PARTIE I ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME

Q1 • $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $(X^2-1)P'' + (2X+1)P' \in \mathbb{R}[X]$! φ est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$

• Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\lambda P+Q) = (X^2-1)(\lambda P+Q)'' + (2X+1)(\lambda P+Q)' = (X^2-1)(\lambda P''+Q'') + (2X+1)(\lambda P'+Q')$.

$\varphi(\lambda P+Q) = \lambda\left[(X^2-1)P'' + (2X+1)P'\right] + (X^2-1)Q'' + (2X+1)Q' = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$.

ceci achève de montrer que **φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\deg(X^2-1)P'' \leq n$ et $\deg(2X+1)P' \leq n$ donc $\deg \varphi(P) \leq n$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

Q2 a) $\varphi_n(1) = 0$, $\varphi_n(X) = 2X+1$ et $\forall \ell \in [\![2,n]\!]$, $\varphi_n(X^\ell) = (X^2-1)\ell(\ell-1)X^{\ell-2} + (2X+1)\ell X^{\ell-1}$

$\varphi_n(1) = 0$, $\varphi_n(X) = 2X+1$ et $\forall \ell \in [\![2,n]\!]$, $\varphi_n(X^\ell) = \ell(\ell+1)X^\ell + \ell X^{\ell-1} - \ell(\ell-1)X^{\ell-2}$

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\times 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1\times 2 & 2 & -3\times 2 & \ddots & \vdots \\ & & 2\times 3 & 3 & -4\times 3 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ & & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & & & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

est la matrice de φ_n dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$

b) $\mathrm{Sp}\,\varphi_n = \mathrm{Sp}\,M_n = \{0, 1\times 2, 2\times 3, \dots, n(n+1)\}$ car M_n est triangulaire supérieure.

Ainsi **$\mathrm{Sp}\,\varphi_n = \{\ell(\ell+1) ; \ell \in [\![0,n]\!]\}$.**

Posons $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_\ell = \ell(\ell+1)$.

$\forall \ell \in [\![0,n-1]\!]$, $\lambda_{\ell+1} - \lambda_\ell = (\ell+1)(\ell+2) - \ell(\ell+1) = 2\ell+2 > 0$.

Ainsi $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

Ainsi φ_n admet $n+1$ valeurs propres distinctes. Comme $\varphi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$:

1) φ_n est diagonalisable.

2) les sous-espaces propres de φ_n sont des droites vectorielles.

(Q3) a) → Soit λ une valeur propre de φ et soit P un vecteur propre associé.

Posons $r = \deg P$ ($P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$). $\varphi(P) = \lambda P$ et $P \in \mathbb{R}_r[X]$.

Ainsi $P \neq 0_{\mathbb{R}_r[X]}$ et $\varphi_r(P) = \lambda P$; $\lambda \in Sp\, \varphi_r = \{ \ell(\ell+1) ; \ell \in [\![0, r]\!] \}$.

Alors $\exists \ell \in [\![0, r]\!]$, $\lambda = \ell(\ell+1)$.

Ceci montre que $Sp\, \varphi \subset \{ \ell(\ell+1) ; \ell \in \mathbb{N} \}$

→ Réciproquement soit $\ell \in \mathbb{N}$. Montrons que $\ell(\ell+1)$ est une valeur propre de φ.

$\ell(\ell+1) \in Sp\, \varphi_\ell$ (Q2) donc $\exists P \in \mathbb{R}_\ell[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{R}_\ell[X]}$ et $\varphi_\ell(P) = \ell(\ell+1) P$.

Alors $P \in \mathbb{R}[X]$, $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $\varphi(P) = \ell(\ell+1) P$. Ainsi $\ell(\ell+1) \in Sp\, \varphi$.

Finalement $Sp\, \varphi = \{ \ell(\ell+1) ; \ell \in \mathbb{N} \}$.

Montrons que les sous-espaces propres de φ sont des droites vectorielles.

Soit $\lambda \in Sp\, \varphi$. Supposons $\dim SEP(\varphi, \lambda) \geq 2$.

Alors il existe au moins deux éléments P et Q de $SEP(\varphi, \lambda)$ tels que (P, Q) soit libre. Soit s un majorant de $\deg P$ et $\deg Q$.

$P \in \mathbb{R}_s[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_s[X]$. Alors $\varphi_s(P) = \lambda P$ et $\varphi_s(Q) = \lambda Q$. Ainsi $\lambda \in Sp\, \varphi_s$ et (P, Q) est une famille libre de $SEP(\varphi_s, \lambda)$.

Donc $\dim SEP(\varphi_s, \lambda) \geq 2$ ce qui contredit ce qui a été vu dans Q2

Les sous-espaces propres de φ sont des droites vectorielles.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $SEP(\varphi, k(k+1))$ est une droite vectorielle. Soit Q un élément non nul de cette droite et α le coefficient du terme de plus haut degré de Q. $P_k = \frac{1}{\alpha} Q$ est un polynôme unitaire de $SEP(\varphi, k(k+1))$.

