Ex 20

Nature de la série de terme général u_n.

$$u_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = e^{n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} - e^{-1/2} = e^{-1/2}\left(e^{t_n} - 1\right)$ où $t_n = n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}$.

$$n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{\Uparrow}{\sim} n\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1\right) = -n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim -n\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = -\frac{1}{2}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{\sqrt{n}} = 1$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$. $u_n = e^{-1/2}\left(e^{t_n}-1\right) \sim e^{-1/2}\,t_n$.

Il convient alors de trouver un équivalent de la suite de terme général t_n.

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$ au voisinage de 0.

$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ au voisinage de 0 et $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x - 1) = 0$.

Alors $\ln\cos x = \ln\left(1 + (\cos x - 1)\right) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)$ au voisinage de 0.

$\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$. au voisinage de 0.

Alors $\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{12}\,\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2n} = -\frac{1}{12}\times\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Alors $\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{2n} \sim -\frac{1}{12}\,\frac{1}{n^2}$. $t_n = n\left(\ln\cos\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right) \sim -\frac{1}{12}\times\frac{1}{n}$.

Donc $u_n \sim -\frac{e^{-1/2}}{12}\,\frac{1}{n}$. Ainsi $-u_n \sim \frac{e^{-1/2}}{12}\times\frac{1}{n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e^{-1/2}}{12}\times\frac{1}{n} \geqslant 0$

et la série de terme général $\frac{e^{-1/2}}{12}\times\frac{1}{n}$ diverge.

La règle de comparaison des séries à termes positifs montre que la série de terme général $-u_n$ diverge. La série de terme général $u_n = \left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}$ diverge.

Ex 21 Nature la la série de terme général u_n.

a) $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi n^2}{2n^2+an+1}\right)$

$\dfrac{\pi n^2}{2n^2+an+1} \sim \dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$!

$$u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi n^2}{2n^2+an+1}\right) \underset{\uparrow}{\sim} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi n^2}{2n^2+an+1} = \frac{\pi}{2}\,\frac{an+1}{2n^2+an+1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi n^2}{2n^2+an+1}\right) = 0$

__1er cas.. $a \neq 0$__ $\quad u_n \sim \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{an+1}{2n^2+an+1} \sim \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{an}{2n^2} = \dfrac{a\pi}{4}\times\dfrac{1}{n}$.

1) $u_n \sim \dfrac{a\pi}{4}\times\dfrac{1}{n}$

2) $\left(\dfrac{a\pi}{4}\times\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ a tous ses termes positifs ou tous ses termes négatifs

3) La série de terme général $\dfrac{a\pi}{4}\times\dfrac{1}{n}$ diverge.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs ou à termes négatifs montrent que <u>la série de terme général u_n diverge</u>.

__2ème cas.. $a = 0$.__ $\quad$ 1) $u_n \sim \dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{1}{n^2}$ $\quad$ 2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{1}{n^2} \geq 0$ $\quad$ 3) la série de terme général $\dfrac{\pi}{4}\times\dfrac{1}{n^2}$ converge. Alors les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que <u>la série de terme général u_n converge</u>.

b) $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\,dt$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En intégrant par parties il vient :

$$u_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\sin \pi t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\,\pi\cos(\pi t)\,dt = -\frac{\pi}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}\cos(\pi t)\,dt$$

$$|u_n| \overset{0\leq 1}{\leq} \frac{\pi}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}|\cos(\pi t)|\,dt \leq \frac{\pi}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}\,dt = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)}.$$

Alors $0 \leq n^{3/2}|u_n| \leq \dfrac{\pi n^{3/2}}{(n+1)(n+2)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi n^{3/2}}{(n+1)(n+2)} = 0$ car $\dfrac{\pi n^{3/2}}{(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$. Par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^{3/2}|u_n|\right) = 0$.

