Exercice 11 $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de réels positifs ou nuls.

Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ est de même nature que la série de terme général u_n.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $1 \leqslant 1+u_n$. $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+u_n} \leqslant 1$ et $u_n \geqslant 0$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$.

Donc si la série de terme général u_n converge, les règles de comparaison des séries à ~~terme~~ positifs montrent que la série de terme général v_n converge.

Réciproquement, supposons que la série de terme général v_n converge.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $v_n + v_n u_n = u_n$.

$\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $v_n = u_n(1-v_n)$.

Or $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $v_n \neq 1$ ($v_n = 1 \Rightarrow u_n = 1+u_n \Rightarrow 1=0$!)

Alors $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$.

Or la série de terme général v_n converge donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Ainsi $\lim (1-v_n) = 1$. Alors :

1) $u_n \sim v_n$

2) $\forall n \in [\![n_0, +\infty [\![$, $u_n \geqslant 0$

3) la série de terme général v_n converge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général u_n converge.

Ainsi <u>les séries de termes généraux u_n et $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.</u>

Exercice 12 Q1. a) Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge (on pourra utiliser $\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t}\, dt$).

b) En déduire que si β est un élément de $]-\infty, 1]$, la série de terme général $\dfrac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$ diverge.

Q2. Etudier la nature de la série de terme général $v_n = \sqrt{\ln(3n+1)} - \sqrt{\ln(3n)}$.

Q1 a) $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln t$ sont strictement croissantes sur $[2, +\infty[$ et positives.

Alors $t \mapsto t \ln t$ est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Comme cette fonction est strictement positive sur $[2, +\infty[$: $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t}$ est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.

$\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\varphi(k) \geqslant \int_k^{k+1} \varphi(t)\,dt$

$\forall n \in [\![3, +\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \varphi(k) \geqslant \int_2^n \varphi(t)\,dt = \int_2^n \frac{1/t}{\ln t}\,dt = \Big[\ln|\ln t|\Big]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$.

Alors $\forall n \in [\![3, +\infty[\![$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k \geqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{n \ln n}$.

Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\ln(\ln 2) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{n \ln n}\right) = +\infty$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} u_k = +\infty$. La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$ diverge.

b) Soit $\beta \in]-\infty, 1]$. Si $\beta = 1$, d'après a) la série de terme général $\dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge.

Supposons $\beta < 1$. $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n \ln n}}{\frac{1}{n(\ln n)^\beta}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(\ln n)^{1-\beta}} \underset{1-\beta > 0}{=} 0$

Alors 1) $\dfrac{1}{n \ln n} = o\left(\dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}\right)$

2) $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\dfrac{1}{n \ln n} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n(\ln n)^\beta} \geqslant 0$

3) La série de terme général $\dfrac{1}{n \ln n}$ diverge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge.

<u>Pour tout $\beta \in]-\infty, 1]$, la série de terme général $\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ diverge.</u>

Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $v_n = \frac{\ln(3n+1) - \ln 3n}{\sqrt{\ln(3n+1)} + \sqrt{\ln 3n}} = \frac{1}{\sqrt{\ln 3n}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\ln(3n+1)}{\ln 3n}} + 1} \ln\left(1 + \frac{1}{3n}\right)$

$v_n \sim \frac{1}{3n\sqrt{\ln(3n)}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\ln(3n+1)}{\ln 3n}} + 1}$.

$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\ln(3n+1)}{\ln 3n}\right] = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln 3n + \ln\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{\ln 3n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln 3n}\ln\left(1+\frac{1}{3n}\right)\right) = 1.$

Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{\ln(3n+1)}{\ln 3n}} + 1} = \frac{1}{2}$. Ainsi $v_n \sim \frac{1}{6n} \frac{1}{\sqrt{\ln n + \ln 3}}$.

$\ln 3 = o(\ln n)$ donc $\ln n + \ln 3 \sim \ln n$; $v_n \sim \frac{1}{6} \frac{1}{n(\ln n)^{1/2}}$.

1) $v_n \sim \frac{1}{6} \frac{1}{n(\ln n)^{1/2}}$

2) $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $\frac{1}{6} \frac{1}{n(\ln n)^{1/2}} \geq 0$

3) la série de terme général $\frac{1}{6} \frac{1}{n(\ln n)^{1/2}}$ diverge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent <u>la divergence de la série de terme général $v_n = \sqrt{\ln(3n+1)} - \sqrt{\ln(3n)}$</u>.

Exercice 13 On considère la fonction numérique de la variable réelle $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

Q1. Montrer que le domaine de définition de f est $]0, +\infty[$. Étudier les variations de f.

Q2. Trouver la limite de f en 0 ($\sqrt{n} \leqslant n$...). Trouver la limite de f en $+\infty$.

Q3. x est un élément de $]0, +\infty[$. Trouver $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-x\sqrt{t}}\,dt$ (faire un changement de variable).

Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$ (on pourra utiliser $\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt$).

