PARTIE I

Q1 $U=(u_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{B}=(E_1,E_2,\dots,E_n)$ est la base canonique de $E=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

→ Supposons que : $U\in\mathcal{S}_n$.

$\forall (X,Y)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, ${}^t({}^tXUY)={}^tXUY$ (car ${}^tXUY\in\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$).

$\forall (X,Y)\in E^2$, ${}^tY\,{}^tUX={}^tXUY$

$\forall (X,Y)\in E^2$, ${}^tYUX={}^tXUY$ car ${}^tU=U$

donc $\forall (X,Y)\in E^2$, $\langle Y,UX\rangle=\langle X,UY\rangle$; $\underline{\forall (X,Y)\in E^2,\ \langle UX,Y\rangle=\langle X,UY\rangle}$.

→ Réciproquement supposons que : $\forall (X,Y)\in E^2$, $\langle UX,Y\rangle=\langle X,UY\rangle$.

Alors $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\langle UE_i,E_j\rangle=\langle E_i,UE_j\rangle$; $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, ${}^tE_jUE_i={}^tE_iUE_j$

or $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $UE_i=\sum_{k=1}^n u_{ki}E_k$ et $UE_j=\sum_{k=1}^n u_{kj}E_k$

${}^tE_jE_k=\begin{cases}1 \text{ si } k=j\\ 0 \text{ si } k\neq j\end{cases}$

donc $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, ${}^tE_jUE_i={}^tE_j\sum_{k=1}^n u_{ki}E_k=\sum_{k=1}^n u_{ki}\,{}^tE_jE_k=u_{ji}$

$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, ${}^tE_iUE_j={}^tE_i\sum_{k=1}^n u_{kj}E_k=\sum_{k=1}^n u_{kj}\,{}^tE_iE_k=u_{ij}$

Finalement : $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $u_{ij}=u_{ji}$; $\underline{U\in\mathcal{S}_n}$

Donc : $\underline{\underline{U\in\mathcal{S}_n \Leftrightarrow \forall (X,Y)\in E^2,\ \langle UX,Y\rangle=\langle X,UY\rangle}}$.

Q2 Soit $(U,V)\in\mathcal{S}_n^2$. $UV\in\mathcal{S}_n \Leftrightarrow {}^t(UV)=UV \Leftrightarrow {}^tV\,{}^tU=UV \Leftrightarrow VU=UV$ — $U\in\mathcal{S}_n$ et $V\in\mathcal{S}_n$.

donc $\underline{\forall (U,V)\in\mathcal{S}_n^2,\ UV\in\mathcal{S}_n \Leftrightarrow VU=UV}$.

Q3 $X=\sum_{k=1}^n \alpha_k E'_k$; $UX=\sum_{k=1}^n \alpha_k UE'_k=\sum_{k=1}^n \alpha_k\lambda_k E'_k$

$\langle UX,X\rangle=\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k E'_k,\sum_{k=1}^n \alpha_k\lambda_k E'_k\rangle=\sum_{i=1}^n \alpha_k(\alpha_k\lambda_k)$ car $(E'_1,E'_2,\dots,E'_n)$ est orthonormée.

$\langle UX,X\rangle=\sum_{k=1}^n \alpha_k^2\lambda_k=\sum_{k=1}^n \lambda_k\alpha_k^2$.

Donc si $X=\sum_{k=1}^n \alpha_k E'_k$: $\underline{\underline{\langle UX,X\rangle=\sum_{k=1}^n \lambda_k\alpha_k^2}}$.

Q4 i) ⇒ ii). Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $E'_k\neq 0$ donc $\langle UE'_k,E'_k\rangle>0$

$\langle UE'_k,E'_k\rangle=\langle \lambda_k E'_k,E'_k\rangle=\lambda_k\langle E'_k,E'_k\rangle=\lambda_k$; donc $\lambda_k>0$.

$\underline{\forall k\in[\![1,n]\!],\ \lambda_k>0}$.

ii) ⇒ i) Supposons que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k > 0$.

Soit X un élément non nul de E de coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$\exists i \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$. $\langle UX, X\rangle = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2 \geqslant \lambda_i \alpha_i^2}_{\lambda_k \alpha_k^2 \geqslant 0} > 0$ car $\lambda_i > 0$ et $\alpha_i^2 > 0$

Donc $\forall X \in E$, $X \neq 0 \Rightarrow \langle UX, X\rangle > 0$. Ceci achève de prouver que : i) ⇔ ii)

Q5 a) Soit X un élément de E de coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dans la base orthonormale $\mathcal{B}' = (E'_1, E'_2, \dots, E'_n)$ tel que $\|X\|_2 \leqslant 1$.

$$|\langle UX, X\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \alpha_k^2 \leqslant \rho(U) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \overset{\mathcal{B}' \text{ est orthonormale}}{=} \rho(U) \|X\|_2^2 \underset{\|X\|_2 \leqslant 1}{\leqslant} \rho(U).$$

Donc $\forall X \in E$, $\|X\|_2 \leqslant 1 \Rightarrow |\langle UX, X\rangle| \leqslant \rho(U)$.

