PRELIMINAIRE

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\big(p(X>k-1)-p(X>k)\big) = \sum_{k=1}^{n} k\,p(X>k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\,p(X>k)$ $\quad k\to k+1$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)p(X>k) - \sum_{k=1 \text{ ou } 0}^{n} k\,p(X>k) = \sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)-k]\,p(X>k) - n\,p(X>n)$

Finalement : $$\underline{\underline{\sum_{k=1}^{n} k\,p(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} p(X>k) - n\,p(X>n)}}$$

Remarque.. Ce résultat est la base de la démonstration de :

E(X) existe $\Leftrightarrow$ la série de terme général $p(X>n)$ converge (en cas d'existence rappelons que : $E(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p(X>k)$)

PARTIE I c'est cette partie que j'ai refaite

Q1) $(p,s)\in\mathbb{N}^{*2}$. Pour construire une suite strictement croissante de p éléments de $[\![1,s]\!]$

1 → on choisit p éléments de $[\![1,s]\!]$

2 → on les ordonne dans l'ordre croissant

1er cas.. si $p>s$: card $\mathcal{S}_s = 0$!

2ème cas.. Supposons $p\le s$. Il y a C_s^p manières de choisir p éléments de $[\![1,s]\!]$ et une seule manière de les ordonner dans l'ordre croissant

Il y a donc C_s^p suites strictement croissantes de p éléments de $[\![1,p]\!]$.

Donc si $p\le s$: card $\mathcal{S}_s = C_s^p$.

Q2) * Soit $(c_1,c_2,\dots,c_p)\in\mathcal{C}_q$. $(c_1,c_2,\dots,c_p)\in\mathbb{N}^p$ et $1\le c_1\le c_2\le\dots\le c_p\le q$.

Posons $(d_1,d_2,\dots,d_p)=\phi((c_1,c_2,\dots,c_p)) = (c_1,c_2+1,c_3+2,\dots,c_p+p-1)$.

Montrons que : $(d_1,d_2,\dots,d_p)\in\mathcal{S}_{p+q-1}$. Notons que : $\forall i\in[\![1,p]\!],\ d_i=c_i+i-1$.

- Clairement : $(d_1,d_2,\dots,d_p)\in\mathbb{N}^p$.
- $\forall i\in[\![1,p-1]\!],\ d_{i+1}-d_i = c_{i+1}+(i+1-1)-[c_i+(i-1)] = c_{i+1}-c_i+1 \underset{c_{i+1}\ge c_i}{\ge} 1>0$!

donc $d_1<d_2<d_3<\dots<d_p$. Or $d_1=c_1\ge 1$ et $d_p=c_p+p-1 \underset{c_p\le q}{\le} q+p-1=p+q-1$

donc $1\le d_1<d_2<\dots<d_p\le p+q-1$ et : $(d_1,d_2,\dots,d_p)\in\mathcal{S}_{p+q-1}$

Ceci achève de prouver que $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p)) \in \mathcal{S}_{p+q-1}$ si $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathcal{C}_q$.

<u>ϕ est une application de $\mathcal{C}_q$ dans $\mathcal{S}_{p+q-1}$.</u>

Montrons que ϕ est bijective c'est à dire que tout élément de $\mathcal{S}_{p+q-1}$ admet un antécédent et un seul par ϕ dans $\mathcal{C}_q$.

Soit $(d_1,d_2,\dots,d_p) \in \mathcal{S}_{p+q-1}$. Montrons que : $\underline{\underline{\exists ! (c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathcal{C}_q, \phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(d_1,d_2,\dots,d_p)}}$

<u>Analyse / Unicité / Injectivité</u> !

Supposons que : $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathcal{C}_q$ et $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(d_1,d_2,\dots,d_p)$.

Alors $(c_1,c_2+1,\dots,c_p+p-1)=(d_1,d_2,\dots,d_p)$. $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $c_i+i-1=d_i$

$\underline{\underline{\forall i \in [\![1,p]\!],\ c_i=d_i+1-i}}$

Donc $(c_1,c_2,\dots,c_p)=(d_1,d_2+1-2,d_3+1-3,\dots,d_p+1-p)$

D'où l'unicité de $(c_1,c_2,\dots,c_p)$ élément de $\mathcal{C}_q$ tel que $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(d_1,d_2,\dots,d_p)$

(d'où l'injectivité de ϕ).