Q4. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$.

Q1 Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$. Soit x un réel.

Si $x < 0$: $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ et si $x = 0$ $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 1$.

Ainsi si $x \leq 0$, la série de terme général $u_n(x)$ ne converge pas et $x \notin D_f$.

Supposons $x > 0$.

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2 u_n(x)) = \lim_{n\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}+2\ln n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}\left[1-\frac{2\ln n}{x\sqrt{n}}\right]} = 0.$$

Ainsi 1) $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) \geqslant 0$ et $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$

3) La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge.

La règle de comparaison des séries à termes positifs montre que la série de terme général $u_n(x)$ converge. Ainsi $x \in D_f$.

Finalement $\underline{D_f =]0, +\infty[}$. ▲ voir les variations de f à la fin de Q2

Q2 Soit $x \in]0,+\infty[$. Les séries de termes généraux $u_n(x)$ et $\left(\frac{1}{e^x}\right)^n = e^{-xn}$ convergent $\left(\left|\frac{1}{e^x}\right| < 1\right)$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leqslant n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $-xn \leqslant -x\sqrt{n}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-xn} \leqslant e^{-x\sqrt{n}}$.

Donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}}$.

$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) \geq \dfrac{1}{1-e^{-x}}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} (1-e^{-x}) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{1-e^{-x}} = +\infty$. Alors $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}}$.

Soit $x \in [1, +\infty[$. $f(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 1 + e^{-x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-x(\sqrt{n}-1)}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} - 1 \geq 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, x(\sqrt{n}-1) \geq \sqrt{n} - 1 \quad (x \geq 1 !)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, -x(\sqrt{n}-1) \leq -(\sqrt{n}-1)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{-x(\sqrt{n}-1)} \leq e^{-(\sqrt{n}-1)} = e\, e^{-\sqrt{n}}$.

$1 \in D_f$ donc la série de terme général $e^{-\sqrt{n}}$ converge ; celle de terme général $e^{-(\sqrt{n}-1)}$ aussi.

Alors $\quad 0 \leq e^{-x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-x(\sqrt{n}-1)} \leq e^{-x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-(\sqrt{n}-1)}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-(\sqrt{n}-1)} \right) = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{-x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-x(\sqrt{n}-1)} \right) = 0$.

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + e^{-x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-x(\sqrt{n}-1)} \right) = 1$. $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1}}$.

▲ <u>Variation de f :</u> Soient x et y deux éléments de D_f tels que $x \leq y$.

$\forall n \in \mathbb{N}, -y\sqrt{n} \leq -x\sqrt{n}$. $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-y\sqrt{n}} \leq e^{-x\sqrt{n}}$.

Alors $\quad f(y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-y\sqrt{n}} \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leq f(x)$.

$\forall (x,y) \in]0, +\infty[^2, \; x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$. $\underline{\underline{f \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[.}}$

(Q3) Soit $x \in]0, +\infty[$. Soit $(\varepsilon, A) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$

$t \mapsto x\sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ ce qui autorise le changement de variable $u = x\sqrt{t}$ dans ce qui suit

$$\int_\varepsilon^A e^{-x\sqrt{t}}\, dt \underset{u = x\sqrt{t}}{=} \int_{x\sqrt{\varepsilon}}^{x\sqrt{A}} e^{-u} \frac{2u}{x^2}\, du = \frac{2}{x^2} \int_{x\sqrt{\varepsilon}}^{x\sqrt{A}} u e^{-u}\, du.$$

En faisant tendre ε vers 0 il vient $\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x^2}\int_0^{x\sqrt{A}} u e^{-u}du$.

Une intégration par parties simple donne alors :

$$\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x^2}\left[-ue^{-u}\right]_0^{x\sqrt{A}} - \frac{2}{x^2}\int_0^{x\sqrt{A}}(-e^{-u})du$$

$$\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x^2}\left(-x\sqrt{A}e^{-x\sqrt{A}}\right) - \frac{2}{x^2}\left[e^{-u}\right]_0^{x\sqrt{A}}.$$

$\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}dt = -\frac{2}{x}\sqrt{A}e^{-x\sqrt{A}} - \frac{2}{x^2}e^{-x\sqrt{A}} + \frac{2}{x^2}$. Alors $\underline{\underline{\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x^2}}}$.

En clair $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt$ existe et vaut $\frac{2}{x^2}$.

$\forall k\in\mathbb{N}, \forall t\in[k,k+1],\quad e^{-x\sqrt{k+1}} \leq e^{-x\sqrt{t}} \leq e^{-x\sqrt{k}}$

$\forall k\in\mathbb{N},\quad e^{-x\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leq e^{-x\sqrt{k}}$.

$\forall N\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{N} e^{-x(\sqrt{k+1})} \leq \int_0^{N+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leq \sum_{k=0}^{N} e^{-x\sqrt{k}}$.

En faisant tendre N vers $+\infty$ il vient $\quad f(x)-1 \leq \frac{2}{x^2} \leq f(x)$.