$\{|\langle UX, X\rangle|\ ;\ X \in E \text{ et } \|X\|_2 \leqslant 1\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée par $\rho(U)$.

b) $\rho(U) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$. $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $\rho(U) = |\lambda_{i_0}|$.

Pour $X = E'_{i_0}$. $\|X\|_2 = \|E'_{i_0}\|_2 = 1 \leqslant 1$! Donc $|\langle UE'_{i_0}, E'_{i_0}\rangle| \leqslant \|U\|$

Or $|\langle UE'_{i_0}, E'_{i_0}\rangle| = |\langle \lambda_{i_0} E'_{i_0}, E'_{i_0}\rangle| = |\lambda_{i_0}|\,|\langle E'_{i_0}, E'_{i_0}\rangle| = |\lambda_{i_0}| = \rho(U)$.

Donc $\rho(U) \leqslant \|U\|$. Mais $\rho(U)$ est un majorant de l'ensemble $\{|\langle UX, X\rangle|\ ;\ X \in E \text{ et } \|X\|_2 \leqslant 1\}$ qui admet pour borne supérieure $\|U\|$; par conséquent $\rho(U) \geqslant \|U\|$.

Finalement $\|U\| = \rho(U)$.

c) Soit X un élément de E de coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dans la base orthonormale $\mathcal{B}' = (E'_1, E'_2, \dots, E'_n)$. $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2}$; $UX \underset{\text{voir plus haut}}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k E'_k$ donc $\|UX\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \lambda_k)^2}$

$$\|UX\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \alpha_k^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\rho(U))^2 \alpha_k^2} = \rho(U) \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2} = \rho(U) \|X\|_2 = \|U\|\,\|X\|_2$$

$\forall X \in E$, $\|UX\|_2 \leqslant \|U\|\,\|X\|_2$.

Donc $\forall X \in E$, $\|X\|_2 \leqslant 1 \Rightarrow \|UX\|_2 \leqslant \|U\|$. Par conséquent $\{\|UX\|_2\ ;\ X \in E \text{ et } \|X\|_2 \leqslant 1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par $\|U\|$.

Par conséquent $\{\|UX\|_2 \, ; X\in E \text{ et } \|X\|_2\leq 1\}$ possède une borne supérieure γ et $\underline{\gamma \leq \|U\|}$. Il reste plus qu'à montrer l'égalité.

Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que : $|\lambda_{i_0}| = \rho(U) = \|U\|$.

$\|UE'_{i_0}\|_2 = \|\lambda_{i_0}E'_{i_0}\| = |\lambda_{i_0}|\|E'_{i_0}\| = |\lambda_{i_0}| = \rho(U) = \|U\|$ et $\|E'_{i_0}\| = 1 \leq 1$!

Donc $\|U\| \in \{\|UX\|_2 \, ; X\in E \text{ et } \|X\|_2\leq 1\}$; par conséquent $\underline{\|U\|\leq \gamma}$.

Finalement : $\underline{\underline{\|U\| = \sup\{\|UX\|_2 \, ; X\in E \text{ et } \|X\|_2\leq 1\}}}$.

Remarque.. Plus généralement si $A\in M_n(\mathbb{R})$, $\{\|AX\|_2 \, ; X\in E \text{ et } \|X\|_2\leq 1\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$; si l'on note $\|A\|$ sa borne supérieure

on peut montrer que $\|A\| = \sqrt{\rho({}^tAA)}$. Un bon exercice de contrôle, facile avec ce qui précède car ${}^tAA$ est une matrice symétrique ...

Q6.. a) Soit U un élément de S_n tel que $\|U\|=0$.

$0 = \|U\| = \sup\{\|UX\|_2 \, ; X\in E \text{ et } \|X\|_2\leq 1\}$.

Par conséquent $\forall X\in E, \; \|X\|_2\leq 1 \Rightarrow \|UX\|_2 = 0$.

$\underline{\forall X\in E, \; \|X\|_2 \leq 1 \Rightarrow UX = 0.}$

Montrons que : $\forall Y\in E, \; UY=0$. Soit $Y\in E$.

Si Y est nul, UY aussi ; supposons $Y\neq 0$ et posons $X = \dfrac{1}{\|Y\|_2}Y$.

Alors $\|X\|_2 = \dfrac{1}{\|Y\|_2}\|Y\|_2 = 1 \leq 1$! Donc $UX=0$.

$UY = U(\|Y\|_2 X) = \|Y\|_2 UX = 0$; donc $\forall Y\in E, UY=0$, $U=0$.