Soit $\hat{P}_k$ un second polynôme unitaire de $SEP(\varphi, k(k+1))$.

$\hat{P}_k \in Vect(Q) = Vect(P_k)$. $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $\hat{P}_k = \gamma P_k$. Comme $\hat{P}_k$ et P_k sont unitaires : $\gamma = 1$.

Ainsi $\hat{P}_k = P_k$.

Alors $SEP(\varphi, k(k+1))$ contient un polynôme unitaire et un seul : P_k.

Il existe donc un polynôme unitaire P_k et un seul qui soit vecteur propre de φ associé à la valeur propre $k(k+1)$ et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}$.

Soit r le degré de P_k. Le coefficient de X^r dans P_k est 1.

$\varphi(P_k) = k(k+1) P_k$; $(X^2-1) P_k'' + (2X+1) P_k' = k(k+1) P_k$.

Le coefficient de X^r dans $(X^2-1)P_k'' + (2X+1)P_k'$ est $r(r-1) + 2r$.

Le coefficient de X^r dans $k(k+1)P_k$ est $k(k+1)$.

Alors $k(k+1) = r(r-1) + 2r = r(r+1)$; $k^2 + k - r^2 - r = 0$; $(k-r)(k+r+1) = 0$; $k - r = 0$.

Alors $r = k$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\deg P_k = k$.

c) $\deg P_0 = 0$ et P_0 est unitaire donc $P_0 = 1$.

$\deg P_1 = 1$ et P_1 est unitaire ; $\exists a \in \mathbb{R}$, $P_1 = X + a$.

$\varphi(P_1) = (1)(1+1) P_1$; $\varphi(P_1) = 2P_1$.

$(X^2-1)(0) + (2X+1)(1) = 2(X+a)$; $2X + 1 = 2X + 2a$; $a = \frac{1}{2}$. $P_1 = X + \frac{1}{2}$.

$\deg P_2 = 2$ et P_2 est unitaire ; $\exists (b,c) \in \mathbb{R}^2$, $P_2 = X^2 + bX + c$.

$(X^2-1) P_2'' + (2X+1) P_2' = \varphi(P_2) = 2 \times (2+1) P_2 = 6 P_2$.

$(X^2-1)(2) + (2X+1)(2X+b) = 6X^2 + 6bX + 6c$; $6X^2 + 2(b+1)X - 2 + b = 6X^2 + 6bX + 6c$.

Ainsi $2b + 2 = 6b$ et $-2 + b = 6c$; $b = \frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{4}$. $P_2 = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}$.

$\deg P_3 = 3$ et P_3 est unitaire. $\exists (d,e,f) \in \mathbb{R}^3$, $P_3 = X^3 + dX^2 + eX + f$.

$(X^2-1)P_3'' + (2X+1)P_3' = \varphi(P_3) = 3\times 4\, P_3 = 12\, P_3$.

$(X^2-1)(6X+2d) + (2X+1)(3X^2+2dX+e) = 12X^3 + 12dX^2 + 12eX + 12f$.

$6X^3 - 6X + 2dX^2 - 2d + 6X^3 + 4dX^2 + 2eX + 3X^2 + 2dX + e = 12X^3 + 12dX^2 + 12eX + 12f$

$$\begin{cases} 2d + 4d + 3 = 12d \\ -6 + 2e + 2d = 12e \\ -2d + e = 12f \end{cases} . \quad \begin{cases} d = \frac{1}{2} \\ e = -\frac{1}{2} \\ f = -\frac{1}{8} \end{cases} . \quad \underline{\underline{P_3 = X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}}} .$$

d) Soit $k \in [\![1,+\infty[\![$. $k(k+1)P_k = \varphi(P_k) = (X^2-1)P_k'' + (2X+1)P_k'$.

Notons α_k le coefficient de X^{k-1} dans P_k.

Le coefficient de X^{k-1} dans $(X^2-1)P_k''$ (resp. $(2X+1)P_k'$) est $\alpha_k(k-1)(k-2)$

(resp. $2(k-1)\alpha_k + k$).

Ainsi $\alpha_k(k-1)(k-2) + 2(k-1)\alpha_k + k = k(k+1)\alpha_k$

Donc $\alpha_k\left(k^2+k-(k-1)(k-2)-2(k-1)\right) = k$; $\alpha_k(k^2+k-k^2+3k-2-2k+2) = k$

$2k\alpha_k = k$; $\alpha_k = \frac{1}{2}$.

$\underline{\underline{\text{Si } k \in \mathbb{N}^*, \text{ le coefficient de } X^{k-1} \text{ dans } P_k \text{ est } \frac{1}{2}.}}$

Soit $k \in [\![2,+\infty[\![$. $k(k+1)P_k = (X^2-1)P_k'' + (2X+1)P_k'$.

Notons β_k le coefficient de X^{k-2} dans P_k.

Le coefficient de X^{k-2} dans $(X^2-1)P_k''$ est : $(k-2)(k-3)\beta_k - k(k-1)$.

