SUJET 18

- n et m sont deux entiers tels que $0 < n \leqslant m$.
- $E = \mathbb{R}^n$. $< .,. >$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ est la norme associée.
- $\mathcal{B}_E = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ est une famille d'éléments non nuls de E telle qu'il existe un réel α strictement positif vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \alpha \|x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{m} \big(< x, e_k > \big)^2 \qquad (1)$$

- On pose :

$$\boxed{\forall x \in E,\ T(x) = \sum_{k=1}^{m} < x, e_k > \ e_k}.$$

PARTIE I

Q1 Donner un exemple simple de famille $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ satisfaisant une condition de la forme (1).

Q2 Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ est une famille génératrice de E (considérer l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_m)$).

Q3 Montrer que T est un **auto**morphisme symétrique de E vérifiant :

$$\forall x \in E,\ < T(x), x > \geqslant \alpha \|x\|^2.$$

Q4 Soit $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de T respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de T^{-1}.

b) Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \geqslant \alpha$.

c) Déduire de ce qui précède qu'il existe un réel β strictement positif tel que :

$$\forall x \in E,\ < T^{-1}(x), x > \leqslant \beta \|x\|^2.$$

Q5 Ici $n = 2$, $m = 3$, $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$ et $e_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$.

Montrer que (e_1, e_2, e_3) vérifie (1) pour un α que l'on précisera. Déterminer T.

Q6 Déterminer T lorsque $\forall x \in E,\ \alpha \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \big(< x, e_k > \big)^2$ (on pourra remarquer que $< T(x+y), x+y > = \alpha < x+y, x+y >$).

PARTIE II

- $F = \mathbb{R}^m$. $< .,. >_F$ est le produit scalaire canonique de R^m et $\|.\|_F$ sa norme associée.
- $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$.
- $\mathcal{B}_E = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ est toujours la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On considère l'application linéaire Φ de E dans F définie par :

$$\forall x \in E,\ \Phi(x) = \sum_{k=1}^{m} < x, e_k > \ f_k$$

On note A la matrice de Φ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Q1 Soit Ψ l'application linéaire de F dans E de matrice ${}^tA$ relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$.

Montrer que :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ < \Psi(y), x > = < y, \Phi(x) >_F$$

Montrer que Ψ est la seule application linéaire de F dans E vérifiant cette propriété.

Vérifier que $\operatorname{Ker} \Psi = (\operatorname{Im} \Phi)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} \Psi = (\operatorname{Ker} \Phi)^{\perp} = E$.

Q2 Vérifier que $\forall y \in F,\ \Psi(y) = \sum\limits_{k=1}^{m} < y, f_k >_F \ e_k$ et que $\Psi \circ \Phi = T$.

On pose, pour tout élément k de $[\![1, m]\!]$, $\widetilde{e_k} = T^{-1}(e_k)$ et on considère l'application linéaire $\tilde{\Phi}$ de E dans F définie par :

$$\forall x \in E,\ \tilde{\Phi}(x) = \sum_{k=1}^{m} < x, \widetilde{e_k} > \ f_k.$$

Q3 Montrer que $\tilde{\Phi} \circ T = \Phi$ et que $\Psi \circ \tilde{\Phi} = Id_E$. (on pourra remarquer que T^{-1} est symétrique).

En déduire que l'on a $F = \operatorname{Im} \tilde{\Phi} \bigoplus (\operatorname{Im} \Phi)^{\perp}$

Q4 Etant donné un élément x de E, on se propose de déterminer le minimum des nombres $\sum\limits_{k=1}^{m} {y_k}^2$ pour les éléments $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ de F vérifiant $x = \sum\limits_{k=1}^{m} y_k\, e_k = \Psi(y)$, c'est à dire $\underset{y \in F \text{ et } \Psi(y)=x}{\text{Min}} \|y\|_F^2$.

a) Soit $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ un élément de F. Il existe un couple (u, v) et un seul de $\operatorname{Im} \tilde{\Phi} \times (\operatorname{Im} \Phi)^{\perp}$ tel que $y = u + v$.

Montrer que $\|y\|_F^2 = \|u\|_F^2 + \|v\|_F^2$ et que $x = \sum\limits_{k=1}^{m} y_k\, e_k = \Psi(y)$ si et seulement si $u = \tilde{\Phi}(x)$.

b) En déduire que le minimum cherché existe et vaut $\|\tilde{\Phi}(x)\|^2$ ou encore $< T^{-1}(x), x >$.

Q5 Expliquer ce qui se passe dans chacun des cas suivants :

a) La famille $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ est une base de E.

b) La famille $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ est une base orthonormale de E.

c) $\forall x \in E,\ \alpha \|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} \big(< x, e_k > \big)^2$.

PARTIE III

On se propose dans cette partie, de résoudre l'équation $T(x) = y$ par une méthode d'itérations successives.

Q1 a) Justifier l'existence d'une base orthonormale $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de T.

On note λ_1, λ_2, ..., λ_n les valeurs propres respectivement associées aux vecteurs propres u_1, u_2, ..., u_n.

On suppose dans la suite que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et on pose $a = \lambda_1$ et $b = \lambda_n$.

b) Montrer que $0 < a \leqslant b$.

c) Que dire de T si $a = b$?

Q2 Montrer que : $\forall s \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in E,\ \|\big(Id_E - s\,T\big)(x)\| \leqslant \mathrm{Max}(|1-as|, |1-bs|)\,\|x\|$ (on pourra utiliser la base orthonormale $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$).

Q3 On pose $\forall s \in \mathbb{R}^{+*},\ \ell(s) = \mathrm{Max}(|1-as|, |1-bs|)$.

a) Représenter graphiquement ℓ dans le cas ou $a < b$.

b) Ecrire ℓ sans valeur absolue et sans Max...

c) Montrer que ℓ possède un minimum C, appartenant à $[0, 1[$, et préciser pour quelle valeur s_0 de s il est atteint.

Q4 Soit y un élément de E. Soit x l'unique élément de E tel que $T(x) = y$.

On pose $\forall z \in E,\ U(z) = z + s_0\,\big(y - T(z)\big)$.

a) Vérifier que $\forall (z, z') \in E^2,\ \|U(z) - U(z')\| \leqslant C\,\|z - z'\|$ et préciser $U(x)$.

b) x_0 est un élément quelconque de E. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = U^n(x_0)$.

Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant n}$ converge vers x.