PARTIE I

Q1 Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in N_k$. $v^k(x) = 0_E$ donc $v^{k+1}(x) = v(0_E) = 0_E$; $x \in N_{k+1}$. $N_k \subset N_{k+1}$.

Soit $x \in I_{k+1}$. $\exists t \in E$, $x = v^{k+1}(t)$. $x = v^k(v(t)) \in I_k$. $I_{k+1} \subset I_k$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.

Q2 a) $\forall k \in \mathbb{N}, N_k \subset N_{k+1} \subset E$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $n_k = \dim N_k \leq \dim N_{k+1} = n_{k+1} \leq p$.

$(n_k)_{k \geq 0}$ est une suite croissante d'éléments de $[\![0, p]\!]$.

Supposons $n_0 < n_1 < \dots < n_{p+1}$. Alors $n_0, n_1, \dots, n_{p+1}$ sont $p+2$ éléments deux à deux distincts de $[\![0, p]\!]$ qui est un ensemble de cardinal $p+1$!

Ainsi la suite $(n_0, n_1, \dots, n_{p+1})$ est croissante mais pas strictement croissante.

Alors $\exists k \in [\![0, p]\!]$, $n_k = n_{k+1}$.

On a donc $N_k \subset N_{k+1}$ et $\dim N_k = \dim N_{k+1}$. Ceci donne $N_k = N_{k+1}$.

* Il existe un élément k de $\mathbb{N}$ tel que $N_k = N_{k+1}$.

b) Nous avons vu plus haut que : $\exists k \in [\![0, p]\!]$, $N_k = N_{k+1}$ donc nécessairement $q \leq p$.

Par définition de q : $\forall k \in [\![0, q-1]\!]$, $N_k \neq N_{k+1}$.

Ainsi pour tout entier k strictement inférieur à q, N_k est strictement contenu dans N_{k+1}.

Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![q, +\infty[\![$, $N_k = N_q$.

→ La propriété est vraie pour q !

→ Supposons la propriété vraie pour k élément de $[\![q, +\infty[\![$ et montrons la pour $q+1$.

$N_q = N_k \subset N_{k+1}$; $N_q \subset N_{k+1}$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $x \in N_{k+1}$. $v^{k+1}(x) = 0_E$, $v^k(v(x)) = 0_E$; $v(x) \in N_k = N_q$;

Alors $v^q(v(x)) = 0$; $v^{q+1}(x) = 0_E$; $x \in N_{q+1} = N_q$; $x \in N_q$. Ceci achève de montrer que $N_{k+1} \subset N_q$. Alors $N_{k+1} = N_q$, ce qui termine la récurrence.

$\forall k \in [\![q, +\infty[\![$, $N_k = N_q$. Remarque... $N_p = N_q$ car $q \leq p$.

c) Rappelons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} \subset I_k$.

Comme nous sommes en dimension finie, si k est élément de $\mathbb{N}$,

$I_{k+1} = I_k \Leftrightarrow \dim I_{k+1} = \dim I_k \Leftrightarrow rg\, v^{k+1} = rg\, v^k \Leftrightarrow \dim E - rg\, v^{k+1} = \dim E - rg\, v^k \Leftrightarrow \dim N_{k+1} = \dim N_k$

$\Updownarrow$

$N_{k+1} = N_k$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} \subset I_k$ et $(I_{k+1} = I_k \Leftrightarrow N_{k+1} = N_k)$.

b) permet alors de dire que :

→ $\forall k \in [\![0, q-1]\!]$, I_{k+1} est strictement contenu dans I_k.

→ $\forall k \in [\![q, +\infty[\![$, $I_k = I_q$. Remarque.. $I_p = I_q$ car $q \leq p$.

(Q3) $\dim E < +\infty$. Pour montrer que $E = N_q \oplus I_q$ il suffit de prouver que :

$N_q \cap I_q = \{0_E\}$ et $\dim N_q + \dim I_q = \dim E$.

Le théorème du rang donne sans difficulté le second point car $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, v^q + \dim \mathrm{Im}\, v^q = \dim N_q + \dim I_q$. Montrons le premier point.

Soit $x \in N_q \cap I_q$. $v^q(x) = 0_E$ et $\exists t \in E$, $x = v^q(t)$.

Alors $v^{2q}(t) = v^q(x) = 0_E$; $t \in N_{2q} = N_q$; $v^q(t) = 0_E$; $x = 0_E$.

ceci achève de prouver que $N_q \cap I_q = \{0_E\}$.

Finalement $E = N_q \oplus I_q$.

(Q4) a) $v^q \circ (v - \sigma Id_E)^m = v^q \circ \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-\sigma)^{m-k} v^k = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-\sigma)^{m-k} v^{q+k}$

$v^q \circ (v - \sigma Id_E)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-\sigma)^{m-k} v^{k+q} = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k (-\sigma)^{m-k} v^k\right) \circ v^q = (v - \sigma Id_E)^m \circ v^q$.

Ainsi v^q et $(v - \sigma Id_E)^m$ commutent... On pouvait également utiliser $X^q (X-\sigma)^m = (X-\sigma)^m X^q$!

Soit $x \in N_q$. $v^q\left((v - \sigma Id_E)^m (x)\right) = \left(v^q \circ (v - \sigma Id_E)^m\right)(x) = \left((v - \sigma Id_E)^m \circ v^q\right)(x)$

$v^q\left((v - \sigma Id_E)^m (x)\right) = (v - \sigma Id_E)^m (v^q(x)) = (v - \sigma Id_E)^m (0_E) = 0_E$; $(v - \sigma Id_E)^m (x) \in N_q$.

Ainsi N_q est stable par $(v - \sigma\, Id_E)^m$.

Soit $x \in I_q$. $\exists t \in E$, $v^q(t) = x$.

$(v - \sigma Id_E)^m(x) = (v - \sigma Id_E)^m (v^q(t)) \underset{\substack{\uparrow \\ (v-\sigma Id_E)^m \text{ et } v^q \text{ commutent}}}{=} v^q((v - \sigma Id_E)^m(t)) \in I_q$; $(v - \sigma Id_E)^m(x) \in I_q$

I_q est stable par $(v - \sigma Id_E)^m$.