Le coefficient de X^{k-2} dans $(2X+1)P_k'$ est : $2(k-2)\beta_k + (k-1)\alpha_k$.

$\alpha_k = \frac{1}{2}$.

Alors $k(k+1)\beta_k = (k-2)(k-3)\beta_k - k(k-1) + 2(k-2)\beta_k + (k-1)\times\frac{1}{2}$

$\beta_k(k^2+k-k^2+5k-6-2k+4) = -k^2+k+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}$.

$\beta_k(4k-2) = -k^2+\frac{3}{2}k-\frac{1}{2} = (k-1)\left(-k+\frac{1}{2}\right)$; $4\beta_k = -(k-1)$; $\beta_k = \frac{1-k}{4}$.

Si $\ell \in [\![2, +\infty [\![$, le coefficient de $X^{k-\ell}$ dans P_k est $\frac{1-k}{4}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont $n+1$ vecteurs propres de φ_n associés à $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes ; $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est alors une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal $n+1$.

Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(Q1) Soit $h \in E$. h est continue sur le segment $[-1,1]$; $|h|$ aussi. Ainsi $|h|$ possède un maximum sur $[-1,1]$. Posons $M = \max_{t \in [-1,1]} |h(t)|$.

$t \mapsto h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est continue sur $]-1,1]$; $\int_0^1 h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ existe.

• $\forall t \in]-1,0]$, $0 \leq \left|h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right| \leq M\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \underset{-t \leq 1}{\leq} M\sqrt{2}\,\frac{1}{(1+t)^{1/2}}$

• $\int_{-1}^0 \frac{dt}{(1+t)^{1/2}}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\int_{-1}^0 \left|h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right| dt$ converge. Ainsi $\int_{-1}^0 h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ est absolument convergente. Finalement $\int_{-1}^1 h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ converge.

Pour tout $h \in E$, $\int_{-1}^1 h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ converge.

(Q2) * Soit $(f,g) \in E^2$. $fg \in E$ donc $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ existe d'après Q1.

* Soit $(f,g,h) \in E^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\langle \lambda f+g,h\rangle = \int_{-1}^1 (\lambda f + g)(t)h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_{-1}^1 \left[\lambda f(t)h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + g(t)h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right] dt$

$\langle \lambda f+g,h\rangle \underset{\uparrow}{=} \lambda\int_{-1}^1 f(t)h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt + \int_{-1}^1 g(t)h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \lambda\langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$

Toutes les intégrales convergent.

$\langle \lambda f+g,h\rangle = \lambda\langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$.

* Soit $(f,g) \in E^2$. $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_{-1}^1 g(t)f(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \langle g,f\rangle$.

$\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$.

* Soit $f \in E$. $\forall t \in]-1,1]$, $(f(t))^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \geq 0$ donc $\langle f,f\rangle = \int_{-1}^1 (f(t))^2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt \geq 0$.

$\langle f,f\rangle \geq 0$.

* Soit $f \in E$. Supposons $\langle f, f\rangle = 0$.

  - $t \mapsto (f(t))^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est continue et positive sur $]-1,1]$.
  - $\int_{-1}^{1} (f(t))^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = 0$.
  - $-1 \neq 1$.

Ainsi $t \mapsto (f(t))^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est nulle sur $]-1,1]$ donc f^2 est nulle sur $]-1,1[$.

Alors f est nulle sur $]-1,1[$. Rappelons que f est continue sur $[-1,1]$.

Ainsi $f(1) = \lim_{t \to 1^-} f(t) = 0$ et $f(-1) = \lim_{t \to -1^+} f(t) = 0$.

Finalement $\forall t \in [-1,1],\ f(t) = 0$. Si $\langle f, f\rangle = 0 : f = 0_E$.

Les cinq points précédents montrent que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

(Q3) a) Soit $(a,b) \in]-1,1[^2$. Posons $\forall t \in]-1,1[$, $u(t) = (t^2-1)P'(t)$ et $v(t) = \varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$. u et v sont de classe C^1 sur $]-1,1[$ et

$\forall t \in]-1,1[$, $u'(t) = (t^2-1)P''(t) + 2tP'(t)$ et $v'(t) = \varphi'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \varphi(t)\dfrac{\frac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2}}{2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}} =$

$\varphi'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} - \dfrac{\varphi(t)}{(1+t)^{3/2}\sqrt{1-t}}$.

Alors $\int_a^b \left((t^2-1)P''(t) + 2tP'(t)\right)\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = \left[(t^2-1)P'(t)\,\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right]_a^b -$

$\int_a^b (t^2-1)P'(t)\varphi'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt + \int_a^b \dfrac{(t^2-1)P'(t)\varphi(t)}{(1+t)^{3/2}\sqrt{1-t}}\, dt$.

