PROBLÈME 1

PARTIE I : Quelques généralités.

H est un espace vecoriel sur $\mathbb{R}$ et Φ un produit scalaire sur H. E est un sous-espace vectoriel de H et u une application linéaire de E dans H vérifiant les propriétés suivantes :

i) $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(x,u(y)) = \Phi(u(x),y)$

ii) $\forall x \in E,\ \Phi(x,u(x)) \geqslant 0$

iii) $\forall x \in E,\ \Phi(x,u(x)) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

b étant un élément de H on s'intéresse à l'équation :

$$y \in E \quad \text{et} \quad u(y) = b \quad \text{(I)}$$

Dans tout le problème on fait l'hypothèse que l'équation (I) admet au moins une solution dans E, notée y_0. On se propose d'approcher y_0 par un élément d'un sous-espace V de E.

Q1 Démontrer que u est injective et donc que y_0 est la seule solution de (I).

Q2 Pour tout élément (x,y) de E^2, on pose $< x, y >= \Phi(u(x),y)$.

Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E. On note $\|.\|$ la norme associée.

Dans la suite lorsque l'on parle d'orthogonalité c'est au sens du produit scalaire $< .,. >$.

Q3 Soit V un sous-espace vectoriel de E.

On appelle solution approchée dans V de l'équation (I), ou encore pseudo-solution dans V de (I), tout élément z de V tel que :

$$\|z - y_0\| = \operatorname*{Min}_{y\in V} \|y - y_0\|.$$

a) Utiliser le cours pour montrer que si E est de dimension finie (I) admet une pseudo-solution et une seule.

b) On revient au cas général. On suppose qu'il existe un élément z de V tel que $z - y_0$ soit orthogonal à V.

Montrer que z est une pseudo-solution de (I) dans V (écrire, pour y dans V, $y - y_0 = (y - z) + (z - y_0)$, Pyt fait le reste).

Montrer que z est l'unique pseudo-solution de (I) dans V (... $z' - y_0 = (z' - z) + (z - y_0)$...).

Q4 Ici E est de dimension quelconque mais V est un sous-espace vectoriel de E de dimension n ($n \geqslant 1$).

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base quelconque de V.

a) Montrer que la matrice $M = (< e_i, e_j >)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible (partir de $MX = 0$...).

b) Soit $z = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} z_j\, e_j$ un élément de V de matrice Z dans $\mathcal{B}$.

Montrer que $z - y_0$ est orthogonal à V si et seulement si $MZ = C$ où $C = \begin{pmatrix} \Phi(e_1,b) \\ \Phi(e_2,b) \\ \vdots \\ \Phi(e_n,b) \end{pmatrix}$.

c) En déduire que (I) admet une pseudo-solution dans V et une seule.

PARTIE II : Application.

---

a et b sont deux $\boxed{\text{applications}}$ continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose en plus que a est strictement positive sur $[0,1]$ (ou sur $]0,1[$ pour les esthètes...)

$\mathcal{S}$ est l'ensemble des applications f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables et telles que :

$$-f'' + af = b, f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0.$$

Q1 Montrer qu'un élément de $\mathcal{S}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

Q2 H est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel de H constitué des applications f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

$\forall (f,g) \in H^2,\ \Phi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$. Φ est un produit scalaire sur H.

Pour tout élément f de E on pose : $u(f) = -f'' + af$.

a) Montrer que u est une application linéaire de E dans H.

b) Pour f et g éléments de E, exprimer $\Phi(u(f), g)$ à l'aide d'une intégrale où n'interviennent que les fonctions a, f, f', g et g' $(...\int f'g' + afg)$.

c) Montrer que u vérifie les conditions i), ii) et iii) de la partie I.

Ainsi f est élément de $\mathcal{S}$ si et seulement si f est un élément de E vérifiant $u(f) = b$. Nous noterons (II) cette équation.

$\boxed{\text{Dans la suite } \forall x \in [0,1],\ a(x) = b(x) = 1}$.

Q3 Montrer qu'il existe un triplet de réels et un seul (α, β, γ), tel que l'application f_0 définie par : $\forall x \in [0,1], f_0(x) = \alpha\, e^x + \beta\, e^{-x} + \gamma$ soit solution de (II) (c'est à dire soit élément de $\mathcal{S}$).

Q4 n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in [0,1],\ e_k(x) = \sin(k\pi x)$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille d'éléments de E.

b) i et j sont deux éléments de $[\![1,n]\!]$. Calculer $\Phi(e_i, e_j)$, $< e_i, e_j >$ et $\Phi(e_i, b)$.

c) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille libre de E.

d) On pose $V = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Déterminer l'unique pseudo-solution z dans V de l'équation (II).

Q5 **Facultatif**. Ecrire un programme en TP4 qui calcule et affiche $z(x)$ et $f_0(x) - z(x)$ pour $x = \frac{k}{10}$, k décrivant $[\![0,10]\!]$. L'utilisateur fournit n. Ce programme doit impérativement contenir une fonction qui calcule $f_0(x)$ (à partir de x) et une fonction qui calcule $z(x)$ (à partir de n et x).