On suppose $q \neq 0$ et $m \neq 0$.

b) $(X^q, X^{q+1}, \dots, X^{q+m-1}, (X-\sigma)^m, X(X-\sigma)^m, \dots, X^{q-1}(X-\sigma)^m)$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_{q+m-1}[X]$ de cardinal $q+m$ et $\mathbb{R}_{q+m-1}[X]$ est de dimension $q+m$. Pour montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_{q+m-1}[X]$ il suffit de prouver que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ et soit $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$ tels que :

$\sum_{\ell=0}^{m-1} \alpha_\ell X^{q+\ell} + \sum_{\ell=0}^{q-1} \beta_\ell X^\ell (X-\sigma)^m = 0_{\mathbb{R}[X]}$; $\sum_{\ell=0}^{m-1} \alpha_\ell X^{q+\ell} = -(X-\sigma)^m \sum_{\ell=0}^{q-1} \beta_\ell X^\ell$

X^q divise $\sum_{\ell=0}^{m-1} \alpha_\ell X^{q+\ell}$ donc divise $(X-\sigma)^m \sum_{\ell=0}^{q-1} \beta_\ell X^\ell$; or 0 n'est pas racine de $(X-\sigma)^m$ car $\sigma \neq 0$; ainsi X^q divise $\sum_{\ell=0}^{q-1} \beta_\ell X^\ell$

$\deg X^q = q$, $\deg \sum_{\ell=0}^{q-1} \beta_\ell X^\ell < q$ et X^q divise $\sum_{\ell=0}^{q-1} \beta_\ell X^\ell$ donc nécessairement $\sum_{\ell=0}^{q-1} \beta_\ell X^\ell = 0$.

Alors $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{q-1} = 0$.

Ceci donne $\sum_{\ell=0}^{m-1} \alpha_\ell X^{q+\ell} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ qui donne $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{m-1} = 0$

La famille considérée au départ est donc libre. Ceci achève de prouver que

$(X^q, X^{q+1}, \dots, X^{q+m-1}, (X-\sigma)^m, X(X-\sigma)^m, \dots, X^{q-1}(X-\sigma)^m)$ est une base de $\mathbb{R}_{q+m-1}[X]$.

On suppose de nouveau que q et m sont "quelconques". Montrons qu'il existe deux éléments A et B de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AX^q + B(X-\sigma)^m = 1$.

1er Cas.. $q=0$. Il suffit de prendre $A=1$ et $B=0$.

2e Cas.. $m=0$ " " $A=0$ et $B=1$.

3e Cas.. $q\neq 0$ et $m\neq 0$.

$1\in \mathbb{R}_{q+m-1}[X]$ donc $\exists (a_0,a_1,\dots,a_{m-1})\in\mathbb{R}^m$ et $\exists (b_0,b_1,\dots,b_{q-1})\in\mathbb{R}^q$,

$1=\sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell X^{q+\ell}+\sum_{\ell=0}^{q-1} b_\ell X^\ell (X-\delta)^m$. Posons $A=\sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell X^\ell$ et $B=\sum_{\ell=0}^{q-1} b_\ell X^\ell$.

Nous obtenons $A\in\mathbb{R}[X]$, $B\in\mathbb{R}[X]$ et $AX^q+B(X-\delta)^m=1$.

$\exists (A,B)\in\mathbb{R}[X]^2,\ AX^q+B(X-\delta)^m=1$.

$AX^q+B(X-\delta)^m=1$ donc $A(v)\circ v^q+B(v)\circ(v-\delta Id_E)^m=Id_E$.

Soit $x\in \mathrm{Ker}\, v^q\cap \mathrm{Ker}\,(v-\delta Id_E)^m$.

$x=A(v)(v^q(x))+B(v)\big((v-\delta Id_E)^m(x)\big)=A(v)(0_E)+B(v)(0_E)=0_E+0_E=0_E$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, v^q\cap \mathrm{Ker}\,(v-\delta Id_E)^m=\{0_E\}$.

c) Soit $x\in \mathrm{Ker}\,(v-\delta Id_E)^m$. $\exists!\,(x_1,x_2)\in N_q\times I_q$, $x=x_1+x_2$.

$0_E=(v-\delta Id_E)^m(x)=(v-\delta Id_E)^m(x_1)+(v-\delta Id_E)^m(x_2)$.

N_q et I_q sont stables par $(v-\delta Id_E)^m$.

Ainsi $(v-\delta Id_E)^m(x_1)\in N_q$, $(v-\delta Id_E)^m(x_2)\in I_q$, $(v-\delta Id_E)^m(x_1)+(v-\delta Id_E)^m(x_2)=0$.

Comme N_q et I_q sont en somme directe il vient : $(v-\delta Id_E)^m(x_1)=(v-\delta Id_E)^m(x_2)=0$.

Alors $x_1\in \mathrm{Ker}\,(v-\delta Id_E)^m\cap \mathrm{Ker}\, v^q$; $x_1=0_E$. $x=x_2\in I_q$.

Finalement $\mathrm{Ker}\,(v-\delta Id_E)^m\subset I_q=I_p$.

PARTIE II

Q1 a) Si $n=1$: $C = (-1)^0 C_1^0 ({}^tA)^0 A^{1-0} + (-1)^1 C_1^1 ({}^tA)^1 A^{1-1} = A - {}^tA$.

Ainsi A 1-symétrique $\Leftrightarrow C=0 \Leftrightarrow A = {}^tA$.

$\underline{\underline{A \text{ est 1-symétrique si et seulement si } A \text{ est symétrique.}}}$

b) Si A et ${}^tA$ commutent la formule du binôme donne $(A-{}^tA)^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l A^{n-l}(-{}^tA)^l =$

$$\sum_{l=0}^{n} C_n^l (-1)^l A^{n-l}({}^tA)^l \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ et } {}^tA \text{ commutent}}}{=} \sum_{l=0}^{n} C_n^l (-1)^l ({}^tA)^l A^{n-l} = C.$$

Ainsi $\underline{\underline{\text{si } {}^tAA = A{}^tA : A \text{ est } n\text{-symétrique si et seulement si } (A-{}^tA)^n = 0.}}$

Q2 $\forall l \in [\![0,n]\!]$, $({}^tA')^l = ({}^t({}^tPAP))^l = ({}^tP{}^tAP)^l = (P^{-1}{}^tAP)^l = P^{-1}({}^tA)^l P$.

$\forall k \in [\![0,n]\!]$, $A'^{n-l} = ({}^tPAP)^{n-l} = (P^{-1}AP)^{n-l} = P^{-1}A^{n-l}P$.