Ainsi $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}+1$ ou $2 \leq x^2 f(x) \leq 2+x^2$.

Or $\lim_{x\to 0}(2+x^2)=2$. Par encadrement il vient $\lim_{x\to 0}(x^2 f(x))=2$

Alors $x^2 f(x) \underset{0}{\sim} 2$; $f(x)\underset{0}{\sim}\frac{2}{x^2}$.

Q4 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$; Soit $x\in]0,+\infty[$ $\Big\}$ $\lim_{n\to+\infty}(n^2 n^\alpha e^{-x\sqrt{n}})=0$ donc 1) $n^\alpha e^{-x\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*, n^\alpha e^{-x\sqrt{n}} \geq 0$ et $\frac{1}{n^2}\geq 0$

3) La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge

En faisant tendre ε vers 0 il vient $\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x^2}\int_0^{x\sqrt{A}} u\, e^{-u}du$.

Une intégration par parties simple donne alors :

$$\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x^2}\left[-u e^{-u}\right]_0^{x\sqrt{A}} - \frac{2}{x^2}\int_0^{x\sqrt{A}}(-e^{-u})du$$

$$\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x^2}\left(-x\sqrt{A}e^{-x\sqrt{A}}\right) - \frac{2}{x^2}\left[e^{-u}\right]_0^{x\sqrt{A}}.$$

$\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}dt = -\frac{2}{x}\sqrt{A}e^{-x\sqrt{A}} - \frac{2}{x^2}e^{-x\sqrt{A}} + \frac{2}{x^2}$. Alors $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x\sqrt{t}}dt = \frac{2}{x^2}$.

En clair $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}dt$ existe et vaut $\frac{2}{x^2}$.

$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall t\in[k,k+1],\quad e^{-x\sqrt{k+1}} \leq e^{-x\sqrt{t}} \leq e^{-x\sqrt{k}}$

$\forall k\in\mathbb{N},\quad e^{-x\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leq e^{-x\sqrt{k}}.$

$\forall N\in\mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{N} e^{-x(\sqrt{k+1})} \leq \int_0^{N+1} e^{-x\sqrt{t}}dt \leq \sum_{k=0}^{N} e^{-x\sqrt{k}}.$

En faisant tendre N vers $+\infty$ il vient $f(x)-1 \leq \frac{2}{x^2} \leq f(x)$.

Ainsi $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}+1$ ou $2 \leq x^2 f(x) \leq 2+x^2$.

$\lim_{x\to 0}(2+x^2) = 2$. Par encadrement il vient $\lim_{x\to 0}(x^2 f(x)) = 2$

Alors $x^2 f(x) \underset{0}{\sim} 2$; $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

Q4 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Soit $x\in]0,+\infty[$. $\lim_{n\to+\infty}(n^2 n^\alpha e^{-x\sqrt{n}}) = 0$ donc 1) $n^\alpha e^{-x\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n^\alpha e^{-x\sqrt{n}} \geq 0$ et $\frac{1}{n^2} \geq 0$

3) la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $n^{\alpha} e^{-x\sqrt{n}}$ et ceci pour tout α dans $\mathbb{R}$ et tout x dans $\mathbb{R}_+^*$ ← ⊛

Soit $x \in]0,+\infty[$. Notons que $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ existe d'après ce qui précède.

Posons $g(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$ et montrons que $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x)$.

Soit h un élément de $\mathbb{R}^*$ tel que $|h| < \frac{x}{2}$. Notons que $x+h > x-\frac{x}{2} > 0$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x) = \frac{1}{h}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(x+h)\sqrt{n}} - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(h\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}\right)\right].$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x) = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\left[e^{-h\sqrt{n}} - 1 + h\sqrt{n}\right].$$

$\varphi : u \mapsto e^{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Appliquons alors l'inégalité de Taylor-Lagrange à φ et à l'ordre 1.

$$|\varphi(u)-\varphi(0)-(u-0)\varphi'(0)| \le \frac{|u|^2}{2!}\max_{z\in[0,u]}|\varphi''(z)| \quad \text{pour tout } u \text{ dans } \mathbb{R}.$$

$$\forall u\in\mathbb{R},\ |e^{u}-1-u| \le \frac{u^2}{2}\max_{z\in[0,u]}|e^{z}| = \frac{u^2}{2}\max_{z\in[0,u]} e^{z} = \frac{u^2}{2}e^{\max(0,u)} \le \frac{u^2}{2}e^{|u|}$$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $|e^{-h\sqrt{n}}-1+h\sqrt{n}| \le \frac{(h\sqrt{n})^2}{2}e^{|h|\sqrt{n}} = \frac{h^2 n}{2}e^{|h|\sqrt{n}} \le \frac{h^2}{2}\, n\, e^{\frac{x}{2}\sqrt{n}}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $e^{-x\sqrt{n}}|e^{-h\sqrt{n}}-1+h\sqrt{n}| \le \frac{h^2}{2}\, n\, e^{-x\sqrt{n}+\frac{x}{2}\sqrt{n}} = \frac{h^2}{2}\, n\, e^{-\frac{x}{2}\sqrt{n}}$.