<u>Synthèse / Existence / Surjectivité</u>.

Soit $(d_1,d_2,\dots,d_p) \in \mathcal{S}_{p+q-1}$. $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_p \leq p+q-1$ et $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $d_i \in \mathbb{N}$.

<u>Posons</u> $(c_1,c_2,\dots,c_p)=(d_1,d_2+1-2,d_3+1-3,\dots,d_p+1-p)$ c'est à dire que :

$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $c_i=d_i+1-i$

Montrons alors que : $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathcal{C}_q$ et $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(d_1,d_2,\dots,d_p)$.

$\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $c_{i+1}-c_i=d_{i+1}+1-i-1-d_i-1+i=d_{i+1}-d_i-1$

Or $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $d_{i+1}-d_i>0$; mieux $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $d_{i+1}-d_i \geq 1$ ($d_{i+1}-d_i$ est un entier)

Donc $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $c_{i+1}-c_i=d_{i+1}-d_i-1 \geq 0$; $\forall i \in [\![1,p-1]\!]$, $c_{i+1} \geq c_i$.

Par conséquent : $1 \leq d_1=c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p=d_p+1-p \leq p+q-1+1-p=q$;

$1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq q$; de plus $c_1,c_2,\dots,c_p$ sont des entiers (car les d_i le sont)

Donc $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathbb{N}^p$ et $1 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_p \leq q$. $(c_1,c_2,\dots,c_p) \in \mathcal{C}_q$.

De plus : $\phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(c_1,c_2+1,\dots,c_p+p-1)=(d_1,d_2+1-2+1,d_3+1-3+2,\dots,d_p+1-p+p-1)$

$\phi((c_1,c_2,\dots,c_p))=(d_1,d_2,d_3,\dots,d_p)$

$(c_1,c_2,\dots,c_p)$ est un antécédent de $(d_1,d_2,\dots,d_p)$ par ϕ dans $\mathcal{C}_q$ ... fin de la synthèse.

Ceci achève de prouver que ϕ est bijective.

$\mathcal{E}_q$ et $\mathcal{D}_{p+q-1}$ sont alors équipotents. $\operatorname{card} \mathcal{E}_q = \operatorname{card} \mathcal{D}_{p+q-1} \underset{\substack{\uparrow \\ p+q-1 \geq p \text{ et } Q1}}{=} C_{p+q-1}^{p}$

Donc $\underline{\operatorname{card} \mathcal{E}_q = C_{p+q-1}^{p}}$.

Remarques 1. Ceci est à mettre en relation avec $\Gamma_q^p = \operatorname{card}\{(t_1,t_2,\dots,t_q)\in\mathbb{N}^q \mid t_1+t_2+\dots+t_q = p\}$

à méditer 2. C_{p+q-1}^{p} est aussi le nombre d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,q]\!]$.

PARTIE II — Tirages SANS remise.

(Q1) L'univers Ω est l'ensemble des N-listes sans répétition de l'ensemble $[\![1,N]\!]$.

Donc $\underline{\operatorname{card} \Omega = N!}$

Soit $n \in [\![0,N-1]\!]$.

Si $n=0$: $p(X_N > n) = p(X_N > 0) = 1 = \dfrac{1}{(0+1)!}$. Supposons $n \geq 1$.

tirages sans remise !!

$\underline{\{X_N > n\}}$ est réalisé si et seulement si les $n+1$ premiers tirages donnent une suite strictement croissante ; les $N-(n+1)$ tirages suivants étant constitués avec les $N-(n+1)$ numéros non encore sortis.

Par conséquent : $p(X_N > n) = \dfrac{1}{N!}\, \underbrace{C_N^{n+1}}_{\text{nombre de suites strictement croissantes de } n+1 \text{ éléments de } [\![1,N]\!]}\, \underbrace{(N-(n+1))!}_{\text{nb. de choix des } N-(n+1) \text{ jetons sortant aux } N-(n+1) \text{ derniers tirages}}$

Donc $p(X_N > n) = \dfrac{1}{N!}\,\dfrac{N!}{(n+1)!\,(N-n-1)!} \times (N-n-1)! = \dfrac{1}{(n+1)!}$

Finalement : $\forall n \in [\![0,N-1]\!],\ p(X_N > n) = \dfrac{1}{(n+1)!}$

Notons que : $\underline{p(X_N > N) = 0}$ (X_N prend ses valeurs dans $[\![1,N]\!]$).