Alors $\sum_{l=0}^{n} C_n^l (-1)^l ({}^tA')^l (A')^{n-l} = \sum_{l=0}^{n} C_n^l (-1)^l \left(P^{-1}({}^tA)^l P P^{-1} A^{n-l} P\right) = \sum_{l=0}^{n} C_n^l (-1)^l P^{-1}({}^tA)^l A^{n-l} P$

$$\sum_{l=0}^{n} C_n^l (-1)^l ({}^tA')^l (A')^{n-l} = P^{-1}\left(\sum_{l=0}^{n} C_n^l (-1)^l ({}^tA)^l A^{n-l}\right)P = P^{-1}CP = P^{-1}0P = 0$$

$\underline{\underline{A' = {}^tPAP \text{ est encore } n\text{-symétrique.}}}$

Q3 $$\sum_{l=0}^{n+1} C_{n+1}^l (-1)^l ({}^tA)^l A^{n+1-l} = A^{n+1} + \sum_{l=1}^{n} (C_n^l + C_n^{l-1})(-1)^l ({}^tA)^l A^{n+1-l} + (-1)^{n+1}({}^tA)^{n+1}.$$

$$\sum_{l=0}^{n+1} C_{n+1}^l (-1)^l ({}^tA)^l A^{n+1-l} = A^{n+1} + \underbrace{\left(\sum_{l=1}^{n} C_n^l (-1)^l ({}^tA)^l A^{n-l}\right)A} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i (-1)^{i+1} ({}^tA)^{i+1} A^{n-i} + (-1)^{n+1}({}^tA)^{n+1}}$$

" " $= \left(\sum_{l=0}^{n} C_n^l (-1)^l ({}^tA)^l A^{n-l}\right)A - {}^tA \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i ({}^tA)^i A^{n-i}$

" " $= CA - {}^tAC = 0 - 0 = 0$

Si $\underline{\underline{A \text{ est } n\text{-symétrique : } A \text{ est } n+1\text{-symétrique.}}}$

Q4 a) Soit $k \in [\![m, n-q]\!]$. $C_n^k C_k^m C_{n-k}^q = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \times \dfrac{k!}{m!(k-m)!} \times \dfrac{(n-k)!}{q!(n-k-q)!}$.

$$C_n^k C_k^m C_{n-k}^q = \frac{n!}{m!q!(n-m-q)!} \times \frac{(n-m-q)!}{(k-m)!(n-k-q)!} = \frac{n!}{m!(n-m-q)!q!} C_{n-m-q}^{k-m}$$

$$\sum_{k=m}^{n-q} (-1)^k C_n^k C_k^m C_{n-k}^q = \frac{n!}{m!q!(n-m-q)!} \sum_{k=m}^{n-q} (-1)^k C_{n-m-q}^{k-m} = \frac{n!}{m!q!(n-m-q)!} (-1)^m \sum_{i=0}^{n-m-q} (-1)^i C_{n-m-q}^i$$

$$\sum_{k=m}^{n-q} (-1)^k C_n^k C_k^m C_{n-k}^q = \frac{n!}{m!q!(n-m-q)!} (-1)^m (1-1)^{n-m-q} \underset{n-m-q>0}{=} 0 .$$

Si $m+q<n$: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n-q} (-1)^k C_n^k C_k^m C_{n-k}^q = 0$.

b) Posons $\hat{C} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k ({}^t(A-\mu I))^k (A-\mu I)^{n-k}$ et montrons que $\hat{C} = 0$.

$$\hat{C} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k ({}^tA-\mu I)^k (A-\mu I)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \sum_{m=0}^{k} C_k^m ({}^tA)^m (-\mu I)^{k-m} \sum_{q=0}^{n-k} C_{n-k}^q A^q (-\mu I)^{n-k-q}$$

$$\hat{C} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \sum_{q=0}^{n-k} C_n^k C_k^m C_{n-k}^q (-1)^{k+n-m-q} \mu^{n-m-q} ({}^tA)^m A^q .$$

Ne reste plus qu'à permuter le signe Σ avec les deux suivants

On passe alors de "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}\sum_{q=0}^{n-k}$" à $\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=m}^{n}\sum_{q=0}^{n-k}$ puis à $\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-m}\sum_{k=m}^{n-q}$"

Ainsi $\hat{C} = \displaystyle\sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{q=0}^{n-m} \left[\sum_{k=m}^{n-q} C_n^k C_k^m C_{n-k}^q (-1)^k \right] (-1)^{n-m-q} \mu^{n-m-q} ({}^tA)^m A^q \right)$

Notons alors que d'après a) le crochet vaut 0 si $q < n-m$ et vaut $C_n^m C_m^m C_{n-m}^{n-m} (-1)^m$

donc $(-1)^m C_n^m$ si $q = n-m$. Alors il vient :

$$\hat{C} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m (-1)^{n-m-(n-m)} \mu^{n-m-(n-m)} ({}^tA)^m A^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m ({}^tA)^m A^{n-m} = C = 0 !$$

(Q5) Pour s'inspirer de Q4, posons $n=2r-1$ et montrons que $C=\sum_{l=0}^{n} C_n^l(-1)^l({}^tA)^l A^{n-l}=0$.

$TN=NT$ donc $A^{n-l}=(T+N)^{n-l}=\sum_{q=0}^{n-l} C_{n-l}^q T^{n-l-q}N^q$ pour tout $l\in[\![0,n]\!]$.

$TN=NT$; ${}^t(TN)={}^t(NT)$; ${}^tN\,{}^tT={}^tT\,{}^tN$; ${}^tNT=N\,{}^tN$.

Ainsi $\forall l\in[\![0,n]\!], ({}^tA)^l=({}^tT+{}^tN)^l=(T+{}^tN)^l=\sum_{m=0}^{l} C_l^m\, T^{l-m}({}^tN)^m$.

Alors $C=\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{l}\sum_{q=0}^{n-l}(-1)^l C_n^l C_l^m C_{n-l}^q\, T^{l-m}({}^tN)^m T^{n-l-q}N^q$.

Permutons le premier Σ avec les deux suivants et en remarquant que T et ${}^tN$ commutent il vient $C=\sum_{m=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-m}\Big[\sum_{l=m}^{n-q}(-1)^l C_n^l C_l^m C_{n-l}^q\Big]T^{n-q-m}({}^tN)^m N^q$.