$\forall U\in S_n, \; \|U\|=0 \Rightarrow U=0$. Remarque.. Plus simplement : $\forall X\in E, \; \|UX\|_2 \leq \|U\|\|X\|_2 = 0$
Donc $\forall X\in E, \; \|UX\|_2 = 0$; $\forall X\in E, UX=0$; $U=0$!!

b) - $\forall U\in S_n, \; \|U\|\in\mathbb{R}_+$

- $\forall U\in S_n, \; \|U\| = 0 \Leftrightarrow U=0$ ($\Leftarrow$ clair $\Rightarrow$ a) !)

- Soit $U\in S_n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

$\forall X\in E, \; \|(\lambda U)X\|_2 = |\lambda|\,\|UX\|_2$; donc

$\|\lambda U\| = \sup\{\|\lambda UX\|_2 \, ; X\in E \text{ et } \|X\|_2\leq 1\} = |\lambda| \sup\{\|UX\|_2 \, ; X\in E \text{ et } \|X\|_2\leq 1\} = |\lambda|\,\|U\|$

$\underline{\underline{\forall U\in S_n, \; \forall\lambda\in\mathbb{R}, \; \|\lambda U\| = |\lambda|\,\|U\|.}}$

– Soit $(U,V) \in S_n^2$. Soit $X \in E$ tel que $\|X\|_2 \leq 1$.

$\|(U+V)X\|_2 = \|UX+VX\|_2 \leq \|UX\|_2 + \|VX\|_2 \leq \|U\| + \|V\|$

Donc $\forall X \in E,\ \|X\|_2 \leq 1 \Rightarrow \|(U+V)X\|_2 \leq \|U\| + \|V\|$.

$\|U\|+\|V\|$ est un majorant de $\{\|(U+V)X\|_2\ ;\ X \in E$ et $\|X\|_2 \leq 1\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$ ayant pour borne supérieure $\|U+V\|$.

Donc $\underline{\|U+V\| \leq \|U\|+\|V\|}$.

Ce qui précède suffit pour dire que l'application $\begin{array}{l} S_n \to \mathbb{R} \\ U \mapsto \|U\| \end{array}$ est une norme sur S_n.

c) $(U,V) \in S_n^2$ et $UV = VU$. Donc $UV \in S_n$.

Soit $X \in E$. $\|UVX\|_2 = \|U(VX)\|_2 \leq \|U\|\,\|VX\|_2 \leq \|U\|\,\|V\|\,\|X\|_2$

$\forall X \in E,\ \|X\|_2 \leq 1 \Rightarrow \|UVX\|_2 \leq \|U\|\,\|V\|\,\|X\|_2 \leq \|U\|\,\|V\|$.

$\|U\|\,\|V\|$ majore $\{\|UVX\|_2\ ;\ X \in E$ et $\|X\|_2 \leq 1\}$ qui est une partie de $\mathbb{R}$ de borne supérieure $\|UV\|$.

Donc $\underline{\|UV\| \leq \|U\|\,\|V\|}$.

PARTIE II

Q1 $T \in S_n$, $I-T$ aussi. $\|I-T\| = \rho(I-T) \leq k$

$\mathrm{Spec}\,(I-T) = \{1-\lambda\ ;\ \lambda \in \mathrm{Spec}\,T\}$

$\rho(I-T) \leq k$, par conséquent $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}\,T,\ |1-\lambda| \leq k$.

$\forall \lambda \in \mathrm{Spec}\,T,\ -k \leq 1-\lambda \leq k$; $\underline{\forall \lambda \in \mathrm{Spec}\,T,\ 1-k \leq \lambda \leq 1+k}$.

En particulier $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}\,T,\ \lambda \geq 1-k > 0$; $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}\,T,\ \lambda > 0$.

<u>T est définie positive.</u>

$0 \notin \mathrm{Spec}\,T$ donc <u>T est inversible !</u> $\mathrm{Spec}\,T^{-1} = \{\frac{1}{\lambda}\ ;\ \lambda \in \mathrm{Spec}\,T\}$

$\forall \lambda \in \mathrm{Spec}\,T,\ 1-k \leq \lambda$; $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}\,T,\ \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{1-k}$; $\forall \mu \in \mathrm{Spec}\,T^{-1},\ 0 < \mu \leq \frac{1}{1-k}$

Par conséquent $\rho(T^{-1}) \leq \frac{1}{1-k}$; $\underline{\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{1-k}}$. $(T^{-1} \in S_n\ !)$

$\|T^{-1} - I\| = \|T^{-1}(I-T)\| \leq \|T^{-1}\|\,\|I-T\| \leq \frac{1}{1-k} \times k$. $\underline{\|T^{-1}-I\| \leq \frac{k}{1-k}}$.

Q2 a) Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, U_p est symétrique et $U_pT = TU_p$.

→ c'est clair pour $p=0$ car $U_0 = I$

→ Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$U_p \in S_n$, $I \in S_n$ et $TU_p \in S_n$

↑ $T \in S_n$, $U_p \in S_n$ et $TU_p = U_pT$

Par conséquent $U_{p+1} \in S_n$ comme combinaison linéaire d'éléments de S_n.