1) $|u_n| = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$; 2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \geq 0$ et $\dfrac{1}{n^{3/2}} \geq 0$; 3) la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|u_n|$ converge. La série de terme général u_n converge.

Exercice 22 $I =]-\alpha, \alpha[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est **absolument croissante** sur I c'est à dire que f est de classe C^∞ sur I et que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(k)}(x) \geqslant 0.$$

On se propose de montrer que pour tout élément x de I : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ et $T_n(x) = f(x) - S_n(x)$.

Il s'agit donc de montrer que $\forall x \in I,\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} T_n(x) = 0$.

Q0 Préciser la monotonie de $f^{(k)}$ pour tout élément k de $\mathbb{N}$ (*hors correction*).

Q1 a) x et dans I et n dans $\mathbb{N}$. Donner une forme intégrale à $T_n(x)$.

Montrer que $T_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ux)\, du$ (*hors correction ; je n'utilise pas cette forme dans la correction ce qui complique un peu les choses...*).

b) x est un réel positif de I. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n(x) \leqslant f(x)$.

En déduire que la série de terme général $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ converge.

Montrer très simplement que ce dernier résultat vaut pour tout élément x de I.

Q2 a) Montrer que si n est dans $\mathbb{N}$, $x \to \dfrac{T_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0, \alpha[$.

En déduire que si x et y deux réels tels que $0 < x < y < \alpha$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant T_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n T_n(y) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$$

b) Montrer en utilisant a) (si c'est possible) que $\forall x \in [0, \alpha[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$.

c) Soit x un élément de $]-\alpha, 0[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |T_n(x)| \leqslant T_n(-x) = T_n(|x|)$. Conclure !

Q3 **Facultatif pour aujourd'hui**

Ici $I =]a, b[$ et f est absolument croissante sur I. Montrer que pour tout élément c de I, il existe un réel β strictement positif tel que :

$$\forall x \in]c-\beta, c+\beta[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}\, (x-c)^n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(Q1) a) f est de classe C^∞ sur J. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre n donne :

$$\forall x \in J,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = S_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J,\ T_n(x) = f(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.

b) $x \in J$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x \geqslant 0$.

$\forall t \in [0,x],\ \frac{(x-t)^n}{n!} \geqslant 0$ et $f^{(n+1)}(t) \geqslant 0$. $\forall t \in [0,x],\ \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \geqslant 0$.

En intégrant il vient $T_n(x) = f(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \geqslant 0$ car $x \geqslant 0$.

Ainsi $\forall x \in [0,\alpha[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) - S_n(x) \geqslant 0$.

$\forall x \in [0,\alpha[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_n(x) \leqslant f(x)$.

Soit $x \in [0,\alpha[$. La suite $(S_n(x))_{n\geqslant 0}$ des sommes partielles de la série de terme général $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est majorée par $f(x)$. Cette série étant à termes positifs elle est convergente.

Pour tout x dans $[0,\alpha[$, la série de terme général $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge.

Soit $x \in]-\alpha,0]$. $\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right| = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} |x|^n$ et $|x| \in [0,\alpha[$.

Ainsi la série de terme général $\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right| = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} |x|^n$ est convergente car $|x| \in [0,\alpha[$; la série de terme général $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est absolument convergente donc convergente.

Pour tout $x \in J$ la série de terme général $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est (absolument) convergente.

Q2 a) Soient x et y deux éléments de $]0,a[$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $x \leq y$.

$$\frac{T_n(x)}{x^n} = \frac{1}{x^n}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{1}{n!}\int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

$\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \frac{t}{y} \leq \frac{t}{x}$ $\forall t \in [0,x]$, $0 \leq 1-\frac{t}{x} \leq 1-\frac{t}{y}$.

