On considère une famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de réels **positifs**.

Si i appartient à $\mathbb{N}$, on notera S_i la somme $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$ lorsqu'elle existe. On notera S la somme $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ lorsqu'elle existe.

Q-1. Dire ce que signifie l'existence de $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$.

Q0. Rappeler la CNS de convergence d'une série à termes positifs.

Q1. Montrer que $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe si et seulement si il existe un réel M tel que : $\forall (r,s)\in\mathbb{N}^2,\ \sum\limits_{i=0}^{r}\sum\limits_{j=0}^{s} u_{ij} \leqslant M$ (deux implications).

Q2. Montrer que $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe si et seulement si $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe.

En cas d'existence, montrer que : $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_{ij} = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$.

Q-1 $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe si pour tout $i\in\mathbb{N}$ la série de terme général u_{ij} converge et si la série de terme général $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ converge.

Q0 une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Q1 • Supposons que $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe. Posons $M = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$.

$\forall (r,s)\in\mathbb{N}^2,\ \sum\limits_{i=0}^{r}\sum\limits_{j=0}^{s} u_{ij} \leq \sum\limits_{i=0}^{r}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij} \leq \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij} = M$.

Ainsi $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall (r,s)\in\mathbb{N}^2,\ \sum\limits_{i=0}^{r}\sum\limits_{j=0}^{s} u_{ij} \leq M$.

• Réciproquement supposons qu'il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que :

$\forall (r,s)\in\mathbb{N}^2,\ \sum\limits_{i=0}^{r}\sum\limits_{j=0}^{s} u_{ij} \leq M$.

Soit $i\in\mathbb{N}$. $\sum\limits_{j=0}^{s} u_{ij} \leq \sum\limits_{k=0}^{i}\sum\limits_{j=0}^{s} u_{kj} \leq M$ pour tout s dans $\mathbb{N}$.

La suite des sommes partielles de la série (à termes positifs) de terme général u_{ij} est majorée, cette série converge donc $S_i = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe

$\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} u_{ij} \leq M$ donc $\forall r \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij} \leq M$ (il suffit de faire tendre s vers $+\infty$). Alors $\forall r \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{r} S_i \leq M$.

$\forall i \in \mathbb{N}$, $S_i \geq 0$ et $\forall r \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{r} S_i \leq M$. D'après Q0 la série de terme général S_i converge et ainsi $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe.

$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall (r,s) \in \mathbb{N}^2, \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} u_{ij} \leq M$. De même :

$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall (r,s) \in \mathbb{N}^2, \sum_{j=0}^{s} \sum_{i=0}^{r} u_{ij} \leq M$.

Q2 Comme $\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} u_{ij} = \sum_{j=0}^{s} \sum_{i=0}^{r} u_{ij}$; ce qui précède permet de dire que : $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe $\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe.

Supposons que $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$ existent.

$\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{j=0}^{s} \sum_{i=0}^{r} u_{ij} = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} u_{ij} \leq \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$.

$\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{j=0}^{s} \sum_{i=0}^{r} u_{ij} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$

En faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient : $\sum_{j=0}^{s} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$.

En faisant tendre s vers $+\infty$ il vient $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$.

On montre de même que $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$ et ainsi $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij} = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$.