SUJET 19

MATRICES ET ENDOMORPHISMES n-SYMÉTRIQUES

E est un espace vectoriel euclidien, de dimension p non nulle. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de E.

On rappelle que :

Si G_1, G_2, ..., G_s sont des sous-espaces vectoriels de E : $(G_1 + G_2 + \cdots + G_s)^\perp = G_1^\perp \cap G_2^\perp \cap \cdots \cap G_s^\perp$.

Si s appartient à $\mathbb{N}^*$, tout élément de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre dans $\mathbb{C}$.

Partie I

v est un endomorphisme de E. Pour tout élément k de $\mathbb{N}$ on pose $N_k = \operatorname{Ker} v^k$, $n_k = \dim N_k$ et $I_k = \operatorname{Im} v^k$.

Q1 Montrer que pour tout élément k de $\mathbb{N}$, N_k est contenu dans N_{k+1}, et I_{k+1} est contenu dans I_k.

Q2 a) En considérant la suite $(n_k)_{k\geqslant 0}$, montrer qu'il existe un élément k de $\mathbb{N}$ tel que $N_k = N_{k+1}$.

b) On pose $q = \operatorname{Min}\{k \in \mathbb{N} \mid N_k = N_{k+1}\}$. Montrer que q est au plus égal à p que, pour tout entier k supérieur ou égal à q, $N_k = N_q$ et que, pour tout entier k strictement inférieur à q, N_k est strictement contenu dans N_{k+1}.

c) Déduire de ce qui précède que, pour tout entier k supérieur ou égal à q, $I_k = I_q$ et que, pour tout entier k strictement inférieur à q, I_{k+1} est strictement contenu dans I_k.

Q3 Prouver que $E = N_q \bigoplus I_q$, et que la restriction de v à I_q induit un isomorphisme de I_q dans lui-même.

Q4 Soient γ un réel <u>non nul</u> et m un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que v^q et $(v - \gamma Id_E)^m$ commutent. En déduire que que N_q et I_q sont stables par $(v - \gamma Id_E)^m$.

b) Montrer que si m et q ne sont pas nuls, $(X^q, X^{q+1}, \ldots, X^{q+m-1}, (X-\gamma)^m, X(X-\gamma)^m, \ldots, X^{q-1}(X-\gamma)^m)$ est une base de $\mathbb{R}_{q+m-1}[X]$.

En déduire qu'il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AX^q + B(X-\gamma)^m = 1$ (ne pas oublier les deux cas particuliers).

Prouver enfin que $\operatorname{Ker} v^q \cap \operatorname{Ker}(v - \gamma Id_E)^m = \{0_E\}$.

c) Utiliser Q3 pour montrer que $\operatorname{Ker}(v - \gamma Id_E)^m$ est contenu dans $I_p (= I_q)$.

Partie II

On note I l'élément unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soient A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et n un élément de $\mathbb{N}^*$.

On pose : $C = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \mathrm{C}_n^k \, ({}^tA)^k \, A^{n-k}$. On dit que A est n-symétrique si :

$$C = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \mathrm{C}_n^k \, ({}^tA)^k \, A^{n-k} = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})} \qquad (1)$$

Q1 a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit 1-symétrique.

b) Dans le cas où ${}^tAA = A{}^tA$, donner une expression simple de (1).

Q2 On suppose que A est n-symétrique et que P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} = {}^tP$.

Montrer que $A' = {}^tPAP$ est encore n-symétrique.

Q3 n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que si A est n-symétrique alors A est $(n+1)$-symétrique ($\mathrm{C}_{n+1}^k = \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}$ pour k élément de $[\![1, n]\!]$...).

Q4 a) m, n et q sont trois éléments de $\mathbb{N}$ tels que $m + q < n$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=m}^{n-q} (-1)^k \, \mathrm{C}_n^k \; \mathrm{C}_k^m \; \mathrm{C}_{n-k}^q = 0$.

b) n est un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que si A est n-symétrique alors, pour tout réel μ, $A - \mu I$ est n-symétrique (on pourra partir de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \mathrm{C}_n^k \left({}^t(A-\mu I)\right)^k (A-\mu I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \sum_{q=0}^{n-k}$ ... et passer à $\displaystyle\sum_m \sum_q \sum_k$).

Q5 On suppose qu'il existe deux éléments T et N de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et un élément r de $\mathbb{N}^*$ tels que : $A = T + N$, ${}^tT = T$, $TN = NT$ et $N^r = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$.

En s'inspirant de la question précédente, montrer que A est $(2r-1)$-symétrique.

Q6 a) Soient λ et μ deux nombres complexes et X, Y deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tels que $AX = \lambda X$ et $AY = \mu Y$.

En calculant ${}^t\overline{Y}CX$, montrer que $(\lambda - \overline{\mu})^n \; {}^t\overline{Y}X = 0$.

b) Déduire de ce qui précède que toutes les valeurs propres de A sont réelles, et que si λ et μ sont deux éléments distincts de $\mathrm{Sp}\, A$ alors SEP (A, λ) et SEP (A, μ) sont orthogonaux.

Partie III

Dans cette partie u est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$ et n un élément de $\mathbb{N}^*$.

On pose encore : $C = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \, \mathrm{C}_n^k \, ({}^tA)^k \, A^{n-k}$.

u est dit n-symétrique si A est n-symétrique.