Bien évidemment : $\underline{\forall n \in [\![N+1,+\infty[\![,\ p(X_N > n) = 0.}$

(Q2). $X_N(\Omega) = [\![1,N]\!]$.

Soit $k \in [\![1,N]\!]$. $p(X_N = k) = p(X_N > k-1) - p(X_N > k)$

Notons que $k-1 \in [\![0,N-1]\!]$. Donc $p(X_N = k) = \dfrac{1}{(k-1+1)!} - p(X_N > k)$.

Distinguons alors deux cas :

Si $k \neq N$: $p(X_N > k) = \dfrac{1}{(k+1)!}$ et si $k = N$: $p(X_N > k) = 0$.

Autrement, pour $k \neq N$: $p(X_N=k) = \frac{1}{(k-1+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$;

pour $k = N$: $p(X_N=k) = \frac{1}{(k-1+1)!} - 0 = \frac{1}{k!} = \frac{1}{N!}$

Finalement : $\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ p(X_N=k) = \frac{k}{(k+1)!}$ et $p(X_N=N) = \frac{1}{N!}$.

$$E(X_N) = \sum_{k=1}^{N} k\, p(X_N=k) \underset{\text{préliminaire}}{=} \sum_{k=0}^{N-1} p(X_N>k) - N\,p(X_N>N) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)!} - N \times 0$$

préliminaire.

$$E(X_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}.$$

Q3 $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$; $e - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \right) = \lim_{N \to +\infty} E(X_N)$.

$$\lim_{N \to +\infty} E(X_N) = e - 1$$

Q4 Soit $k \in \mathbb{N}^*$

La suite $(p(X_N=k))_{N \geq 3}$ est constante à partir d'un certain rang !

$\forall N \in [\![3, +\infty[\![\cap [\![k+1, +\infty[\![$: $p(X_N=k) = \frac{k}{(k+1)!}$; $\lim_{N \to +\infty} p(X_N=k) = \frac{k}{(k+1)!}$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{N \to +\infty} p(X_N=k) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Pour montrer qu'il existe une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(X=k) = \lim_{N \to +\infty} p(X_N=k)$ il suffit de prouver que :

$g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $k \mapsto \frac{k}{(k+1)!}$ est une loi de probabilité ; c'est à dire que :

- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g(k) \in [0,1]$.
- $\sum_{k=1}^{+\infty} g(k) = 1$

Le premier point est clair. Montrons le second.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{p} g(k) = \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(p+1)!}$$

donc $\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p} g(k) = \lim_{p\to+\infty}\left(1-\frac{1}{(p+1)!}\right)=1$; $\sum_{k=1}^{+\infty} g(k)=1$

g est une loi de probabilité.

Soit X une var de loi g.

X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $p(X=k)=\frac{k}{(k+1)!}=\lim_{N\to+\infty} p(X_N=k)$

Remarque.- $(X_N)_{N\geq 3}$ converge en loi vers X.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. $k\,p(X=k)\geq 0$ et $k\,p(X=k)=\frac{k^2}{(k+1)!}=\frac{k(k+1)-(k+1)+1}{(k+1)!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}+\frac{1}{(k+1)!}$

La série de terme général $k\,p(X=k)$ est alors convergente, et donc absolument convergente (car à termes positifs) comme combinaison linéaire de trois séries convergentes.

donc 1 → $E(X)$ existe

2 → $E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!}$

$E(X)=e-(e-1)+(e-1-1)=e-1$

$E(X)=e-1=\lim_{N\to+\infty}E(X_N)$! Le soufflé retombe très vite ! OK ? Voir l'algorithmique à la fin.

PARTIE III

Désormais les tirages se font **avec** remise.