$\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \left(1-\frac{t}{x}\right)^n \leq \left(1-\frac{t}{y}\right)^n$ et $f^{(n+1)}(t) \geq 0$

$\forall t \in [0,x]$, $0 \leq \left(1-\frac{t}{x}\right)^n f^{(n+1)}(t) \leq \left(1-\frac{t}{y}\right)^n f^{(n+1)}(t)$. En intégrant et en multipliant

par $\frac{1}{n!}$ on obtient : $\frac{T_n(x)}{x^n} \leq \frac{1}{n!}\int_0^{\boxed{x}} \left(1-\frac{t}{y}\right)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$.

$x \leq y$ et $\forall t \in [x,y]$, $\left(1-\frac{t}{y}\right)^n f^{(n+1)}(t) \geq 0$ donc $\int_x^y \left(1-\frac{t}{y}\right)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \geq 0$.

Alors $\frac{T_n(x)}{x^n} \leq \frac{1}{n!}\int_0^x \left(1-\frac{t}{y}\right)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \leq \frac{1}{n!}\int_0^x \left(1-\frac{t}{y}\right)^n f^{(n+1)}(t)\,dt + \frac{1}{n!}\int_x^y \left(1-\frac{t}{y}\right) f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{T_n(y)}{y^n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x,y) \in]0,a[^2$, $x < y \Rightarrow \frac{T_n(x)}{x^n} \leq \frac{T_n(y)}{y^n}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{T_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0,a[$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y < a$.

$$0 \leq \frac{T_n(x)}{x^n} \leq \frac{T_n(y)}{y^n} \leq \frac{f(y)}{y^n}\ ; \quad 0 \leq T_n(x) \leq x^n \frac{f(y)}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y).$$

Ainsi !

$$0 \leq T_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y).$$

b) Soit $x \in]0,a[$. $\exists y \in]x,a[$. $0 < x < y < a$.

Alors $0 \leq T_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$. Comme $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$: $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y) = 0$.

x vient alors par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x)=0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)=f(x)$

C'est à dire $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Si $x=0$: $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}=f(0)$; on a très largement

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)=f(x)$.

Finalement $\forall x\in[0,a[$, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

c) Soit $x\in\mathbb{R}$.
Soit $x\in]-a,0[$. $|T_n(x)| = \left|\frac{1}{n!}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right|$

$|T_n(x)| \underset{u=-t}{=} \frac{1}{n!}\left|\int_0^{-x}\frac{(x+u)^n}{n!}f^{(n+1)}(-u)(-du)\right| \underset{-x>0}{\le}\frac{1}{n!}\int_0^{-x}|x+u|^n\left|f^{(n+1)}(-u)\right||-1|\,du$.

$|T_n(x)| \le \frac{1}{n!}\int_0^{-x}|-x-u|^n f^{(n+1)}(-u)\,du \le \frac{1}{n!}\int_0^{-x}|-x-u|^n f^{(n+1)}(u)\,du$

→ $f^{(n+1)}$ croissante car $f^{(n+2)}$ est positive
→ $-u\le u$ car $u\in[0,-x]$

Ainsi $|T_n(x)| \le \frac{1}{n!}\int_0^{-x}|-x-u|^n f^{(n+1)}(u)\,du = \frac{1}{n!}\int_0^{-x}(-x-u)^n f^{(n+1)}(u)\,du = T_n(-x)$.

$0\le|T_n(x)|\le T_n(-x)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

$-x\in]0,a[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(-x)=0$. Ainsi, par encadrement, on obtient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x)=0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)=f(x)$. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Ainsi $\forall x\in I$, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

(Q3) Soit $c \in]a,b[$. Posons $\beta = \min(c-a, b-c)$.

$]c-\beta, c+\beta[\subset]a,b[$.

Si $x \in]-\beta,\beta[$, $x+c \in]c-\beta,c+\beta[$. Posons $\forall x \in]-\beta,\beta[$, $g(x) = f(x+c)$.

f est de classe C^∞ sur $]a,b[$ donc sur $]c-\beta,c+\beta[$. Alors

- g est de classe C^∞ sur $]-\beta,\beta[$
- et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-\beta,\beta[$, $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+c)$

simple à faire... petite récurrence.

f étant absolument croissante sur $]a,b[$: $\forall x \in]-\beta,\beta[$, $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+c) \geq 0$.