$\int_a^b \left((t^2-1)P''(t) + 2tP'(t)\right)\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = -(1-b)^{3/2}(1+b)^{1/2}P'(b)\varphi(b) + (1-a)^{3/2}(1+a)^{1/2}P'(a)\varphi(a)$

$+ \int_a^b (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)\varphi'(t)\, dt - \int_a^b P'(t)\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt$.

En faisant tendre successivement a vers -1 et b vers 1 il vient :

$$\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)P''(t) + 2tP'(t)\right)\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = -0 + 0 + \int_{-1}^{1} (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)\varphi'(t)\, dt - \int_{-1}^{1} P'(t)\varphi(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt$$

Alors $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left((t^2-1)P''(t)+2tP'(t)+P'(t)\right)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt=\int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,dt.$

ce qui s'écrit encore : $\displaystyle\langle\varphi(P),Q\rangle=\int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)\,dt.$

b) En échangeant les rôles de P et Q dans ce qui précède on a aussi :

$$\langle\varphi(Q),P\rangle=\int_{-1}^{1}(1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}Q'(t)P'(t)\,dt$$

~~Clairement~~ $\langle\varphi(Q),P\rangle=\langle\varphi(P),Q\rangle$. Ainsi $\langle\varphi(P),Q\rangle=\langle P,\varphi(Q)\rangle$.

c) Soit $(\ell,\ell')\in\mathbb{N}^2$ tel que $\ell\neq\ell'$.

$\langle\varphi(P_\ell),P_{\ell'}\rangle=\langle P_\ell,\varphi(P_{\ell'})\rangle$

$\langle\ell(\ell+1)P_\ell,P_{\ell'}\rangle=\langle P_\ell,\ell'(\ell'+1)P_{\ell'}\rangle$; $\ell(\ell+1)\langle P_\ell,P_{\ell'}\rangle=\ell'(\ell'+1)\langle P_\ell,P_{\ell'}\rangle$.

Or $\ell(\ell+1)\neq\ell'(\ell'+1)$ car $\ell\neq\ell'$ ainsi $\langle P_\ell,P_{\ell'}\rangle=0$.

$\forall(\ell,\ell')\in\mathbb{N}^2,\ \ell\neq\ell'\Rightarrow\langle P_\ell,P_{\ell'}\rangle=0$.

$(P_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.

* Voir P_n orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ page 10.

Q4 a) Soit $h\in E$. Soit $(a,b)\in\,]-1,1[^2$.

$$\int_a^b h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt=\int_{\frac12\operatorname{Arccos}a}^{\frac12\operatorname{Arccos}b}h(\cos(2\theta))\sqrt{\frac{1-\cos(2\theta)}{1+\cos(2\theta)}}\,(-2\sin(2\theta))\,d\theta.$$

$$\begin{cases}t=\cos(2\theta)\\ dt=-2\sin(2\theta)\\ \theta=\frac12\operatorname{Arccos}t\end{cases}$$

$$\int_a^b h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt=4\int_{\frac12\operatorname{Arccos}b}^{\frac12\operatorname{Arccos}a}h(\cos 2\theta)\sqrt{\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}}\,(\sin\theta\cos\theta)\,d\theta=4\int_{\frac12\operatorname{Arccos}b}^{\frac12\operatorname{Arccos}a}h(\cos 2\theta)\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right|\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\int_a^b h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt=4\int_{\frac12\operatorname{Arccos}b}^{\frac12\operatorname{Arccos}a}h(\cos 2\theta)\sin^2\theta\,d\theta.$$

$\frac12\operatorname{Arccos}b\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et $\frac12\operatorname{Arccos}a\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$\lim\limits_{A\mapsto -1} \frac{1}{2}\text{Arccos}\, A = \frac{1}{2}\times\pi$ et $\lim\limits_{B\mapsto 1} \frac{1}{2}\text{Arccos}\, B = \frac{1}{2}\times 0 = 0$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 4\int_0^{\pi/2} h(\cos(2\theta))(\sin\theta)^2\,d\theta$ et ceci pour tout $h\in E$.

b) $n\in\mathbb{N}$. $\displaystyle I_n = \int_{-1}^{1} t^n\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 4\int_0^{\pi/2} (\cos 2\theta)^n \sin^2\theta\,d\theta$ ... car $t\mapsto t^n$ est continue sur $[-1,1]$!

$\displaystyle I_n = 2\int_0^{\pi/2} (\cos 2\theta)^n\,(1-\cos 2\theta)\,d\theta = 2(J_n - J_{n+1})$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = 2(J_n - J_{n+1})$.

c) $\displaystyle J_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$. $\displaystyle J_1 = \int_0^{\pi/2}\cos(2\theta)\,d\theta = \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = 0$.

$J_0 = \frac{\pi}{2}$ et $J_1 = 0$.

Soit $n\in [\![2,+\infty[\![$.

$\displaystyle J_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(2\theta))^{n-1}\cos(2\theta)\,d\theta$. Intégrons par parties...