Comme dans Q4 $\sum_{l=m}^{n-q}(-1)^l C_n^l C_l^m C_{n-l}^q=\begin{cases}0 & \text{si } q<n-m\\ (-1)^m C_n^m & \text{si } q=n-m\end{cases}$

Ainsi $C=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m\, T^{n-(n-m)-m}({}^tN)^m N^{n-m}=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m({}^tN)^m N^{n-m}$.

Alors $C=\sum_{m=0}^{2r-1}(-1)^m C_{2r-1}^m\,{}^tN^m N^{2r-1-m}\underset{\substack{\uparrow\\ {}^tN^m=0 \text{ si } m\geq r}}{=}\sum_{m=0}^{r-1}(-1)^m C_{2r-1}^m\,{}^tN^m N^{2r-1-m}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{si } m\leq r-1\,:\, 2r-1-m\geq r}}{=}0$

Dans ces conditions <u>A est $2r-1$ symétrique</u>.

(Q6) a) ${}^t\bar{Y}CX={}^t\bar{Y}\sum_{l=0}^{n}(-1)^l C_n^l({}^tA)^l A^{n-l}X=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l C_n^l\,{}^t\bar{Y}\,{}^tA^l A^{n-l}X=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l C_n^l\,{}^t(A^l\bar{Y})A^{n-l}X$

$AX=\lambda X$ donc $\forall l\in\mathbb{N}, A^lX=\lambda^l X$.

$AY=\mu Y$; $\bar{A}\bar{Y}=\bar{\mu}\bar{Y}$; $A\bar{Y}=\bar{\mu}\bar{Y}$ car $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall l\in\mathbb{N}$, $A^l\bar{Y}=\bar{\mu}^l\bar{Y}$

$${}^t\bar{Y}CX = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\, {}^t(\bar{\mu}^k Y)\, \lambda^{n-k} X = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\, \bar{\mu}^k \lambda^{n-k}\, {}^t\bar{Y}X = (\lambda-\bar{\mu})^n\, {}^t\bar{Y}X.$$

${}^t\bar{Y}CX = (\lambda-\bar{\mu})^n\, {}^t\bar{Y}X$. Comme $C=0$: $(\lambda-\bar{\mu})^n\, {}^t\bar{Y}X = 0$.

c) Soit λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$. $\exists X \in M_{p,1}(\mathbb{C})$, $AX=\lambda X$ et $X \neq 0_{M_{p,1}(\mathbb{C})}$

$(\lambda-\bar{\lambda})^n\, {}^t\bar{X}X = 0$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$; ${}^t\bar{X}X = \sum_{k=1}^{p} \bar{x}_k x_k = \sum_{k=1}^{p} |x_k|^2 \neq 0$ $\left({}^t\bar{X}X = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,p]\!], |x_k|^2 = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,p]\!], x_k = 0 \Downarrow X = 0 \right)$

$(\lambda-\bar{\lambda})^n\, {}^t\bar{X}X = 0$ et ${}^t\bar{X}X \neq 0$ donc $(\lambda-\bar{\lambda})^n = 0$ et donc $\lambda = \bar{\lambda}$ $(n \geq 1)$.

Ainsi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de A.

$SEP(A,\lambda) = \{X \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$ et $SEP(A,\mu) = \{Y \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AY = \mu Y\}$.

Soit $X \in SEP(A,\lambda)$ et $Y \in SEP(A,\mu)$.

$(\lambda-\bar{\mu})^n\, {}^t\bar{Y}X = 0$ et donc $(\lambda-\mu)^n\, {}^tYX = 0$ $(\mu \in \mathbb{R}$ et $Y \in M_{p,1}(\mathbb{R}))$.

Ainsi ${}^tYX = 0$ car $\lambda-\mu \neq 0$; X et Y sont orthogonaux.

Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de A : $SEP(A,\lambda)$ et $SEP(A,\mu)$ sont orthogonaux.

PARTIE III

Q1 a) Soient $\mathcal{B}'$ une seconde base orthonormale, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et A' la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$.

- P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormales
- $A' = P^{-1}AP = {}^tPAP$. $A = PA'P^{-1} = PA'\,{}^tP = {}^t({}^tP)A'\,{}^tP$.

Si A est n-symétrique, II Q2 indique que $A' = {}^tPAP$ est n-symétrique.

Si A' est n-symétrique, II Q2 indique encore que $A = {}^t({}^tP)A'\,{}^tP$ est n-symétrique car ${}^tP$ est inversible et d'inverse ${}^t({}^tP)$.

Ainsi A n-symétrique $\Leftrightarrow$ A' n-symétrique.

La définition proposée ne dépend pas de la base orthonormale $\mathcal{B}$.

b) u n-symétrique

$\Updownarrow$

A n-symétrique

$\Updownarrow$

$$\sum_{l=0}^{n} C_n^l (-1)^l ({}^tA)^l A^{n-l} = 0_{M_p(\mathbb{R})}$$

$\Updownarrow$

$$\forall Y \in M_{p,1}(\mathbb{R}), \quad \sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_n^l \, {}^tA^l A^{n-l} Y = 0_{M_{p,1}(\mathbb{R})}$$

$\Updownarrow$

$$\forall Y \in M_{p,1}(\mathbb{R}), \quad \sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_n^l \, {}^tA^l A^{n-l} Y \in M_{p,1}(\mathbb{R})^{\perp} \quad !$$

$\Updownarrow$

$$\forall (X,Y) \in M_{p,1}(\mathbb{R})^2, \quad {}^tX\Big(\sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_n^l \, {}^tA^l A^{n-l} Y\Big) = 0$$

$\Updownarrow$

$$\forall (X,Y) \in M_{p,1}(\mathbb{R})^2, \quad \sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_n^l \, {}^t(A^l X)(A^{n-l} Y) = 0$$

$\Updownarrow$ ← $\mathcal{B}$ orthonormale

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_n^l \langle u^l(x), u^{n-l}(y) \rangle = 0.$$

u n-symétrique $\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2, \ \sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_n^l \langle u^l(x), u^{n-l}(y) \rangle = 0$.

Q2) Soit $\rho \in \mathbb{R}$. u est n-symétrique donc A également. II Q. 1) indique que $A - \rho I$ est n-symétrique. $A - \rho I$ étant la matrice de $u - \rho\, Id_E$ dans la base orthonormale $\mathcal{B}$, $u - \rho\, Id_E$ est n-symétrique.

Pour tout réel ρ, $u - \rho\, Id_E$ est n-symétrique.