$U_{p+1}T = U_pT + T - TU_pT \underset{U_pT=TU_p}{=} TU_p + T - TU_pT = T(U_p + I - U_pT) \underset{U_pT=TU_p}{=} TU_{p+1}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $U_p \in S$ et $U_pT = TU_p$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons que $U_{p+1} - T^{-1}$, $I - T$ et $U_p - T^{-1}$ sont des éléments de S_n.

$\|U_{p+1} - T^{-1}\| = \|U_p + I - TU_p - T^{-1}\| = \|(I-T)U_p - (I-T)T^{-1}\| = \|(I-T)(U_p - T^{-1})\|$

$\|U_{p+1} - T^{-1}\| \leq \|I - T\| \, \|U_p - T^{-1}\|$

Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\|U_p - T^{-1}\| \leq \dfrac{k^{p+1}}{1-k}$.

→ $\|U_0 - T^{-1}\| = \|I - T^{-1}\| \leq \dfrac{k}{1-k} = \dfrac{k^{0+1}}{1-k}$; la propriété est vraie pour $p=0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$\|U_{p+1} - T^{-1}\| \leq \|I - T\| \, \|U_p - T^{-1}\| \leq k \times \dfrac{k^{p+1}}{1-k} = \dfrac{k^{p+2}}{1-k}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $\|U_p - T^{-1}\| \leq \dfrac{k^{p+1}}{1-k}$.

$0 < k < 1$. $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{k^{p+1}}{1-k} = 0$; $\lim\limits_{p \to +\infty} \|U_p - T^{-1}\| = 0$; donc $(U_p)_{p \geq 0}$ converge vers T^{-1}.

c) $T = \beta I$ avec $\beta \in]0,1[$. T est symétrique et $\|I - T\| = \|(1-\beta)I\| = (1-\beta)\|I\| = 1-\beta$

$k = \|I - T\| = 1 - \beta$. $k \in]0,1[$ et $\|I - T\| \leq k$ ok !

$\|I\| = \rho(I) = 1$, $\beta \in]0,1[$.

T a les bonnes qualités.

Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\|U_p - T^{-1}\| = \dfrac{k^{p+1}}{1-k}$.

→ $\|U_0 - T^{-1}\| = \|I - \frac{1}{\beta} I\| = |1 - \frac{1}{\beta}| \, \|I\| = \left|\dfrac{\beta - 1}{\beta}\right| = \left|-\dfrac{k}{1-k}\right| = \dfrac{k}{1-k} = \dfrac{k^{0+1}}{1-k}$

→ Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$

$$\|U_{p+1} - T^{-1}\| \underset{\uparrow}{=} \|(I - T)(U_p - T^{-1})\| = \|(1-\beta) I (U_p - T^{-1})\| = |1-\beta| \, \|U_p - T^{-1}\| = k \, \frac{k^{p+1}}{1-k} = \frac{k^{p+2}}{1-k}$$

voir plus haut

Ceci achève la récurrence.

$\forall p \in \mathbb{N}, \ \|U_p - T^{-1}\| = \dfrac{k^{p+1}}{1-k}$. Ceci montre que la majoration obtenue à la fin de b) est la meilleure possible. Notons que $\forall p \in \mathbb{N}, \ u_p = \dfrac{1-(1-\beta)^{p+1}}{\beta} I$.

Q3 a) Si $\lambda = \mu$, alors A est une matrice diagonalisable ($A \in S_n$) n'ayant qu'une seule valeur propre λ. Donc A est semblable à λI. Mieux :

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \ \lambda I = P^{-1} A P$. $P \lambda I P^{-1} = A$; $A = \lambda P I P^{-1} = \lambda I$.

Donc $A^{-1} = \frac{1}{\lambda} I$ et l'algorithme n'est pas franchement utile !

Désormais $\lambda \neq \mu$.

b) $t \in \mathbb{R}_+$, $\|I - tA\| = \rho(I - tA)$. $\operatorname{Spec}(I - tA) = \{1 - t\delta \ ; \ \delta \in \operatorname{Spec} A\}$.

$\forall \delta \in \operatorname{Spec} A, \ \lambda \leq \delta \leq \mu$; $\forall \delta \in \operatorname{Spec} A, \ 1 - t\mu \leq 1 - t\delta \leq 1 - t\lambda$

$\forall \delta \in \operatorname{Spec} A, \ -|1 - t\mu| \leq 1 - t\delta \leq |1 - t\lambda|$

$\forall \delta \in \operatorname{Spec} A, \ 1 - t\delta \leq |1 - t\lambda|$ et $-(1 - t\delta) \leq |1 - t\mu|$

$\forall \delta \in \operatorname{Spec} A, \ |1 - t\delta| \leq \operatorname{Max}(|1 - t\lambda|, |1 - t\mu|)$

Or $\lambda \in \operatorname{Spec} A$ et $\mu \in \operatorname{Spec} A$; par conséquent :

$$\operatorname{Max}_{\delta \in \operatorname{Spec} A} |1 - t\delta| = \operatorname{Max}(|1 - t\lambda|, |1 - t\mu|) = \operatorname{Max}(|1 - \lambda t|, |1 - \mu t|) = h(t).$$

Donc $h(t) = \operatorname{Max}_{\delta \in \operatorname{Spec} A} |1 - t\delta| = \operatorname{Max}_{\delta' \in \operatorname{Spec}(I - tA)} |\delta'| = \rho(I - tA) = \|I - tA\|$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \|I - tA\| = \max(f(t), g(t)) = h(t)$.