Pour $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\hat{u}(\theta) = (\cos(2\theta))^{n-1}$ et $\hat{v}(\theta) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$. $\hat{u}$ et $\hat{v}$ sont de classe

C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\hat{u}'(\theta) = (n-1)(-2\sin 2\theta)(\cos(2\theta))^{n-2}$ et

$\hat{v}'(\theta) = \cos(2\theta)$.

$$J_n = \underbrace{\left[(\cos(2\theta))^{n-1}\tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} - \int_0^{\pi/2} (n-1)(-2\sin(2\theta))(\cos(2\theta))^{n-2}\tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\,d\theta.$$

$$J_n = (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^2(2\theta)(\cos(2\theta))^{n-2}\,d\theta = (n-1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2(2\theta))(\cos(2\theta))^{n-2}\,d\theta.$$

$J_n = (n-1)(J_{n-2} - J_n)$; $\quad nJ_n = (n-1)J_{n-2}$.

$\forall n\in [\![2,+\infty[\![$, $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$ ou $J_n = \dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. " $J_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} J_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times J_1 = 0$ ".

" $J_{2p} = \frac{2p-1}{2p} J_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} J_0 = \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} J_0$ ".

Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $J_{2p} = \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} J_0$ et $J_{2p+1} = 0$.

- C'est clair pour $p=0$ ($\frac{(2\times 0)!}{[2^0 0!]^2} = 1$ et $J_1 = 0$!).
- Supposons la propriété vraie pour p dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$J_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} J_{2p} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{[2(p+1)]^2} \times \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} J_0 = \frac{(2(p+1))!}{[2^{p+1}(p+1)!]^2} J_0$ et

$J_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3} J_{2p+1} = 0$. Ceci achève la récurrence. Rappelons que $J_0 = \frac{\pi}{2}$. Alors :

$\forall p \in \mathbb{N}$, $J_{2p} = \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} \frac{\pi}{2}$ et $J_{2p+1} = 0$.

d) Soit $p \in \mathbb{N}$. $I_{2p} = 2(J_{2p} - J_{2p+1}) = 2 J_{2p} = \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} \pi$.

$I_{2p+1} = 2(J_{2p+1} - J_{2p+2}) = -2 J_{2p+2} = -2 \frac{(2p+2)!}{[2^{p+1}(p+1)!]^2} \frac{\pi}{2}$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{[2^p p!]^2} \pi$ et $I_{2p+1} = -\frac{(2p+2)!}{[2^{p+1}(p+1)!]^2} \pi$.

(*) fin de Q3 c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et P_n est orthogonal à tous les éléments de cette base donc P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

PARTIE III ETUDE DE LA SUITE $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q1) a) $\langle P_n, 1\rangle = 0$; $\int_{-1}^{1} P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 0$.

Supposons que P_n n'a pas de zéro d'ordre de multiplicité impair dans $]-1,1[$. Alors P_n garde un signe constant sur $]-1,1[$ et même sur $[-1,1]$.

Alors $t \mapsto P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est continue sur $]-1,1]$, garde un signe constant sur $]-1,1]$, $\int_{-1}^{1} P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 0$ et $1 \neq -1$.

Ainsi $\forall t \in]-1,1]$, $P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = 0$. $\forall t \in]-1,1\underline{[}$, $P_n(t) = 0$.

Alors P_n admet une infinité de zéros. $P_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$!!

Finalement $\underline{\underline{P_n \text{ admet au moins un zéro d'ordre de multiplicité impair dans }]-1,1[}}$.

b) $(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_p)P_n$ n'a que des zéros d'ordre de multiplicité pair dans $]-1,1[$ donc garde un signe constant sur $]-1,1[$ et même sur $[-1,1]$.

Alors $t \mapsto (t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_p)P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ est continue sur $]-1,1]$ et garde un signe constant sur $]-1,1]$. Alors $\int_{-1}^{1}(t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_p)P_n(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt \neq 0$

donc $\langle (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_p), P_n\rangle \neq 0$.

Si $p < n$: $(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_p) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc $\langle (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_p), P_n\rangle$ vaut 0 car $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

Ainsi $p \geq n$. Or $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_n \neq 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc P_n admet au plus n zéros.

Ainsi $p \leq n$.

Alors $p = n$. Or $\deg P_n = n$ donc $\exists \delta \in \mathbb{R}^*$, $P_n = \delta(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)$.

Comme P_n est unitaire : $\delta = 1$. Ainsi $\underline{\underline{P_n = (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)}}$.

Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\langle Q, P_{n+2} - XP_{n+1} \rangle = \langle Q, P_{n+2} \rangle - \langle Q, XP_{n+1} \rangle$.

$Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $P_{n+2} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]^\perp$ donc $\langle Q, P_{n+2} \rangle = 0$.

$XQ \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$ donc $\langle XQ, P_{n+1} \rangle = 0$.

Or $\langle XQ, P_{n+1} \rangle = \int_{-1}^{1} tQ(t)P_{n+1}(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_{-1}^{1} Q(t)tP_{n+1}(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \langle Q, XP_{n+1} \rangle$

Finalement $\langle Q, P_{n+2} \rangle = 0$ et $\langle Q, XP_{n+1} \rangle = 0$.