$$\forall N\in\mathbb{N},\ \left|\sum_{n=0}^{N} e^{-x\sqrt{n}}\left[e^{-h\sqrt{n}}-1+h\sqrt{n}\right]\right| \le \sum_{n=0}^{N} e^{-x\sqrt{n}}|e^{-h\sqrt{n}}-1+h\sqrt{n}| \le \frac{h^2}{2}\sum_{n=0}^{N} n\, e^{-\frac{x}{2}\sqrt{n}}.$$

Or les séries de termes généraux $e^{-x\sqrt{n}}\left[e^{-h\sqrt{n}}-1+h\sqrt{n}\right]$ et $n\, e^{-\frac{x}{2}\sqrt{n}}$ convergent (par définition de $f(x+h)$, $f(x)$, $g(x)$ et grâce à ⊛).

Alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\left[e^{-h\sqrt{n}}-1+h\sqrt{n}\right]\right| \le \frac{h^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\, e^{-\frac{x}{2}\sqrt{n}}$.

Ainsi $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right| \le \frac{1}{|h|}\frac{h^2}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\, e^{-\frac{x}{2}\sqrt{n}} = \frac{|h|}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\, e^{-\frac{x}{2}\sqrt{n}}$. Il vient alors par encadrement $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x)$. Ainsi f est dérivable en x et $f'(x) = g(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$.

Exercice 14 **Bertrand**

Q1. a) Trouver un équivalent de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_1^n (\ln t)^2 \, dt$.

b) En déduire un équivalent de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$.

Q2. α est un réel. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$.

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\forall t \in [1,+\infty[$, $u(t) = t$ et $v(t) = (\ln t)^2$.

u et v sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, $\forall t \in [1,+\infty[$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = 2 \times \frac{1}{t} \times \ln t$

Alors, en intégrant par parties, on obtient :

$$I_n = \left[t (\ln t)^2\right]_1^n - \int_1^n t \times 2 \times \frac{1}{t} \times \ln t \, dt = n(\ln n)^2 - 2\int_1^n \ln t \, dt.$$

$$I_n = n(\ln n)^2 - 2\left[t \ln t - t\right]_1^n = n(\ln n)^2 - 2n\ln n + 2n - 2.$$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = n(\ln n)^2 - 2n\ln n + 2n - 2.}}$$

Alors $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\dfrac{I_n}{n(\ln n)^2} = 1 - \dfrac{2}{\ln n} + \dfrac{2}{(\ln n)^2} - \dfrac{2}{n(\ln n)^2}$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{I_n}{n(\ln n)^2}\right) = 1$. $\underline{\underline{I_n \sim n(\ln n)^2}}$

b) $\varphi : t \mapsto (\ln t)^2$ est clairement croissante sur $[1,+\infty[$ (φ est dérivable sur $[1,+\infty[$

et $\forall t \in [1,+\infty[$, $\varphi'(t) = 2 \times \frac{1}{t}(\ln t) \geqslant 0$).

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [k, k+1]$, $\varphi(k) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(k+1)$.

Donc en intégrant : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(k) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \varphi(t)\,dt \leqslant \varphi(k+1)$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2$. $\varphi(1) = 0$

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(k) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \varphi(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(k+1) = \sum_{k=2}^{n} \varphi(k) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) - \varphi(n) \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)$.

Alors $S_n - (\ln n)^2 \leqslant I_n \leqslant S_n$ ou $I_n \leqslant S_n \leqslant I_n + (\ln n)^2$.

Exercice 15 **Intégration d'une série de fonctions**

a et b sont deux éléments éléments de $\mathbb{N}^*$.

Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$ (donner une forme intégrale aux sommes partielles).

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{a+kb-1}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} t^{a-1}(-t^b)^k\,dt$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 t^{a-1} \sum_{k=0}^{n} (-t^b)^k\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 t^{a-1}\frac{1-(-t^b)^{n+1}}{1-(-t^b)}\,dt = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt - \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{a-1}(-t^b)^{n+1}}{1+t^b}\,dt}_{H_n}$$

$\forall t \in [0,1],\ (-t^b) \neq 1$

Montrons alors que $\lim_{n\to+\infty} H_n = 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |H_n| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{a-1+b(n+1)}}{1+t^b}\,dt\right| = |(-1)^{n+1}| \left|\int_0^1 \frac{t^{a-1+b(n+1)}}{1+t^b}\,dt\right|$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |H_n| = \int_0^1 \frac{t^{a-1+b(n+1)}}{1+t^b}\,dt \underset{\uparrow}{\leq} \int_0^1 t^{a-1+b(n+1)}\,dt = \frac{1}{a+b(n+1)}.$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ t^{a-1+b(n+1)} \geq 0$ et $\frac{1}{1+t^b} \leq 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a+b(n+1)} \underset{\substack{\downarrow\\ b\neq 0}}{=} 0 \text{ donc par encadrement } \lim_{n\to+\infty} H_n = 0.$$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$.