Ainsi g est absolument croissante sur $]-\beta,\beta[$

Alors $\forall x \in]-\beta,\beta[$, $\quad g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$\forall x \in]-\beta,\beta[$, $\quad f(x+c) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0+c)}{n!} x^n$

ce qui s'écrit aussi $\forall x \in]c-\beta,c+\beta[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$.

$\forall c \in]a,b[$, $\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in]c-\beta,c+\beta[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$.

Exercice 23 Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}$.

1er cas.. $\alpha < 0$. $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$. Alors $\ln(1+n^\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha$. Ainsi :

1) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^\alpha}{n^\beta} = \dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}} \geqslant 0$.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que les séries de termes généraux u_n et $\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha}}$ sont de même nature.

Par conséquent la série de terme général u_n converge si et seulement si $\beta-\alpha > 1$.

2ème cas.. $\alpha = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\ln 2}{n^\beta}$.

La série de terme général u_n converge si et seulement si $\beta > 1$.

Remarque.. Nous pouvons regrouper les deux cas précédents et dire que :

si $\alpha \leqslant 0$, la série de terme général u_n converge ssi $\beta - \alpha > 1$.

3ème cas.. $\alpha > 0$ Montrons d'abord que $\ln(1+n^\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n^\alpha$ (ou $\alpha \ln n$).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\ln(1+n^\alpha)}{\ln n^\alpha} = \dfrac{\ln n^\alpha + \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\ln n^\alpha} = 1 + \dfrac{1}{\ln n^\alpha} \times \ln\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1+n^\alpha)}{\ln n^\alpha} = 1 + 0 \times 0 = 1$; $\ln(1+n^\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n^\alpha = \alpha \ln n$.

Donc 1) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha \ln n}{n^\beta}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\alpha \ln n}{n^\beta} \geqslant 0$.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $\dfrac{\alpha \ln n}{n^\beta}$

La série de terme général u_n est encore de même nature que la série de terme général $v_n = \frac{\ln n}{n^\beta}$. Étudions cette série de Bertrand.

a) $\beta \leq 1$. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\frac{\frac{1}{n}}{v_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln n}{n^\beta}} = \frac{1}{n^{1-\beta}\ln n}$.

$\lim_{n\to+\infty} n^{1-\beta} = \begin{cases} +\infty \text{ si } \beta<1 \\ 1 \text{ si } \beta = 1 \end{cases}$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$. Alors $\lim_{n\to+\infty} (n^{1-\beta}\ln n) = +\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{v_n} = 0$. Ainsi : 1°) $\frac{1}{n} = o(v_n)$.

2°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \geq 0$ et $v_n \geq 0$.

3°) la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général v_n diverge. Ainsi la série de terme général u_n diverge

b) $\beta > 1$. Soit γ un élément de $]1,\beta[$ (on peut prendre $\gamma = \frac{1+\beta}{2}$).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{v_n}{\frac{1}{n^\gamma}} = \frac{\ln n}{n^{\beta-\gamma}}$; $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{v_n}{\frac{1}{n^\gamma}}\right) = 0$ par croissance comparée car $\beta - \gamma > 0$.

1°) $v_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq 0$ et $\frac{1}{n^\gamma} \geq 0$

3°) La série de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$ converge car $\gamma > 1$.

Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général v_n converge. Alors la série de terme général u_n converge.

Finalement si $\alpha > 0$: la série de terme général converge si $\beta > 1$.

Conclusion : $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge si et seulement si } (\alpha \leq 0 \text{ et } \beta - \alpha > 1) \text{ ou } (\alpha > 0 \text{ et } \beta > 1).}$