Q1 Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$.

card $\{(\bar u_1,\bar u_2,\dots,\bar u_n)\in[\![1,N]\!]^n \mid \bar u_1\le\bar u_2\le\dots\le\bar u_n\}$ = card $\{(\bar u_1,\bar u_2,\dots,\bar u_n)\in\mathbb{N}^n \mid 1\le\bar u_1\le\bar u_2\le\dots\le\bar u_n\le N\}$

donc card $\{(\bar u_1,\bar u_2,\dots,\bar u_n)\in[\![1,N]\!]^n \mid \bar u_1\le\bar u_2\le\dots\le\bar u_n\} = C_{n+N-1}^{n}$ ← $\bar u_i$: valeurs u_i : de toute sorte sans doute des var...

↑ QI Q2

Notons encore qu'il y a N^n manières de faire n tirages avec remise.

Par conséquent : $v_n=p(u_1\le u_2\le\dots\le u_n)=\frac{C_{n+N-1}^{n}}{N^n}$

Dans la suite nous posons $v_1=1=\dots=C^{1}_{1+N-1}/N^1$!

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\frac{C_{n+N-1}^{n}}{N^n}$.

(Q2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$C_{N+n-1}^{n} = C_{N+n-1}^{N-1} = \frac{(N+n-1)(N+n-2)\dots(N+n-1-(N-1)+1)}{(N-1)!} = \frac{1}{(N-1)!}\prod_{k=1}^{N-1}(N+n-k)$$

Or $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, $\quad N+n-k \underset{n\to+\infty}{\sim} n$; $\quad C_{N+n-1}^{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{N-1}}{(N-1)!}$

Donc les suites $\left(C_{N+n-1}^{n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\dfrac{n^{N-1}}{(N-1)!}\right)_{n\geq 1}$ sont équivalentes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = C_{n+N-1}^{n} / N^n \sim \frac{1}{(N-1)!}\,\frac{n^{N-1}}{N^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(n^3 v_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{(N-1)!}\,\frac{n^{N+2}}{N^n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(N-1)!}\,e^{(N+2)\ln n - n\ln N} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(N-1)!}\,e^{n\left[(N+2)\frac{\ln n}{n} - \ln N\right]} = 0$$

$\left\{\begin{array}{l} -\ln N < 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0 \end{array}\right.$

$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow n^3 v_n \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n^3}$ et... $\quad 0 \leq n v_n \leq \dfrac{1}{n^2}$!

La série de terme général $\frac{1}{n^3}$ (resp. $\frac{1}{n^2}$) étant convergente, les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général v_n (resp. $n v_n$) converge.

cl... la série de terme général v_n (resp. $n v_n$) converge.

$\forall p \in \mathbb{N}^* - \{1\},\quad \sum\limits_{n=1}^{p-1} w_n = \sum\limits_{n=1}^{p-1}(v_n - v_{n+1}) = v_1 - v_p = 1 - v_p$

$\lim\limits_{p\to+\infty} v_p = 0$ car la série de terme général v_n converge ; donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{p-1} w_n = 1$

cl... la série de terme général $w_n = v_n - v_{n+1}$ converge et : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n = 1$.

(Q3) Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Notons A'_r l'événement : r est le plus petit entier tel que $u_r > u_{r+1}$

$A'_r = \{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r\} \setminus \{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r \leq u_{r+1}\}$

Comme $\{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r \leq u_{r+1}\} \subset \{u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r\}$: $p(A'_r) = p(u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r) - p(u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_r \leq u_{r+1})$

$\forall r \in \mathbb{N}^*$, $p(A'_r) = v_r - v_{r+1} = \omega_r$.

En particulier : $p\left(\bigcup_{r=1}^{+\infty} A'_r\right) = \sum_{r=1}^{+\infty} p(A'_r) = \sum_{r=1}^{+\infty} \omega_r = 1$.

événements 2 à 2 disjoints

$\bigcup_{r=1}^{+\infty} A'_r$ est donc un événement quasi-certain ; il est donc quasi-certain d'avoir l'existence d'un plus petit r tel que $u_r > u_{r+1}$ (car il est quasi-impossible d'avoir une suite croissante, au sens large, de résultats). Ceci autorise alors à parler de la variable aléatoire Z_N donnant le plus petit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que : $u_r > u_{r+1}$.