Q3) Soit $y \in \operatorname{Ker} u$. $AY = 0_{M_{p,1}(\mathbb{R})}$. Mieux $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k Y = 0_{M_{p,1}(\mathbb{R})}$.

$${}^tYCX = {}^tY \sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_n^l ({}^tA)^l A^{n-l} X = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_n^l \, {}^t(A^l Y) A^{n-l} X \underset{\substack{\uparrow \\ A^kY=0 \text{ si } k \geq 1}}{=} (-1)^0 C_n^0 \, {}^t(A^0 Y) A^n X = {}^tY A^n X.$$

${}^tYCX = {}^tYA^nX$.

$C = 0$ donc ${}^tYA^nX = 0$; $\langle y, u^n(x) \rangle = 0$.

Ainsi $\forall x \in E, \forall y \in \operatorname{Ker} u, \langle y, u^n(x) \rangle = 0$. $\forall x' \in \operatorname{Im} u^n, \forall y \in \operatorname{Ker} u, \langle y, x' \rangle = 0$.

Ker u et Im u^n sont orthogonaux.

(Q4) a) Rappelons que $\to N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_q$ et $\forall \ell \in [\![q,+\infty[\![$, $N_\ell = N_q$
$\to I_q \subset I_{q-1} \subset \cdots \subset I_1 \subset I_0$ et $\forall k \in [\![q,+\infty[\![$, $I_k = I_q$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_q$ et $I_q \subset I_k$.

Nous avons vu que $\forall y \in \operatorname{Ker} u$, $\forall x' \in I_n$, $\langle y, x' \rangle = 0$. Comme $I_q \subset I_n$ on a encore $\forall y \in \operatorname{Ker} u$, $\forall x' \in I_q$, $\langle y, x' \rangle = 0$.
Ainsi Ker u est orthogonal à Im u^q.

b) Soit j un élément tel que Ker u^j est orthogonal à Im u^q. Montrons que Ker u^{j+1} est encore orthogonal à Im u^q.
Soit y (resp. z) un élément de Ker u^{j+1} (resp. Im u^q) de matrice Y (resp. Z) dans $\mathcal{B}$.
$${}^tYCZ = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell C_n^\ell \, {}^t(A^\ell Y) A^{n-\ell} Z$$
Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$. $u^j(u^\ell(y)) = u^{j+\ell}(y) = u^{\ell-1}(u^{j+1}(x)) = u^{\ell-1}(0_E) = 0_E$. $u^\ell(y) \in \operatorname{Ker} u^j$.
$z \in \operatorname{Im} u^q$ donc $u^{n-\ell}(z) \in \operatorname{Im} u^{n-\ell+q} = \operatorname{Im} u^q$.
Ainsi $u^\ell(y)$ et $u^{n-\ell}(z)$ sont orthogonaux et : ${}^t(A^\ell Y) A^{n-\ell} Z = 0$.

Alors ${}^tYCZ = (-1)^0 C_n^0 \, {}^t(A^0 Y) A^{n-0} Z = {}^tYA^nZ$. ${}^tYCZ = {}^tYA^nZ$.

$C = 0$ donc ${}^tYA^nZ = 0$; $\langle y, u^n(z) \rangle = 0$.

$\forall y \in \operatorname{Ker} u^{j+1}$, $\forall z \in \operatorname{Im} u^q$, $\langle y, u^n(z) \rangle = 0$.

$\forall y \in \operatorname{Ker} u^{j+1}$, $\forall z' \in \operatorname{Im} u^{n+q}$, $\langle y, z' \rangle = 0$.

Ker u^{j+1} est orthogonal à Im $u^{n+q} = I_{n+q} = I_q = \operatorname{Im} u^q$.

Si $j \in \mathbb{N}$ et si Ker u^j est orthogonal à Im u^q alors Ker u^{j+1} est orthogonal à Im u^q.

c) a) et b) et une récurrence évidente donnent : $\forall j \in \mathbb{N}^{(*)}$, Ker u^j orthogonal à $I_q = \operatorname{Im} u^q$.

d) ce qui précède montre que $\operatorname{Ker} u^q$ est orthogonal à $\operatorname{Im} u^q$

donc $\operatorname{Ker} u^q \subset (\operatorname{Im} u^q)^\perp$.

De plus $\dim \operatorname{Ker} u^q = \dim E - \dim \operatorname{Im} u^q = \dim (\operatorname{Im} u^q)^\perp$.

Ainsi $\underline{(\operatorname{Im} u^q)^\perp = \operatorname{Ker} u^q}$.

$p \geqslant q$ donc $\operatorname{Im} u^p = \operatorname{Im} u^q$ et $\operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} u^q$. Alors $\underline{(\operatorname{Im} u^p)^\perp = \operatorname{Ker} u^p}$.

Soit μ un réel. $u-\mu Id_E$ est n-symétrique donc $\underline{[\operatorname{Im} (u-\mu Id_E)^p]^\perp = \operatorname{Ker} (u-\mu Id_E)^p}$.

(Q5) Rappelons que si v est un endomorphisme de E, si $m \in \mathbb{N}$ et si $\gamma \in \mathbb{R}^*$:

$\operatorname{Ker}(v-\gamma Id_E)^m \subset \operatorname{Im} v^p$ (I Q4 c)

Appliquons ce résultat à $v = u - \mu Id_E$ et $\gamma = \lambda - \mu$. ($\gamma \neq 0$ car $\lambda \neq \mu$).

Il vient $\operatorname{Ker}(u-\mu Id_E - (\lambda-\mu) Id_E)^m \subset \operatorname{Im} (u-\mu Id_E)^p$ pour tout m dans $\mathbb{N}$.

Ainsi $\underline{\forall m \in \mathbb{N},\ \operatorname{Ker} (u-\lambda Id_E)^m \subset \operatorname{Im} (u-\mu Id_E)^p}$.

En particulier $\operatorname{Ker}(u-\lambda Id_E)^p \subset \operatorname{Im} (u-\mu Id_E)^p$, alors $[\operatorname{Im} (u-\mu Id_E)^p]^\perp \subset [\operatorname{Ker} (u-\lambda Id_E)^p]^\perp$

Alors $\operatorname{Ker} (u-\mu Id_E)^p = (\operatorname{Im} (u-\mu Id_E)^p)^\perp \subset (\operatorname{Ker} (u-\lambda Id_E)^p)^\perp$.