Ainsi la série de terme général $\frac{(-1)^k}{a+kb}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,dt$.

<u>Remarque</u>.. Pour $a=b=1$ on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$ ou

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Pour $a=1$ et $b=2$ il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice .. Même chose avec $a \in]0,+\infty[$ et $b \in]0,+\infty[$.

Alors $\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $\frac{I_n}{n(\ln n)^2} \leq \frac{S_n}{n(\ln n)^2} \leq \frac{I_n}{n(\ln n)^2} + \frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n(\ln n)^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{I_n}{n(\ln n)^2} + \frac{1}{n}\right) = 1$.

Par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n(\ln n)^2}\right) = 1$. $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2 \sim n(\ln n)^2}}$.

Q2 $\ast$ $u_n \sim \frac{1}{n^\alpha} n(\ln n)^2 = \frac{(\ln n)^2}{n^{\alpha-1}}$.

$\ast$ $\forall n \in [\![1,+\infty[\![$, $\frac{(\ln n)^2}{n^{\alpha-1}} \geq 0$.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $\frac{(\ln n)^2}{n^{\alpha-1}}$. (qui est une série de Bertrand).

Posons $\beta = \alpha - 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{(\ln n)^2}{n^{\alpha-1}} = \frac{(\ln n)^2}{n^\beta}$.

$\underline{\underline{1^{er}\text{ cas}}}$.. $\beta > 1$. Soit r un élément de $]1,\beta[$ (ex : $r = \frac{1+\beta}{2}$).

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{v_n}{1/n^r}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{\beta-r}} = 0$ par croissance comparée car $\beta - r > 0$.

1) $v_n = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ 2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{(\ln n)^2}{n^\beta} \geq 0$ et $\frac{1}{n^r} \geq 0$ 3) la série de terme général $\frac{1}{n^r}$ converge. Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général v_n converge. Il en est de même pour la série de terme général u_n.

$\underline{\underline{2^{ème}\text{ cas}}}$.. $\beta \leq 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1/n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(\ln n)^2 n^{1-\beta}} = 0$. ($1-\beta \geq 0$)

Ainsi 1) $\frac{1}{n} = o(v_n)$ 2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \geq 0$ et $v_n \geq 0$ 3) la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général v_n diverge. Il en est de même de la série de terme général u_n.

Ainsi la série de terme général u_n converge ssi $\beta > 1$ $\underline{\text{ie}}$ $\alpha - 1 > 1$ ie $\alpha > 2$!

Exercice 15 **Exponentielle d'une matrice.**

p appartient à $\mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et si M appartient à E, pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient de M situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de E. $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge si, pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$, la suite de terme général $[M_n]_{i,j}$ converge. En cas de convergence la limite de la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est la matrice de E, $M = \big(\lim\limits_{n\to+\infty}[M_n]_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$; on dit encore que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers M.

On admet que si $(M_n)_{n\geqslant 0}$ et $(N_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites déléments de E qui convergent vers M et N et si T est une matrice de E, les suites $(M_n+N_n)_{n\geqslant 0}$, $(M_n\,N_n)_{n\geqslant 0}$, $(T\,M_n)_{n\geqslant 0}$ et $(M_n\,T)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement vers $M+N$, $M\,N$, $T\,M$ et $M\,T$.

Q1. A est un élément de E. m_A est le maximum de la valeur absolue des coefficients de A.

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2\ \big|[A^k]_{i,j}\big| \leqslant p^{k-1}\, m_A^k$.

b) En déduire que la suite de terme général $S_n(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,A^k$ converge. Nous noterons e^A sa limite.

Q2. On suppose que A et B sont deux matrices de E qui commutent.

a) Montrer que B et e^A commutent. Montrer que e^A et e^B commutent

b) Utiliser le produit de Cauchy pour montrer que $e^{A+B} = e^A\,e^B$

Q1) a) Montrons ce résultat par récurrence sur k.

* $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $|[A^1]_{i,j}| = |[A]_{i,j}| \leqslant m_A = p^{1-1} m_A^1$.

La propriété est vraie pour $k=1$.

* Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $k+1$.

Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. $A^{k+1} = A^k \times A$.

$$|[A^{k+1}]_{i,j}| = \Big|\sum_{r=1}^{p} [A^k]_{i,r}\,[A]_{r,j}\Big| \leqslant \sum_{r=1}^{p} |[A^k]_{i,r}|\,|[A]_{r,j}| \overset{HR}{\leqslant} \sum_{r=1}^{p} p^{k-1} m_A^k \times m_A.$$

$$|[A^{k+1}]_{i,j}| \leqslant \sum_{r=1}^{p} p^{k-1} m_A^{k+1} = p \times p^{k-1} m_A^{k+1} = p^k m_A^{k+1} = p^{(k+1)-1} m_A^{k+1}.$$

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $|[A^{k+1}]_{i,j}| \leqslant p^{(k+1)-1} m_A^{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

b) Pour montrer que la suite de terme général $S_n(A)$ converge il suffit de montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ la suite de terme général $[S_n(A)]_{i,j}$ converge ou que pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}[A^k]_{i,j}$ ou encore que pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]$ la série de terme général $\frac{1}{k!}[A^k]_{i,j}$ converge.