Alors $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \ \langle Q, P_{n+2} - XP_{n+1} \rangle = 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\deg(P_{n+2} - XP_{n+1}) \leq n+2$. Or P_{n+2} et XP_{n+1} sont unitaires et

$\deg P_{n+2} = \deg(XP_{n+1}) = n+2$ donc $\deg(P_{n+2} - XP_{n+1}) \leq n+1$.

$n+2 \geq 1$ et $n+1 \geq 1$ donc le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+2} est $\frac{1}{2}$ et le coefficient de X^n dans P_{n+1} est $1/2$.

Ainsi le coefficient de X^{n+1} dans $P_{n+2} - XP_{n+1}$ est 0.

Supposons $n \geq 1$. Alors $n+2 \geq 2$ et $n+1 \geq 2$.

Le coefficient de X^n dans P_{n+2} est $\frac{1-(n+2)}{4}$ et le coefficient de X^{n-1} dans P_{n+1} est $\frac{1-(n+1)}{4}$.

Alors le coefficient de X^n dans $P_{n+2} - XP_{n+1}$ est $\frac{1-(n+2)}{4} - \frac{1-(n+1)}{4} = \frac{-1}{4}$.

Le terme de plus haut degré de $P_{n+2} - XP_{n+1}$ est $-\frac{1}{4}X^n$.

Si $n=0$ $P_{n+2} - XP_{n+1} = P_2 - XP_1 = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4} - X(X + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$; le résultat vaut encore.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le terme de plus haut degré de $P_{n+2} - XP_{n+1}$ est $-\frac{1}{4}X^n$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}$. $P_{n+2}-XP_{n+1}\in\mathbb{R}_n[X]$ d'après b)

$\exists(\delta_0,\delta_1,\dots,\delta_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $P_{n+2}-XP_{n+1}=\sum_{i=0}^{n}\delta_i P_i$

Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$. $P_k\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc P_k est orthogonal à $P_{n+2}-XP_{n+1}$.

Ainsi $0=\langle P_k,\sum_{i=0}^{n}\delta_i P_i\rangle=\sum_{i=0}^{n}\delta_i\langle P_k,P_i\rangle=\delta_k\langle P_k,P_k\rangle=\delta_k\|P_k\|^2$.

Or $\|P_k\|^2\neq 0$ car $P_k\neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $\delta_k=0$; ceci pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Alors $P_{n+2}-XP_{n+1}=\delta_n P_n$.

Or le coefficient de X^n dans $P_{n+2}-XP_{n+1}$ (resp. P_n) est $-\frac{1}{4}$ (resp. 1).

Alors $-\frac{1}{4}=\delta_n$; $P_{n+2}-XP_{n+1}=-\frac{1}{4}P_n$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $P_{n+2}-XP_{n+1}=-\frac{1}{4}P_n$.

Q3 a) $\forall p\in\mathbb{N}$, $P_{2p+2}(0)-0\,P_{2p+1}(0)=-\frac{1}{4}P_{2p}(0)$ ou $P_{2p+2}(0)=-\frac{1}{4}P_{2p}(0)$

$(P_{2p}(0))_{p\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ et de premier terme 1.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $P_{2p}(0)=\left(-\frac{1}{4}\right)^p$.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $P_{2p+3}(0)-0\,P_{2p+2}(0)=-\frac{1}{4}P_{2p+1}(0)$ ou $P_{2p+3}(0)=-\frac{1}{4}P_{2p+1}(0)$.

$(P_{2p+1}(0))$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ et de premier terme $P_1(0)=\frac{1}{2}$.

$\forall p\in\mathbb{N}$, $P_{2p+1}(0)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^p$.

b) $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_{n+2}(1)-P_{n+1}(1)=-\frac{1}{4}P_n(1)$. $(P_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 d'équation caractéristique

$z\in\mathbb{C}$ et $z^2-z+\frac{1}{4}=0$. Cette équation admet une solution et une seule $\frac{1}{2}$.

Ainsi $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n(1)=\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^n+\beta\, n\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Or $P_0(1)=1$ et $P_1(1)=\frac{3}{2}$

Donc $\alpha=1$ et $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{3}{2}$. $\alpha=1$ et $\beta=2$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n(1)=\frac{2n+1}{2^n}$.

Q4) a) Supposons que n appartient à $\mathbb{N}^*$. P_n est unitaire et de degré n donc il existe un élément φ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P_n = X^n + \varphi$.

Or $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ donc $0 = \langle P_n, \varphi \rangle = \langle P_n, P_n - X^n \rangle = \langle P_n, P_n \rangle - \langle P_n, X^n \rangle$

Alors $\langle P_n, P_n \rangle = \langle P_n, X^n \rangle$.

Ceci vaut encore pour $n=0$ car $P_0 = 1 = X^0$.

$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \langle P_n, P_n \rangle = \langle P_n, X^n \rangle}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $X^{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X] = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$.