Ainsi $\underline{\operatorname{Ker} (u-\lambda Id_E)^p \text{ et } \operatorname{Ker}(u-\mu Id_E)^p \text{ sont orthogonaux}}$.

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} (u-\lambda Id_E)^m \subset \operatorname{Ker} (u-\lambda Id_E)^p$ et $\operatorname{Ker} (u-\mu Id_E)^m \subset \operatorname{Ker} (u-\mu Id_E)^p$

donc $\underline{\text{pour tout } m \text{ dans } \mathbb{N},\ \operatorname{Ker} (u-\lambda Id_E)^m \text{ et } \operatorname{Ker} (u-\mu Id_E)^m \text{ sont orthogonaux}}$.

(Q6) a) $E'^\perp = \left(\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \operatorname{Ker} (u-\lambda Id_E)^p \right)^\perp \underset{\text{rappel ci-dessus}}{=} \bigcap_{\lambda \in Sp(u)} (\operatorname{Ker} (u-\lambda Id_E)^p)^\perp = \bigcap_{\lambda \in Sp(u)} \operatorname{Im} (u-\lambda Id_E)^p$.

$$\underline{E'^\perp = \bigcap_{\lambda \in Sp(u)} \operatorname{Im} (u-\lambda Id_E)^p}.$$

Soit $\lambda \in Sp(u)$. Notons que $Im(u-\lambda Id_E)^p$ est stable par u.

Rappelons que u et $(u-\lambda Id_E)^p$ commutent.

Soit $x \in Im(u-\lambda Id_E)^p$. $\exists t \in E$, $(u-\lambda Id_E)^p(t) = x$.

$u(x) = [u \circ (u-\lambda Id_E)^p](t) = [(u-\lambda Id_E)^p \circ u](t) = (u-\lambda Id_E)^p(u(t)) \in Im(u-\lambda Id_E)^p$.

$\forall x \in Im(u-\lambda Id_E)^p$, $u(x) \in Im(u-\lambda Id_E)^p$. $\underline{\underline{Im(u-\lambda Id_E)^p \text{ est stable par } u.}}$

Soit $x \in E'^{\perp}$. $x \in \bigcap_{\lambda \in Sp(u)} Im(u-\lambda Id_E)^p$.

$\forall \lambda \in Sp(u)$, $x \in Im(u-\lambda Id_E)^p$; $\forall \lambda \in Sp(u)$, $u(x) \in Im(u-\lambda Id_E)^p$.

Alors $u(x) \in \bigcap_{\lambda \in Sp(u)} Im(u-\lambda Id_E)^p = E'^{\perp}$. $\underline{\underline{E'^{\perp} \text{ est stable par } u.}}$

b) $\forall (x,y) \in E^2$, $\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell C_n^\ell < u^\ell(x), u^{n-\ell}(y) > = 0$

$\forall (x,y) \in E''^2$, $\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell C_n^\ell < u''^\ell(x), (u'')^{n-\ell}(y) > = 0$; u'' est bien n-symétrique.

Soit $\mathcal{B}''$ une base orthonormale de E''. Notons A'' la matrice de u'' dans $\mathcal{B}''$.

A'' est n-symétrique. D'après l'un des rappels initiaux, A'' admet au moins une valeur propre σ dans $\mathbb{C}$.

Comme A'' est n-symétrique σ appartient à $\mathbb{R}$ d'après II Q 6 b).

Alors $\sigma \in Sp_{\mathbb{R}} A''$ donc $\sigma \in Sp\, u''$

$\exists x \in E''$, $x \neq 0_E$ et $u''(x) = \sigma x$. $x \neq 0_E$ et $u(x) = \sigma x$. σ est une valeur propre de u et x est un vecteur propre associé.

$x \in Ker(u-\sigma Id_E) \subset Ker(u-\sigma Id_E)^p \subset E'$.

Ainsi $x \in E'' \cap E' = E'^{\perp} \cap E' = \{0_E\}$ et $x = 0_E$! On obtient une légère contradiction qui montre que $\dim E'' \neq 0$ est impossible.

Alors $\dim E'' = 0$. $E'' = \{0_E\}$. $E'^{\perp} = \{0_E\}$. $E' = E'^{\perp\perp} = \{0_E\}^{\perp} = E$. $\underline{\underline{E' = E.}}$

(Q7) a) $u^r \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\operatorname{Ker} u^r \neq E$.

u est nilpotent donc $\exists r' \in \mathbb{N}^{(*)}$, $u^{r'} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $\operatorname{Ker} u^{r'} = E$.

Posons encore $q = \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Ker} u^{\ell} = \operatorname{Ker} u^{\ell+1}\}$.

$E = \operatorname{Ker} u^{r'} \subset \operatorname{Ker} u^q = E$; $\operatorname{Ker} u^q = E$.

$\operatorname{Ker} u^r \subsetneq \operatorname{Ker} u^q$ donc nécessairement $r < q$. Alors $\operatorname{Ker} u^r \subsetneq \operatorname{Ker} u^{r+1}$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} u^{r+1} - \operatorname{Ker} u^r$.

$u^r(x) \neq 0_E$ et $u^{r+1}(x) = 0_E$. $\forall k \in [\![r+1, +\infty[\![$, $\operatorname{Ker} u^{r+1} \subset \operatorname{Ker} u^{\ell}$ donc $\forall k \in [\![r+1, +\infty[\![$, $u^{\ell}(x) = 0_E$.

Ainsi $\exists x \in E$, $u^r(x) \neq 0_E$ et $\forall k \in [\![r+1, +\infty[\![$, $u^{\ell}(x) = 0_E$.

b) n est pair. $r = \left[\frac{n+1}{2}\right] = \frac{n}{2}$. $n = 2r$.

$${}^tXCX = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} C_n^{\ell}\, {}^t(A^{\ell}X)\, A^{n-\ell}X \underset{\substack{\uparrow \\ u^{\ell}(x)=0_E \text{ si } \ell \geq r+1}}{=} \sum_{\ell=0}^{\boxed{r}} (-1)^{\ell} C_n^{\ell}\, {}^t(A^{\ell}X)\, A^{n-\ell}X .$$

Notons que si $k \in [\![0, r-1]\!]$: $k < r$; $2r-k > r$; $n-k > r$; $A^{n-k}X = 0$.

Ainsi ${}^tXCX = (-1)^r C_{2r}^{r}\, {}^t(A^rX)\, A^{2r-r}X$.