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \dfrac{[A^\ell]_{i,j}}{\ell!} \right| \leq \dfrac{1}{\ell!} p^{\ell-1} m_A^\ell = \dfrac{1}{p} \, \dfrac{(p m_A)^\ell}{\ell!}$.

De plus la série de terme général $\dfrac{1}{p}\dfrac{(p m_A)^\ell}{\ell!}$ converge. Les règles de comparaison aux séries à termes positifs montrent que, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la série de terme général $\left| \dfrac{[A^\ell]_{i,j}}{\ell!} \right|$ converge.

Donc pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la série de terme général $\dfrac{[A^\ell]_{i,j}}{\ell!}$ absolument convergente donc convergente.

Ainsi la suite de terme général $S_n(A)$ converge. Nous noterons e^A sa limite.

Remarque - $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \; [e^A]_{i,j} = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \dfrac{[A^\ell]_{i,j}}{\ell!}$.

Q2 a) $\forall n \in \mathbb{N}, \; B S_n(A) = B\left(\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \dfrac{1}{\ell!} A^\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{n} \dfrac{1}{\ell!} B A^\ell \underset{(*)}{=} \sum_{\ell=0}^{n} \dfrac{1}{\ell!} A^\ell B = S_n(A) B$

(*) Comme $AB = BA$ une récurrence simple donne $\forall \ell \in \mathbb{N}, \; BA^\ell = A^\ell B$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \; B S_n(A) = S_n(A) B$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n(A) = e^A$

Les résultats admis (et très simples à montrer) donnent alors $B e^A = e^A B$.

Une récurrence simple donne aussi $\forall \ell \in \mathbb{N}, \; B^\ell e^A = e^A B^\ell$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \; S_n(B) e^A = \left(\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \dfrac{1}{\ell!} B^\ell\right) e^A = \sum_{\ell=0}^{n} \dfrac{1}{\ell!} (B^\ell e^A) = \sum_{\ell=0}^{n} \dfrac{1}{\ell!} (e^A B^\ell) = e^A \sum_{\ell=0}^{n} \dfrac{1}{\ell!} B^\ell$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; S_n(B) e^A = e^A S_n(B)$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n(B) = e^B$.

Ainsi $e^B e^A = e^A e^B$. e^A et e^B commutent.

▲ Tout est ici. Il faut bien comprendre ce que sont les termes généraux de $e^A e^B$ et de e^{A+B}

b) Rappel.. Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites. On pose $\forall n\in\mathbb{N}$, $\omega_n=\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$

Si les séries de termes généraux u_n et v_n sont absolument convergentes alors la série de terme général ω_n est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty}\omega_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\times\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$.

Montrer que $e^A e^B=e^{A+B}$.

Cela revient à montrer que $\forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2$ $[e^A e^B]_{i,j}=[e^{A+B}]_{i,j}$

Soit $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$. $[e^A e^B]_{i,j}=\sum_{r=1}^{p}[e^A]_{i,r}[e^B]_{r,j}$

▲ $[e^A e^B]_{i,j}=\sum_{r=1}^{p}\left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[A^n]_{i,r}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[B^n]_{r,j}}{n!}\right)\right]$ $\quad (A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$ car $AB=BA$

▲ Notons également que $[e^{A+B}]_{i,j}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[(A+B)^n]_{i,j}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[A^kB^{n-k}]_{i,j}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{r=1}^{p}[A^k]_{i,r}[B^{n-k}]_{r,j}$

Soit $r\in[\![1,p]\!]$.

La question 1 permet de dire que les séries de termes généraux $\frac{[A^n]_{i,r}}{n!}$ et $\frac{[B^n]_{r,j}}{n!}$ sont absolument convergentes. Le rappel précédent montre alors que la série de terme général $\sum_{k=0}^{n}\frac{[A^k]_{i,r}}{k!}\frac{[B^{n-k}]_{r,j}}{(n-k)!}$ est absolument convergente et que : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{[A^k]_{i,r}}{k!}\frac{[B^{n-k}]_{r,j}}{(n-k)!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[A^n]_{i,r}}{n!}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[B^n]_{r,j}}{n!}$.