Notons que : $\forall t \in [0, \frac{1}{\lambda}], \ f(t) = 1 - \lambda t$ et $\forall t \in [\frac{1}{\lambda}, +\infty[, \ f(t) = \lambda t - 1$

$\forall t \in [0, \frac{1}{\mu}], \ g(t) = 1 - \mu t$ et $\forall t \in [\frac{1}{\mu}, +\infty[, \ g(t) = \mu t - 1$

Rappelons que : $\lambda < \mu$; $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\mu}$.

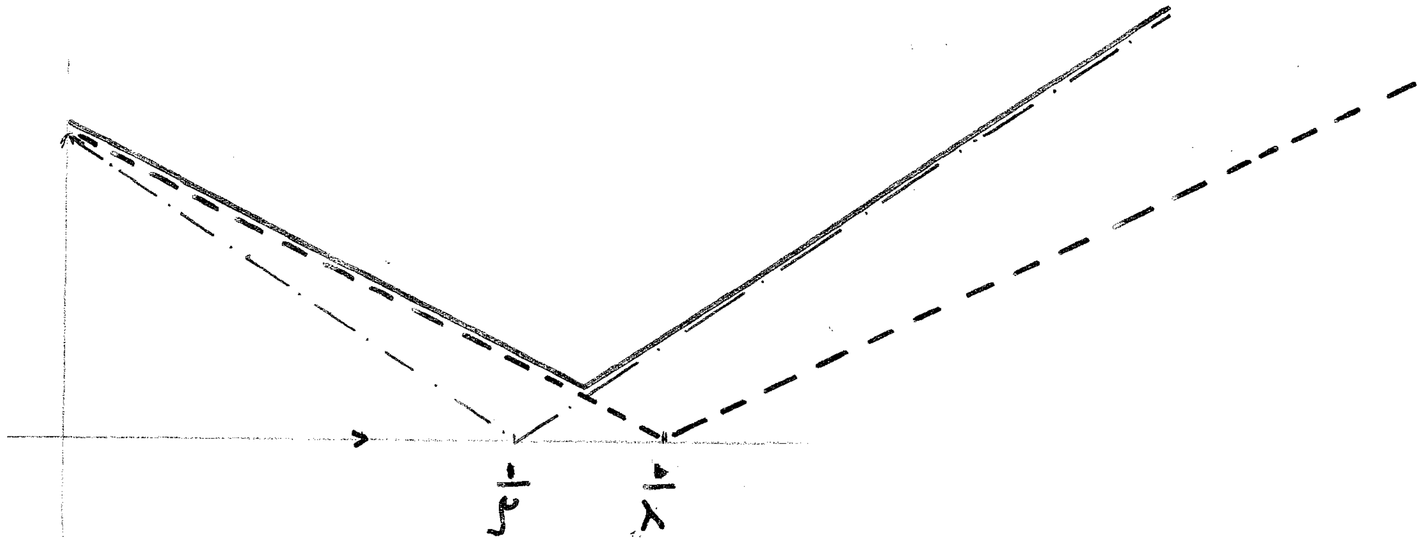
$\forall t \in [0, \frac{1}{\mu}], \ h(t) = \max(1 - \lambda t, 1 - \mu t) = 1 - \lambda t$.

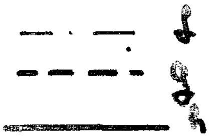
$\forall t \in [\frac{1}{\lambda}, +\infty[$, $h(t) = \max(\lambda t - 1, \rho t - 1) = \rho t - 1$.

$\forall t \in [\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\lambda}]$, $h(t) = \max(1 - \lambda t, \rho t - 1)$

Or $\forall t \in [\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\lambda}]$, $1 - \lambda t \leq \rho t - 1 \iff t \geq \frac{2}{\lambda+\rho}$; notons que $\frac{2}{\lambda+\rho} \in]\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\lambda}[$.

$\forall t \in [\frac{1}{\rho}, \frac{2}{\lambda+\rho}]$, $h(t) = 1 - \lambda t$ et $\forall t \in [\frac{2}{\lambda+\rho}, \frac{1}{\lambda}]$, $h(t) = \rho t - 1$.