$C = 0$ donc ${}^tXCX = 0$ et ainsi ${}^t(A^rX)A^rX = 0$. Alors $\langle u^r(x), u^r(x)\rangle = 0$.

$\|u^r(x)\| = 0$; $u^r(x) = 0_E$!!

Si n est pair il est impossible que $u^r \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

c) n est impair. $r = \left[\frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1}{2}$; $n = 2r-1$.

$A^{\ell+1}X = 0$ si $\ell \geq r$

$${}^t(AX)CX = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} C_n^{\ell}\, {}^tX\, {}^tA^{\ell+1}A^{n-\ell}X = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} C_n^{\ell}\, {}^t(A^{\ell+1}X)\, A^{n-\ell}X \underset{\downarrow}{=} \sum_{\ell=0}^{r-1} (-1)^{\ell} C_n^{\ell}\, {}^t(A^{\ell+1}X)\, A^{n-\ell}X$$

Si $k \in [\![0, r-2]\!]$, $n-k = 2r-1-k \geq 2r-1-(r-2) = r+1$ et $A^{n-k}X = 0$.

Finalement ${}^t(AX)CX = (-1)^{r-1} C_n^{r-1}\, {}^t(A^rX)\, A^{n-(r-1)} = (-1)^{r-1} C_{2r-1}^{r-1}\, {}^t(A^rX) A^rX$

Comme $C=0$: ${}^t(A^rX)A^rX = 0$.

Ceci donne alors, comme dans b), $u^r(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc une contradiction.

d) Les contradictions de b) et c) indiquent que $u^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Si u est nilpotent et si $r = \left[\frac{n+1}{2}\right]$: $u^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Partie IV

Q1 Notons T et N les matrices de θ et v dans la base orthonormale $\mathcal{B}$.

$T \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $A = T + N$.

T est symétrique car c'est la matrice d'un endomorphisme symétrique dans une base orthonormale donc ${}^tT = T$.

$\theta \circ v = v \circ \theta$ donc $TN = NT$. $v^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $N^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = 0_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$.

II Q5 indique alors que A est $\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\right)$-symétrique.

Si n est impair $2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1 = 2\left(\frac{n+1}{2}\right)-1 = n$; A est n-symétrique.

Supposons n pair. $2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1 = 2\frac{n}{2}-1 = n-1$; A est $(n-1)$-symétrique

II Q3 donne alors A $((n-1)+1)$-symétrique ; A est encore n-symétrique.

Dans les deux cas A est n-symétrique.

Comme A est la matrice de u dans la base orthonormale $\mathcal{B}$: u est n-symétrique.

Q2 Supposons u $(2r-1)$-symétrique, alors A est $(2r-1)$-symétrique.
D'après II Q3, A est $2r$-symétrique ; u également.

Si $r \in \mathbb{N}^*$ et si u est $(2r-1)$-symétrique alors u est $(2r)$-symétrique.

Q3 a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u-\lambda Id_E)^p$

$(u-\lambda Id_E)^p(u(x)) = ((u-\lambda Id_E)^p \circ u)(x) = (u \circ (u-\lambda Id_E)^p)(x) = u((u-\lambda Id_E)^p(x))$.

$(u-\lambda Id_E)^p(u(x)) = u(0_E) = 0_E$; $u(x) \in \mathrm{Ker}(u-\lambda Id_E)^p$.

$\mathrm{Ker}(u-\lambda Id_E)^p$ est stable par u.

b) Posons $s = \dim F_\lambda$. La matrice de $\theta_\lambda = \lambda Id_{F_\lambda}$ dans une base orthonormale quelconque de F_λ est λI_s qui est une matrice symétrique.
Ainsi θ_λ est un endomorphisme symétrique de F_λ.

$\theta_\lambda \circ v_\lambda = \lambda Id_{F_\lambda} \circ v_\lambda = \lambda v_\lambda = v_\lambda \circ (\lambda Id_{F_\lambda}) = v_\lambda \circ \theta_\lambda$.

θ_λ commute avec v_λ.

u est n-symétrique donc u_λ est également n-symétrique.

Alors $v_\lambda = u_\lambda - \lambda Id_{F_\lambda}$ est n-symétrique (III Q2).

$\forall x \in F_\lambda$, $v_\lambda^p(x) = (u_\lambda - \lambda Id_{F_\lambda})^p(x) = (u-\lambda Id_E)^p(x) = 0_E$ car $F_\lambda = \mathrm{Ker}(u-\lambda Id_E)^p$.

Ainsi v_λ est nilpotent.

v_λ est nilpotent et n-symétrique. III Q7 indique alors que si $r = [\frac{n+1}{2}]$,
$v_\lambda^r = 0_{\mathcal{L}(F_\lambda)}$. Finalement $v_\lambda^{[\frac{n+1}{2}]} = 0_{\mathcal{L}(F_\lambda)}$.

c) On suppose que u est n-symétrique et on se propose de trouver deux endomorphismes θ et v de E tels que :

$u = \theta + v$, θ est symétrique, $\theta \circ v = v \circ \theta$ et $v^{[\frac{n+1}{2}]} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Visiblement on sait faire sur F_λ ; comme $E = \overset{\perp}{\bigoplus}_{\lambda \in Sp(u)} F_\lambda$ tous les espoirs sont permis !!

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de u. $E = \overset{\perp}{\bigoplus}_{i \in [[1,s]]} F_{\lambda_i}$

Pour tout $i \in [[1,s]]$, considérons une base orthonormale $\mathcal{B}_i$ de F_{λ_i}.

Comme $E = \overset{\perp}{\underset{i\in[\![1,p]\!]}{\bigoplus}} F_{\lambda_i}$, $\hat{\mathcal{B}} = {}$" $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$" est une base orthonormale de E.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ notons u_i l'endomorphisme induit par u sur F_{λ_i}.

Posons encore $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $v_i = u_i - \lambda_i \, Id_{F_{\lambda_i}}$ et $\theta_i = \lambda_i \, Id_{F_{\lambda_i}}$.

D'après b), pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, θ_i est un endomorphisme symétrique de F_{λ_i} qui commute avec v_i et $v_i^{[\frac{n+1}{2}]} = 0_{\mathcal{L}(F_{\lambda_i})}$.

Un endomorphisme de E est entièrement déterminé par les images des éléments de $\hat{\mathcal{B}}$ par cet endomorphisme.

Considérons donc l'endomorphisme v (resp. θ) qui pour tout i dans $[\![1,p]\!]$ coïncide avec v_i (resp. θ_i) sur tous les éléments de $\mathcal{B}_i$.