Or $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{[A^k]_{i,r}}{k!}\frac{[B^{n-k}]_{r,j}}{(n-k)!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[A^k]_{i,r}[B^{n-k}]_{r,j}\right)$

Alors $[e^A e^B]_{i,j}=\sum_{r=1}^{p}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[A^n]_{i,r}}{n!}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{[B^n]_{r,j}}{n!}\right]=\sum_{r=1}^{p}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[A^k]_{i,r}[B^{n-k}]_{r,j}\right)$

Donc $[e^A e^B]_{i,j}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{r=1}^{p}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[A^k]_{i,r}[B^{n-k}]_{r,j}\right)$ (licite car toutes les séries convergent).

$[e^A e^B]_{i,j}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{r=1}^{p}[A^k]_{i,r}[B^{n-k}]_{r,j}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[A^k\times B^{n-k}]_{i,j}$

$[e^A e^B]_{i,j}=\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\right]_{i,j}\overset{AB=BA}{=}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(A+B)^n\right]_{i,j}=[e^{A+B}]_{i,j}$ cqfd.

$\forall (A,B)\in M_p(\mathbb{R})\times M_p(\mathbb{R})$, $AB=BA\Rightarrow e^Ae^B=e^{A+B}$.

Exercice 16 Pour tout n dans $\mathbb{N}$: $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^t\, t^n\, dt$.

Q0 x est un réel. Que dire de la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$?

Q1 Montrer que la série de terme général I_n est convergente.

On note S sa somme et S_n sa somme partielle d'indice n.

Q2 Exprimer, pour k dans $\mathbb{N}$, I_{k+1} en fonction de I_k et de k.

En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $I_{n+1} - I_0 + 2S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e}{(k+1)!}$. Calculer S.

Q3 a) Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange.

b) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ et pour tout t dans $[0,1]$: $\left|e^t - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right| \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}\, e$.

En déduire une majoration de $\left|\displaystyle\int_0^1 e^{2t}\, dt - S_n\right|$, pour tout n dans $\mathbb{N}$. Retrouver S.

Q0 1°/ Pour tout réel x la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge.

2°/ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ pour tout réel x.

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant e^t \leqslant e$ et $0 \leqslant t^n \leqslant 1$.

Alors $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant e^t t^n \leqslant e$. En intégrant on obtient :

$0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^t t^n\, dt \leqslant \int_0^1 e\, dt = e$ car $0 \leqslant 1$.

Alors $0 \leqslant I_n \leqslant e \times \dfrac{1}{n!}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$.

La convergence de la série de terme général $e \times \dfrac{1}{n!}$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs donnent la convergence de la série de terme général I_n.

La série de terme général I_n converge.

Q2 Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $\forall t \in [0,1]$, $u(t) = \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et $v(t) = e^t$.

u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1]$, $u'(t) = t^k$ et $v'(t) = e^t$

En intégrant par parties on obtient alors :

$$I_k = \int_0^1 t^k e^t\,dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} e^t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{k+1}}{k+1} e^t\,dt = \frac{e}{k+1} - \frac{1}{k+1}\int_0^1 t^{k+1} e^t\,dt$$

Alors $I_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 t^k e^t\,dt = \frac{e}{k!\,(k+1)} - \frac{1}{(k+1)!}\int_0^1 t^{k+1} e^t\,dt = \frac{e}{(k+1)!} - I_{k+1}$.

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_k + I_{k+1} = \frac{e}{(k+1)!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (I_k + I_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} I_k + \sum_{k=0}^{n} I_{k+1} = S_n + \sum_{k=1}^{n+1} I_k$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{e}{(k+1)!} = S_n + (S_n - I_0 + I_{n+1}).$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} - I_0 + 2 S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e}{(k+1)!}$. $\quad (*)$

Rappelons que la série de terme général I_n converge donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e}{(k+1)!} = e \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = e\left[\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - 1\right]$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e}{(k+1)!} = e(e-1)$. Notons encore que $I_0 = \frac{1}{0!}\int_0^1 t^0 e^t\,dt = \int_0^1 e^t\,dt = [e^t]_0^1 = e-1$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(*)$ on obtient :

$$0 - (e-1) + 2S = e(e-1) \;;\; 2S = (e-1)(e+1) = e^2 - 1. \quad S = \frac{e^2-1}{2}.$$

Q3 L'idée naturelle de la troisième question est :

« $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^t\,dt \overset{\odot}{\underset{!}{=}} \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n e^t\,dt = \int_0^1 e^t e^t\,dt = \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$ »

HORREUR !! $\qquad$ Encore faut-il justifier $\odot$

Il convient de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}\int_0^1 t^l e^t\,dt\right)=\int_0^1\sum\limits_{l=0}^{+\infty}\frac{1}{l!}t^l e^t\,dt=\int_0^1 e^t\times e^t\,dt$

Pour cela il suffit de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}t^l e^t\,dt=\int_0^1 e^t\times e^t\,dt$;

ou que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\left(\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}t^l-e^t\right)e^t\,dt=0$ ... mais laissons-nous guider.

a) Soit f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$\forall (a,b)\in I^2,\ \left|f(b)-\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{(b-a)^l}{l!}f^{(l)}(a)\right|\leqslant\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\max\limits_{z\in\overleftrightarrow{[a,b]}}|f^{(n+1)}(z)|.$