$\exists (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$, $X^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i P_i$.

$\langle X^{n+1}, P_n \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i \langle P_i, P_n \rangle = \sigma_n \langle P_n, P_n \rangle$. $\underline{\langle X^{n+1}, P_n \rangle = \sigma_n \langle P_n, P_n \rangle}$.

Le coefficient de X^n dans $\sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i P_i$ est : $\frac{1}{2}\sigma_{n+1} + \sigma_n$.

Le coefficient de X^{n+1} dans $\sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i P_i$ est : σ_{n+1}.

Comme $X^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \sigma_i P_i$: $\sigma_{n+1} = 1$ et $\frac{1}{2}\sigma_{n+1} + \sigma_n = 0$; $\sigma_n = -\frac{1}{2}$.

Alors $\underline{\langle X^{n+1}, P_n \rangle = -\frac{1}{2} \langle P_n, P_n \rangle}$ et ceci pour tout n dans $\mathbb{N}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $X^{n+2} \in \mathbb{R}_{n+2}[X] = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_{n+2})$

$\exists (\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+3}$, $X^{n+2} = \sum_{i=0}^{n+2} \delta_i P_i$.

$\langle X^{n+2}, P_n \rangle = \sum_{i=0}^{n+2} \delta_i \langle P_i, P_n \rangle = \delta_n \langle P_n, P_n \rangle$. $\underline{\langle X^{n+2}, P_n \rangle = \delta_n \langle P_n, P_n \rangle}$.

Le coefficient de X^{n+2} dans $\sum_{i=0}^{n+2} \delta_i P_i$ est : δ_{n+2}.

Le coefficient de X^{n+1} dans $\sum_{i=0}^{n+2} \delta_i P_i$ est : $\frac{1}{2}\delta_{n+2} + \delta_{n+1}$.

Le coefficient de X^n dans $\sum_{i=0}^{n+2} \delta_i P_i$ est : $\frac{1-(n+2)}{4}\delta_{n+2} + \frac{1}{2}\delta_{n+1} + \delta_n$.

Comme $X^{n+2} = \sum_{i=0}^{n+2} \delta_i P_i$: $\delta_{n+2} = 1$, $\frac{1}{2}\delta_{n+2} + \delta_{n+1} = 0$, $\frac{1-(n+2)}{4}\delta_{n+2} + \frac{1}{2}\delta_{n+1} + \delta_n = 0$

Alors $\delta_{n+1} = -\frac{1}{2}$ et $\delta_n = -\frac{-n-1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} = \frac{n+1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{n+2}{4}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \langle P_n, X^{n+2} \rangle = \frac{n+2}{4} \langle P_n, P_n \rangle.$$

(Q5) a) $u_0 = \langle P_0, P_0 \rangle = \int_{-1}^{1} t^0 t^0 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt = I_0 = \pi$. $\quad u_0 = \pi$.

$u_1 = \langle P_1, P_1 \rangle = \langle P_1, X \rangle = \langle X + \frac{1}{2}, X \rangle = \langle X, X \rangle + \frac{1}{2} \langle 1, X \rangle = I_2 + \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$. $u_1 = \frac{\pi}{4}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\quad P_{n+2} - X P_{n+1} = -\frac{1}{4} P_n$.

Alors $\langle P_{n+2}, X^{n+2} \rangle - \langle X P_{n+1}, X^{n+2} \rangle = -\frac{1}{4} \langle P_n, X^{n+2} \rangle$.

Observons que $\langle X P_{n+1}, X^{n+2} \rangle = \langle P_{n+1}, X^{n+3} \rangle \underset{\uparrow}{=} \frac{n+3}{4} \langle P_{n+1}, P_{n+1} \rangle = \frac{n+3}{4} u_{n+1}$

notons aussi que $\langle P_{n+2}, X^{n+2} \rangle \overset{\downarrow}{=} \langle P_{n+2}, P_{n+2} \rangle = u_{n+2}$. Q4 c)

notons encore que $\langle P_n, X^{n+2} \rangle \overset{\downarrow}{=} \frac{n+2}{4} \langle P_n, P_n \rangle = \frac{n+2}{4} u_n$

Alors : $\quad u_{n+2} - \frac{n+3}{4} u_{n+1} = -\frac{n+2}{16} u_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

c) Montrons par récurrence (d'ordre 2) que : $\forall n \in \mathbb{N}, \|P_n\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}$ ou

que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n\|^2 = u_n = \frac{\pi}{4^n}$.

- C'est vrai pour $n = 0$ et 1 d'après Q5 a)
- Supposons la propriété vraie pour n et $n+1$ avec n dans $\mathbb{N}$. Montrons la pour $n+2$.

$$u_{n+2} = \frac{n+3}{4} u_{n+1} - \frac{n+2}{16} u_n = \frac{n+3}{4} \frac{\pi}{4^{n+1}} - \frac{n+2}{16} \frac{\pi}{4^n} = \frac{\pi}{4^{n+2}} [n+3-n-2] = \frac{\pi}{4^{n+2}}.$$

ceci achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}.$$

PARTIE IV

(Q1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour utiliser le théorème de meilleure approximation considérons le sous-espace vectoriel $\hat{E}$ engendré par $f, P_0, \dots, P_n$.