L'étude précédente donne : $\forall t \in [0, \frac{2}{\lambda+\rho}]$, $h(t) = 1 - \lambda t$ et

$\forall t \in [\frac{2}{\lambda+\rho}, +\infty[$ $h(t) = \rho t - 1$.

h est strictement décroissante sur $[0, \frac{2}{\lambda+\rho}]$ et strictement croissante sur $[\frac{2}{\lambda+\rho}, +\infty[$

Donc h est minimum en un point et un seul : $\alpha = \frac{2}{\lambda+\rho}$.

Le minimum est : $k = h(\alpha) = 1 - \lambda \frac{2}{\lambda+\rho} = \frac{\rho-\lambda}{\rho+\lambda}$; $k = \frac{\rho-\lambda}{\rho+\lambda}$

Notons que $k \in]0,1[$.

$\rho = \rho(A) = \|A\|$. Spec $A^{-1} = \{ \frac{1}{\sigma} ; \sigma \in \text{Spec} A \}$ donc $\rho(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda}$; $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\lambda}$

Par conséquent $k = \frac{\|A\| - 1/\|A^{-1}\|}{\|A\| + 1/\|A^{-1}\|} = \frac{\|A\|\|A^{-1}\| - 1}{\|A\|\|A^{-1}\| + 1} = \frac{c-1}{c+1}$; $k = \frac{c-1}{c+1}$.

c) $T = \alpha A$ est symétrique et $\|I - T\| = \|I - \alpha A\| = \ell(\alpha) = \frac{\mu - \lambda}{\mu + \lambda} = k < 1$

On peut donc appliquer l'algorithme à T ; ceci fournit une valeur approchée de T^{-1}.
En remarquant que $A^{-1} = \alpha T^{-1}$, on obtient une valeur approchée de A^{-1}.

PARTIE III

(Q1) Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, V_p est symétrique et commute avec T.

→ c'est clair pour $p = 0$ car $V_0 = I$.

→ Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$V_{p+1} = 2V_p - V_p T V_p$. $2V_p \in \mathcal{S}_n$; montrons que $V_p T V_p \in \mathcal{S}_n$.

$T \in \mathcal{S}_n$, $V_p \in \mathcal{S}_n$ et T et V_p commutent donc $TV_p \in \mathcal{S}_n$.

Comme T commute avec V_p, V_p commute avec TV_p ($V_p T V_p = T V_p V_p$!!) ; $V_p \in \mathcal{S}_n$, $TV_p \in \mathcal{S}_n$ et V_p et TV_p commutent donc $V_p T V_p \in \mathcal{S}_n$.

Finalement $V_{p+1} = 2V_p - V_p T V_p \in \mathcal{S}_n$. Montrons alors que T et V_{p+1} commutent

$TV_{p+1} = 2TV_p - TV_p T V_p = 2V_p T - V_p T V_p T = (2V_p - V_p T V_p)T = V_{p+1}T$; ceci achève la récurrence.

<u>$\forall p \in \mathbb{N}$, $V_p \in \mathcal{S}_n$ et $V_p T = T V_p$.</u>

(Q2) a) $\forall p \in \mathbb{N}$, $Z_{p+1} = I - TV_{p+1} = I - T(2V_p - V_p T V_p) = I - 2TV_p - (TV_p)^2 = (I - TV_p)^2 = Z_p^2$

<u>$\forall p \in \mathbb{N}$, $Z_{p+1} = Z_p^2$.</u>

b) Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $Z_p = (Z_0)^{2^p}$

- C'est clair pour $p = 0$

- Supposons l'égalité vraie pour $p \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$Z_{p+1} = (Z_p)^2 = \left((Z_0)^{2^p}\right)^2 = Z_0^{2^p \times 2} = Z_0^{2^{p+1}}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $T^{-1} Z_p = T^{-1} - V_p$; $\forall p \in \mathbb{N}$, $\|V_p - T^{-1}\| = \|T^{-1} - V_p\| = \|T^{-1} Z_p\| \leq \|T^{-1}\| \, \|Z_p\|$

$T^{-1} \in \mathcal{S}_n$ et $Z_p \in \mathcal{S}_n$

Clairement $\forall p \in \mathbb{N}$, $\|Z_0^{2^p}\| \leq \|Z_0\|^{2^p}$ (récurrence simple)

Donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\|V_p - T^{-1}\| \leq \|T^{-1}\| \|Z_0\|^{2^p} \leq \frac{1}{1-k} \|I - TI\|^{2^p} = \frac{1}{1-k} \|I - T\|^{2^p} \leq \frac{k^{2^p}}{1-k}$.