---

b) $f:t\mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Notons que $\forall k\in\mathbb{N},\ f^{(k)}=f$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,1],\ \left|f(t)-\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{(t-0)^l}{l!}f^{(l)}(0)\right|\leqslant\frac{|t-0|^{n+1}}{(n+1)!}\max\limits_{z\in[0,t]}|f^{(n+1)}(z)|.$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,1],\ \left|f(t)-\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{(t-0)^l}{l!}\times 1\right|\leqslant\frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}\max\limits_{z\in[0,t]}|e^z|=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\max\limits_{z\in[0,t]}e^z.$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,1],\ \left|e^t-\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{t^l}{l!}\right|\leqslant\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\max\limits_{z\in[0,t]}e^z\underset{t\geqslant 0}{=}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^t\underset{t\leqslant 1}{\leqslant}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e.$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,1],\ \left|e^t-\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{t^l}{l!}\right|\leqslant\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e.$

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\left|\int_0^1 e^{2t}dt-S_n\right|=\left|\int_0^1 e^t e^t\,dt-\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}\int_0^1 t^l e^t\,dt\right|.$

$\left|\int_0^1 e^{2t}dt-S_n\right|=\left|\int_0^1 e^t\left[e^t-\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}t^l\right]dt\right|\leqslant\int_0^1\left|e^t\left[e^t-\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}t^l\right]\right|dt$ car $0\leqslant 1$!

$\left|\int_0^1 e^{2t}dt-S_n\right|\leqslant\int_0^1 e^t\left|e^t-\sum\limits_{l=0}^{n}\frac{1}{l!}t^l\right|dt\leqslant\int_0^1 e^t\times\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e=e\,J_{n+1}$ car $0\leqslant 1$!

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(e\,J_{n+1})=0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1 e^{2t}dt=\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^1=\frac{e^2-1}{2}$

Finalement $S=\frac{e^2-1}{2}$ ... again.

Ex 17 Nature de la série de terme général u_n

$\boxed{u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}} - 1}$ Remarque.. $(1+x)^{1/2} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2} x$. Donc $u_n \sim \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{n}$.

malheureusement on ne peut pas conclure sans hypothèse de signe ... on peut tout juste prouver que la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente.

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2} x^2 + o(x^2)$; $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.

Alors $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x \underset{0}{\sim} -\frac{1}{8}x^2$.

Ainsi $\underbrace{u_n - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}}_{v_n} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{8}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2 = -\frac{1}{8n^2}$

Ainsi 1) $-v_n \sim \frac{1}{8n^2}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{8n^2} \geq 0$.

3) la série de terme général $\frac{1}{8n^2}$ converge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $-v_n$ converge. La série de terme général v_n également.

Donc la série de terme général $u_n - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Or la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge (série harmonique alternée).

Alors par combinaison linéaire la série de terme général $\left(u_n - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}\right) + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Donc la série de terme général $u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}} - 1$ converge.

Et si $u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$?

Ex 18 Nature de la série de terme général $u_n = \sum_{\substack{i \geq 1, j \geq 1 \\ i+j=n}} \frac{1}{ij}$.

Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$. $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n-i)} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \left[\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i} \right] \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-i}$

Alors $u_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$.

Rappelons que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \sim \ln n$. Alors $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \sim \ln(n-1) \overset{\text{OK?}}{\sim} \ln n$

Donc $u_n \sim \frac{2}{n} \ln n$ $\frac{1/n}{u_n} \sim \frac{1/n}{(2/n) \ln n} = \frac{1}{2 \ln n}$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1/n}{u_n} = 0$.

Alors 1° $\frac{1}{n} = o(u_n)$ 2° $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $u_n \geq 0$ et $\frac{1}{n} \geq 0$

3° La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Alors les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $u_n = \sum_{\substack{i \geq 1, j \geq 1 \\ i+j=n}} \frac{1}{ij}$ diverge.

Ex 19 Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(xy)^n}{x^n + y^n}$ $((x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$.

1er Cas.. $x = y$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{x^{2n}}{2x^n} = \frac{1}{2} x^n$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $|x| < 1$ ou si $x < 1$

2ème Cas.. $x < y$. 1°.. $u_n = \frac{x^n}{\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1} \underset{n \to +\infty}{\sim} x^n$ car $\lim_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1 \right) = 1$ $\left(\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y} < 1 \right)$

2° $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n \geq 0$

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que les séries de termes généraux u_n et x^n sont de même nature. Alors la série de terme général u_n converge si et seulement si $|x| < 1$ ou si $x < 1$.

3ème Cas.. $y < x$. Par symétrie la série de terme général converge si $y < 1$.

Si $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la série de terme général $u_n = \frac{(xy)^n}{x^n + y^n}$ converge si $\overset{\text{OK?}}{(}x \leq y$ et $x < 1)$ ou $(y \leq x$ et $y < 1)$