$\hat{E}$ muni de la restriction de $\langle \cdot,\cdot \rangle$ à $\hat{E}$ est un espace vectoriel euclidien.

$\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est un sous-espace vectoriel de $\hat{E}$ et $f \in \hat{E}$.

Alors 1) $\min\limits_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f-P\|$ existe.

2) $\exists !\, S_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|f - S_n\| = \min\limits_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f-P\|$.

3) S_n est la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$.

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$; alors $\left(\frac{1}{\|P_0\|}P_0, \frac{1}{\|P_1\|}P_1, \dots, \frac{1}{\|P_n\|}P_n\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$ est $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\langle f, \frac{1}{\|P_k\|}P_k \right\rangle \frac{1}{\|P_k\|} P_k$

Donc $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k$.

$\|(f-S_n) + S_n\|^2 = \|f-S_n\|^2 + \|S_n\|^2$ car $f - S_n$ et S_n sont orthogonaux.

Ainsi $\|f-S_n\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n\|^2$.

$$\|S_n\|^2 = \langle S_n, S_n\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} \frac{\langle f, P_i\rangle}{\|P_i\|^2} P_i , \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle f, P_j\rangle}{\|P_j\|^2} P_j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{\langle f,P_i\rangle\langle f,P_j\rangle\langle P_i,P_j\rangle}{\|P_i\|^2\|P_j\|^2}$$

Or $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale donc $\|S_n\|^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\langle f, P_i\rangle^2}{\|P_i\|^2}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$: • il existe un unique élément S_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - S_n\|$ soit minimal,

- $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k\rangle}{\|P_k\|^2} P_k$
- $\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n\|^2$
- $\|S_n\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(\langle f, P_k\rangle)^2}{\|P_k\|^2}$.

(Q2) $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(\langle f, P_\ell\rangle)^2}{\|P_\ell\|^2} \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \frac{(\langle f, P_\ell\rangle)^2}{\|P_\ell\|^2} = \|S_n\|^2 = \|f\|^2 - \|f-S_n\|^2 \leqslant \|f\|^2$.

La série de terme général $\dfrac{(\langle f, P_\ell\rangle)^2}{\|P_\ell\|^2}$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée par $\|f\|^2$.

Alors **1/ La série de terme général $\dfrac{(\langle f, P_\ell\rangle)^2}{\|P_\ell\|^2}$ converge.**

2/ $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\langle f, P_\ell\rangle)^2}{\|P_\ell\|^2} \leqslant \|f\|^2$.

(Q3) a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $f-P$ est continue sur $[-1,1]$ donc $M = \max_{t\in[-1,1]} |f(t)-P(t)|$ existe.

$\|f-P\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} (f(t)-P(t))^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt \leqslant \int_{-1}^{1} M^2 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, dt$ car cette dernière intégrale converge. Alors $\|f-P\|^2 \leqslant M^2 I_0 = M^2 \pi$; $\|f-P\| \leqslant M\sqrt{\pi}$.

Le théorème de Weierstrass montre qu'il existe un élément Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$\max_{t\in[-1,1]} |f(t)-Q(t)| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$ car f est continue sur $[-1,1]$.

Ce qui précède donne alors $\|f-Q\| \leqslant \left(\max_{t\in[-1,1]} |f(t)-Q(t)|\right)\sqrt{\pi} < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = \varepsilon$.

Donc $\|f-Q\| < \varepsilon$. **$\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $\|f-Q\| < \varepsilon$.**

b) $\exists p \in \mathbb{N}$, $Q \in \mathbb{R}_p[X]$ (prendre $p = \deg Q$ si $Q \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$ et p quelconque si $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$). Soit $n \in [\![p, +\infty[\![$. $\mathbb{R}_p[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ donc $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Alors $\|f-Q\| \geqslant \min_{P\in\mathbb{R}_n[X]} \|f-P\| = \|f-S_n\|$. Donc $\|f-S_n\| \leqslant \|f-Q\| < \varepsilon$.

Ainsi **$\forall n \in [\![p, +\infty[\![$, $\|f-S_n\| < \varepsilon$.**

Nous avons donc montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \|f - S_n\| < \varepsilon$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} \|f - S_n\| = 0$.

⌋ $\|f\|^2 - \|S_n\|^2 = \|f - S_n\|^2$; ainsi $\lim_{n \to +\infty} (\|f\|^2 - \|S_n\|^2) = 0$

Alors $\lim_{n \to +\infty} \|S_n\|^2 = \|f\|^2$. Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|S_n\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\langle f, P_k \rangle)^2}{\|P_k\|^2}$.

Par conséquent : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\langle f, P_k \rangle)^2}{\|P_k\|^2} = \|f\|^2$.