<u>$\forall p \in \mathbb{N}$, $\|V_p - T^{-1}\| \leq \frac{k^{2^p}}{1-k}$.</u>

$0<k<1$; $\lim_{p\to+\infty} \frac{k^{2^p}}{1-k}=0$; donc $\lim_{p\to+\infty} \|V_p-T^{-1}\|=0$; $\lim_{p\to+\infty} V_p = T^{-1}$.

c) Soit $\beta\in]0,1[$. Posons $T=\beta I$ et $k=\|I-T\|$

$T\in \mathcal{S}_n$ et $k=\|I-T\|=\|I-\beta I\|=(1-\beta)\in]0,1[$.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $Z_p=(Z_0)^{2^p}=(I-TV_0)^{2^p}=(I-\beta I I)^{2^p}=(I-\beta I)^{2^p}=(1-\beta)^{2^p} I$.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $T^{-1}Z_p=T^{-1}-V_p$; $\forall p\in\mathbb{N}$, $\|V_p-T^{-1}\|=\|T^{-1}-V_p\|=\|T^{-1}Z_p\|=\|\frac{1}{\beta}I(1-\beta)^{2^p}I\|$

$\forall p\in\mathbb{N}$, $\|V_p-T^{-1}\|=\|\frac{1}{\beta}(1-\beta)^{2^p} I\|=\frac{1}{\beta}(1-\beta)^{2^p}\|I\|=\frac{(1-\beta)^{2^p}}{\beta}=\frac{k^{2^p}}{1-k}$.

Pour $T=\beta I$ avec $\beta\in]0,1[$ et en posant $k=\|I-T\|$ on obtient : $\forall p\in\mathbb{N}$, $\|V_p-T^{-1}\|=\frac{k^{2^p}}{1-k}$.

La majoration du b) est donc la meilleure possible.

(Q3) a) Soit $r\in\mathbb{N}^*$. Soit $p\in\mathbb{N}$

$\frac{k^{p+1}}{1-k}<10^{-r} \Leftrightarrow (p+1)\ln k<\ln(1-k)-r\ln 10 \Leftrightarrow p+1>\frac{\ln(1-k)-r\ln 10}{\ln k}$

$\frac{k^{p+1}}{1-k}<10^{-r} \Leftrightarrow p>\frac{\ln(1-k)-r\ln 10}{\ln k}-1$

Le plus petit entier p tel que $\frac{k^{p+1}}{1-k}<10^{-r}$ est : $E\left(\frac{\ln(1-k)-r\ln 10}{\ln k}-1\right)+1$

Par conséquent : $N(r)=E\left(\frac{\ln(1-k)-r\ln 10}{\ln k}\right)$.

$\frac{k^{2^p}}{1-k}<10^{-r} \Leftrightarrow 2^p\ln k<\ln((1-k)10^{-r}) \Leftrightarrow 2^p>\frac{\ln(1-k)-r\ln 10}{\ln k}$

$\frac{k^{2^p}}{1-k}<10^{-r} \Leftrightarrow p\ln 2>\ln\left[\frac{\ln(1-k)-r\ln 10}{\ln k}\right] \Leftrightarrow p>\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{\ln(1-k)-r\ln(10)}{\ln k}\right)$

Par conséquent le plus petit entier p tel que : $\frac{k^{2^p}}{1-k}<10^{-r}$ est $N^*(r)=E\left[\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{\ln(1-k)-r\ln 10}{\ln k}\right)\right]+1$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $E(x)\le x<E(x)+1$; $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $1\le\frac{x}{E(x)}<1+\frac{1}{E(x)}$;

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{E(x)}=0$; donc par encadrement $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{E(x)}=1$; $E(x)\underset{+\infty}{\sim} x$

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{\ln(1-\varepsilon)-r\ln 10}{\ln k}\right)=+\infty \quad \text{donc} \quad N(r)\underset{r\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(1-\varepsilon)-r\ln 10}{\ln k}=r\left[\frac{1}{r}\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln k}-\frac{\ln 10}{\ln k}\right]$$

$\ln k<0$

$$\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln k}-\frac{\ln 10}{\ln k}\right)=-\frac{\ln 10}{\ln k}. \quad N(r)\underset{r\to+\infty}{\sim}r\left(-\frac{\ln 10}{\ln k}\right)$$

$$N(r)\underset{r\to+\infty}{\sim}-\frac{\ln 10}{\ln k}r.$$

$$\lim_{r\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{\ln(1-\varepsilon)-r\ln 10}{\ln k}\right)}_{u(r)}=+\infty \quad \text{donc} \quad N^*(r)=E(u(r))+1\underset{r\to+\infty}{\sim}E(u(r))\underset{r\to+\infty}{\sim}u(r).$$

$$\ln\left(\frac{\ln(1-\varepsilon)-r\ln 10}{\ln k}\right)=\ln r+\ln\left[\frac{1}{r}\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln k}-\frac{\ln 10}{\ln k}\right]=\ln r\left[1+\frac{1}{\ln r}\ln\left(\frac{1}{r}\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln k}-\frac{\ln 10}{\ln k}\right)\right].$$

$$\lim_{r\to+\infty}\left[1+\frac{1}{\ln r}\ln\left[\frac{1}{r}\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln k}-\frac{\ln 10}{\ln k}\right]\right]=1+0=1;\quad \ln\left(\frac{\ln(1-\varepsilon)-r\ln(10)}{\ln k}\right)\underset{r\to+\infty}{\sim}\ln r$$

donc $\quad N^*(r)\underset{r\to+\infty}{\sim}u(r)\underset{r\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln 2}\ln r$

$$N^*(r)\sim\frac{\ln r}{\ln 2}.$$ Il n'y a pas photo !!