Q1 a) Montrer que cette définition ne dépend pas de la base **orthonormale** $\mathcal{B}$.

b) Montrer que u est n-symétrique si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \mathrm{C}_n^k < u^k(x), u^{n-k}(y) >= 0$$

Dans toute la suite de la partie III on suppose que u est n-symétrique.

Q2 Montrer que pour tout réel μ, $u - \mu Id_E$ est n-symétrique.

Remarque Les gens pressés peuvent sauter Q3 et remplacer alors dans Q4 a $\mathrm{Ker}\, u$ par $\mathrm{Ker}\, u^0$! ! Il importe avant tout d'obtenir le résultat de Q4 c.

Q3 Soit y (resp. x) un élément de $\mathrm{Ker}\, u$ (resp. E) de matrice Y (resp. X) dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer que ${}^tYCX = {}^tYA^nX$.

En déduire que $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u^n$ sont orthogonaux.

Q4 $q = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Ker}\, u^{k+1} = \mathrm{Ker}\, u^k\} = \mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N} \mid \mathrm{Im}\, u^{k+1} = \mathrm{Im}\, u^k\}$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, u$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\, u^q$.

b) On suppose que j est un élément de $\mathbb{N}$ et que $\mathrm{Ker}\, u^j$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\, u^q$ et on se proprose de montrer que $\mathrm{Ker}\, u^{j+1}$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\, u^q$

Soit y (resp. z) un élément de $\mathrm{Ker}\, u^{j+1}$ (resp. $\mathrm{Im}\, u^q$) de matrice Y (resp. Z) dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer que ${}^tYCZ = {}^tYA^nZ$. En déduire le résultat proposé.

c) Que permettent d'affirmer a) et b) ?

d) Montrer que $(\mathrm{Im}\, u^q)^\perp = \mathrm{Ker}\, u^q$, $(\mathrm{Im}\, u^p)^\perp = \mathrm{Ker}\, u^p$ et que, pour tout réel μ, $\Big(\mathrm{Im}(u - \mu\, Id_E)^p\Big)^\perp = \mathrm{Ker}(u - \mu\, Id_E)^p$.

Q5 Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u.

Utiliser I 4 pour prouver que, pour tout m dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(u - \lambda\, Id_E)^m \subset \mathrm{Im}(u - \mu\, Id_E)^p$.

En déduire que $\mathrm{Ker}(u - \lambda\, Id_E)^p$ et $\mathrm{Ker}(u - \mu\, Id_E)^p$ sont orthogonaux ou que $\mathrm{Ker}(u - \lambda\, Id_E)^m$ et $\mathrm{Ker}(u - \mu\, Id_E)^m$ sont orthogonaux pour tout m dans $\mathbb{N}$ non ?

Q6 On pose $E' = \displaystyle\overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\, Id_E)^p$ et on se propose de prouver que $E' = E$.

a) Montrer que $E'^\perp = \displaystyle\bigcap_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \mathrm{Im}(u - \lambda\, id_E)^p$.

Prouver que $E'' = E'^\perp$ est stable par u.

On suppose E'' de dimension non nulle. On note u'' l'endomorphisme induit par u sur E''. u'' est clairement n-symétrique (III Q1 b...).

b) Montrer que u'' admet au moins une valeur propre et en déduire une contradiction.

Ainsi $E' = E$!

Q7 On pose $r = \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, on suppose que u est nilpotent et on se propose de montrer par l'absurde que $u^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On suppose donc que $u^r \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

a) Montrer qu'il existe un élément x de E, de matrice X dans $\mathcal{B}$, tel que :

$$u^r(x) \neq 0_E \text{ et } \forall k \in [\![r+1, +\infty [\![, u^k(x) = 0_E.$$

b) On suppose n pair. Calculer ${}^tXCX$ et en déduire une contradiction.

c) On suppose n impair. Calculer ${}^t(AX)CX$ et en déduire une contradiction.

d) Conclure.

Partie IV

Dans cette partie u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$ et n est toujours un élément de $\mathbb{N}^*$.

Q1 θ et v sont deux endomorphismes de E tels que $u = \theta + v$, θ est symétrique, $\theta \circ v = v \circ \theta$ et $v^{[\frac{n+1}{2}]} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que u est n-symétrique (deux cas).

Q2 r est dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que si u est $(2r-1)$-symétrique alors u est $2r$-symétrique.

On se propose de montrer la réciproque de ces deux résultats.

Q3 u est un endomorphisme de E n-symétrique. On rappelle que $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u}} \mathrm{Ker}(u - \lambda\, Id_E)^p$.

Soit λ un élément de $\mathrm{Sp}\, u$. On pose : $F_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, Id_E)^p$.

a) Montrer que F_λ est stable par u. On note u_λ l'endomorphisme induit par u sur F_λ et on pose $v_\lambda = u_\lambda - \lambda\, Id_\lambda$ et $\theta_\lambda = \lambda\, Id_{F_\lambda}$.

b) Montrer que θ_λ est un endomorphisme symétrique de F_λ qui commute avec v_λ.

Montrer que $v_\lambda^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = 0_{\mathcal{L}(F_\lambda)}$.

c) Utiliser ce qui précède pour établir la réciproque de Q1.

Q4 Prouver que u est $2r$-symétrique si et seulement si et seulement si u est $(2r-1)$-symétrique.

Q5 A-t-on u est $2r$-symétrique si et seulement si u est $(2r+1)$-symétrique ?