Montrons que : $u = \theta + v$, θ est symétrique, $\theta \circ v = v \circ \theta$ et $v^{[\frac{n+1}{2}]} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$.

θ et θ_i (resp. v et v_i) coïncident sur les éléments de $\mathcal{B}_i$.

Alors $\theta + v$ et $\theta_i + v_i$ (resp. $\theta \circ v$ et $\theta_i \circ v_i$; resp. $v \circ \theta$ et $v_i \circ \theta_i$) coïncident sur les éléments de $\mathcal{B}_i$

Notons que $\theta_i + v_i = u_i$ et que $\theta_i \circ v_i = v_i \circ \theta_i$.

Alors peut-on dire que $\theta + v$ et u (resp. $\theta \circ v$ et $v \circ \theta$) coïncident sur les éléments de $\mathcal{B}_i$.

Finalement $\theta + v$ et u (resp. $\theta \circ v$ et $v \circ \theta$) coïncident sur les éléments de la base $\hat{\mathcal{B}} = {}$" $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$" de E.

Donc $\underline{u = \theta + v}$ et $\underline{\theta \circ v = v \circ \theta}$.

Soit $i \in [\![1,p]\!]$. $v_i^{[\frac{n+1}{2}]} = 0_{\mathcal{L}(F_{\lambda_i})}$. Ainsi les images par $v_i^{[\frac{n+1}{2}]}$ des éléments de $\mathcal{B}_i$ sont nulles.

Alors les images par $v^{[\frac{n+1}{2}]}$ des éléments de $\mathcal{B}_i$ sont nulles.

Donc les images par $v^{[\frac{n+1}{2}]}$ des éléments de $\hat{\mathcal{B}}$ sont nulles ce qui donne $\underline{v^{[\frac{n+1}{2}]} = 0_{\mathcal{L}(E)}}$

Il ne reste plus qu'à montrer que θ est symétrique.

Posons $\hat{B} = (t_1, \dots, t_p)$.

Soit $(k, \ell) \in [\![1, p]\!]^2$. Montrons que $\langle \theta(t_k), t_\ell \rangle = \langle t_k, \theta(t_\ell) \rangle$.

$\exists (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $t_k \in F_{\lambda_i}$ et $t_\ell \in F_{\lambda_j}$.

1er cas... $i = j$. $\langle \theta(t_k), t_\ell \rangle = \langle \theta_i(t_k), t_\ell \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \theta_i \text{ est symétrique}}}{=} \langle t_k, \theta_i(t_\ell) \rangle = \langle t_k, \theta(t_\ell) \rangle$.

2ème cas... $i \neq j$.

Alors F_{λ_i} et F_{λ_j} sont orthogonaux. Or $t_k \in F_{\lambda_i}$, $\theta(t_k) \in F_{\lambda_i}$, $t_\ell \in F_{\lambda_j}$ et $\theta(t_\ell) \in F_{\lambda_j}$ donc $\langle \theta(t_k), t_\ell \rangle = 0 = \langle t_k, \theta(t_\ell) \rangle$.

Ainsi $\forall (k, \ell) \in [\![1, p]\!]^2$, $\langle \theta(t_k), t_\ell \rangle = \langle t_k, \theta(t_\ell) \rangle$.

Soit $(x, y) \in E^2$. $\exists (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $\exists (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, $x = \sum_{k=1}^{p} x_k t_k$ et $y = \sum_{\ell=1}^{p} y_\ell t_\ell$

$\langle \theta(x), y \rangle = \langle \sum_{k=1}^{p} x_k \theta(t_k), \sum_{\ell=1}^{p} y_\ell t_\ell \rangle = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{p} x_k y_\ell \langle \theta(t_k), t_\ell \rangle = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{p} x_k y_\ell \langle t_k, \theta(t_\ell) \rangle$

$\langle x, \theta(y) \rangle = \langle \sum_{k=1}^{p} x_k t_k, \sum_{\ell=1}^{p} y_\ell \theta(t_\ell) \rangle = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{p} x_k y_\ell \langle t_k, \theta(t_\ell) \rangle = \langle \theta(x), y \rangle$.

Donc $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle \theta(x), y \rangle = \langle x, \theta(y) \rangle$. θ est symétrique.

Si u est n-symétrique il existe deux endomorphismes θ et v de E tels que :
$u = \theta + v$, θ symétrique, $\theta \circ v = v \circ \theta$ et $v^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(Q4) D'après Q2 si u est $(2r-1)$-symétrique alors u est $2r$-symétrique.

Réciproquement supposons u $2r$-symétrique. Alors il existe deux endomorphismes θ et v de E tels que :
$u = \theta + v$, θ symétrique, $\theta \circ v = v \circ \theta$ et $v^{\left[\frac{2r+1}{2}\right]} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Notons que $v^{\left[\frac{2r+1}{2}\right]} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donne $v^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$ qui donne $v^{\left[\frac{2r-1+1}{2}\right]} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Alors u et v sont deux endomorphismes de E tels que :
$u = \theta + v$, θ symétrique, $\theta \circ v = v \circ \theta$ et $v^{\left[\frac{2r-1+1}{2}\right]} = 0_{\mathcal{L}(E)}$; u est $(2r-1)$-symétrique.

u $(2r-1)$ symétrique $\Leftrightarrow$ u $(2r)$-symétrique.

(Q5) Pour $p=2$ et $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$$\sum_{\ell=0}^{2}(-1)^\ell C_2^\ell ({}^tA)^\ell A^{2-\ell} = A^2-2\,{}^tAA+{}^tA^2.$$

$$\sum_{\ell=0}^{3}(-1)^\ell C_3^\ell ({}^tA)^\ell A^{3-\ell} = A^3-3\,{}^tAA^2+3\,{}^tA^2A-{}^tA^3.$$

$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ et ${}^tA^2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$. $A^3=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$; ${}^tA^3=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$.

${}^tAA=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$. ${}^tAA^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$ et ${}^tA^2A={}^t({}^tAA^2)=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$.

Alors $A^2-2{}^tAA+{}^tA^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}\neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

$A^3-3A^2{}^tA+3A{}^tA^2-{}^tA^3=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0_{M_2(\mathbb{R})}$.

A est 3-symétrique mais pas 2-symétrique.

Ainsi u $(2r+1)$-symétrique ne donne pas nécessairement u $2r$-symétrique.