b) $k=\frac{1}{2}$

$N(3)=10$	$N^*(3)=4$
$N(6)=20$	$N^*(6)=5$
$N(10)=34$	$N^*(10)=6$!

c) Clairement la convergence du second algorithme est beaucoup plus rapide que celle du premier.
Pondérons cette constatation en remarquant que le second algorithme est plus coûteux que le premier (2 multiplications à la place d'une seule).

Voici un petit programme permettant d'obtenir U_p et V_p pour p donné.

```
program Inverse_matrice_symetrique;

uses crt,printer;

const DimMax=10;epsilon=1e-6;
type Matrice=array[1..DimMax,1..DimMax] of real;
     Vecteur=array[1..DimMax] of real;

var  n,p,i,j,l:integer;t,u,v,id,aux1,aux2:matrice;

procedure Ecrit_Matrice(n:integer;A:matrice);
var i,j:integer;
begin
writeln;
for i:=1 to n do
    begin
    for j:=1 to n do write(A[i,j]:15:10);
    writeln;
    end;
end;


Procedure Entre_Matrice(n:integer;var a:Matrice);
var i,j:integer;

begin
for j:=1 to n do
for i:=1 to n do
    begin
    write('Donnez le coefficient de la ligne numéro ',i);
    write(' et de la colonne numéro ',j,' : ');readln(a[i,j]);
    end;
end;


procedure Produit_Matrice(n:integer;a,b:matrice;var c:matrice);

var i,j,k:integer;s:real;

begin
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
    begin
    s:=0;for k:=1 to n do s:=s+a[i,k]*b[k,j];
    c[i,j]:=s;
    end;
end;

procedure Addition_Matrice(n:integer;a,b:matrice;var c:matrice);

var i,j,k:integer;

begin
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do c[i,j]:=a[i,j]+b[i,j];
end;
```

```
begin
clrscr;
write('Donnez la dimension n. n=');readln(n);
write('Donnez le nombre d''itéraions p. p=');readln(p);
writeln;writeln('Introduction de la matrice');
Entre_Matrice(n,t);
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
if i<>j then id[i,j]:=0 else id[i,j]:=1;u:=id;v:=id;

for l:=1 to p do
    begin
    produit_Matrice(n,t,u,aux1);
    produit_Matrice(n,t,v,aux2);
    produit_Matrice(n,v,aux2,aux2);
    for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
        begin
        u[i,j]:=u[i,j]+id[i,j]-aux1[i,j];
        v[i,j]:=2*v[i,j]-aux2[i,j];
        end;
    end;
writeln;writeln;Ecrit_Matrice(n,u);
writeln;Ecrit_Matrice(n,v);

end.
```

```
Donnez la dimension n. n=3
Donnez le nombre d'itéraions p. p=10

Introduction de la matrice
Donnez le coefficient de la ligne numéro 1 et de la colonne numéro 1 : 0.5
Donnez le coefficient de la ligne numéro 2 et de la colonne numéro 1 : 0.5
Donnez le coefficient de la ligne numéro 3 et de la colonne numéro 1 : 0
Donnez le coefficient de la ligne numéro 1 et de la colonne numéro 2 : 0.5
Donnez le coefficient de la ligne numéro 2 et de la colonne numéro 2 : 1
Donnez le coefficient de la ligne numéro 3 et de la colonne numéro 2 : 0.5
Donnez le coefficient de la ligne numéro 1 et de la colonne numéro 3 : 0
Donnez le coefficient de la ligne numéro 2 et de la colonne numéro 3 : 0.5
Donnez le coefficient de la ligne numéro 3 et de la colonne numéro 3 : 1


 4.2587890625  -2.6025390625   1.2255859375
-2.6025390625   2.8818359375  -1.3769531250
 1.2255859375  -1.3769531250   1.6562500000
```

U_{10}

```
 6.0000000000  -4.0000000000   2.0000000000
-4.0000000000   4.0000000000  -2.0000000000
 2.0000000000  -2.0000000000   2.0000000000
```

V_{10}

$\boxed{U_{50}}$

```
 5.9731258813  -3.9784486301   1.9880398920
-3.9784486301   3.9827171432  -1.9904087381
 1.9880398920  -1.9904087381   1.9946772512
```

$T = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{U_{100}}$

```
 5.9998538417  -3.9998827902   1.9999349534
-3.9998827901   3.9999060050  -1.9999478367
 1.9999349534  -1.9999478367   1.9999710516
```

$T^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$