Notons que : $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(Z_N = r) = p(A'_r) = \omega_r = v_r - v_{r+1}$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

Le préliminaire donne : $\sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=0}^{m-1} p(Z_N > n) - m\, p(Z_N > m)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(Z_N > n) = p(u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_{n+1}) = v_{n+1}$

$p(Z_N > 0) = 1 = v_1 = v_{0+1}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(Z_N > n) = v_{n+1}$.

Par conséquent : $\sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=0}^{m-1} v_{n+1} - m\, v_{m+1} = \sum_{n=1}^{m} v_n - m\, v_{m+1}$

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=1}^{m} v_n - m\, v_{m+1}$.

Rappelons que la série de terme général $m\, v_m$ converge ; donc $\lim_{m \to +\infty} (m\, v_m) = 0$ ou $\lim_{m \to +\infty} [(m+1) v_{m+1}] = 0$.

Par conséquent : $\lim_{m \to +\infty} m\, v_{m+1} = \lim_{m \to +\infty} \left[\frac{m}{m+1} \times (m+1) v_{m+1}\right] = 1 \times 0 = 0$.

La série de terme général v_n étant convergente il vient alors :

$\lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} n\, p(Z_N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$. Ceci prouve que la série de terme général

$n\, p(Z_N = n)$ est convergente et donc absolument convergente (car à termes positifs) et de somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$

Finalement <u>$E(Z_N)$ existe et vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.</u>

(Q4) a) Montrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I ET que : $\forall x\in I,\ f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n}\,\frac{1}{(1+x)^{N+n}}$

- C'est clair pour $n=0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n\in\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$f^{(n)}$ est une fonction rationnelle sur I ; $f^{(n)}$ est donc dérivable sur I ; f est donc $n+1$ fois dérivable sur I.

$\forall x\in I,\ f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n}(1+x)^{-N-n}$; $\forall x\in I,\ f^{(n+1)}(x)=(-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n}(-N-n)(1+x)^{-N-n-1}$

donc $\forall x\in I,\ f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}(n+1)!\ \underbrace{\frac{N+n}{n+1}C_{N+n-1}^{n}}_{C_{N+n}^{n+1}=C_{N+(n+1)-1}^{n+1}}\ \frac{1}{(1+x)^{N+n+1}}=(-1)^{n+1}(n+1)!\ C_{N+(n+1)-1}^{n+1}\ \frac{1}{(1+x)^{N+n+1}}$.

<u>ceci achève la récurrence.</u>

CL.. f est C^∞ sur I et $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in I,\ f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n}\,\frac{1}{(1+x)^{N+n}}$.

b) f est C^∞ sur $[-\frac{1}{N},0]$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre m sur $[-\frac{1}{N},0]$ ($m\in\mathbb{N}^*$).

$$\left|f(-\tfrac{1}{N})-\sum_{n=0}^{m}\frac{(-\frac{1}{N}-0)^n}{n!}f^{(n)}(0)\right|\le\frac{|-\frac{1}{N}-0|^{m+1}}{(m+1)!}\max_{t\in[-\frac{1}{N},0]}|f^{(m+1)}(t)|.$$

$f(-\frac{1}{N})=\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^N}$; $\frac{(-\frac{1}{N}-0)^0}{0!}f^{(0)}(0)=1$; $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{(-\frac{1}{N}-0)^n}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n}{N^n n!}(-1)^n n!\, C_{N+n-1}^{n}\frac{1}{(1+0)^{N+n}}$;

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{(-\frac{1}{N}-0)^n}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{C_{N+n-1}^{n}}{N^n}=v_n$.

$\max_{t\in[-\frac{1}{N},0]}|f^{(m+1)}(t)|=\max_{t\in[-\frac{1}{N},0]}\left|(-1)^{m+1}(m+1)!\,C_{N+m+1-1}^{m+1}\frac{1}{(1+t)^{N+m+1}}\right|=(m+1)!\,C_{N+m}^{m+1}\underbrace{\max_{t\in[-\frac{1}{N},0]}\frac{1}{|1+t|^{N+m+1}}}_{\frac{1}{(1-\frac{1}{N})^{N+m+1}}}$.

donc $\max|f^{(m+1)}(t)|=(m+1)!\,C_{N+m}^{m+1}\frac{1}{(1-1/N)^{N+m+1}}$.

En remplaçant dans l'inégalité ci-dessus :

$$\left|\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^N}-1-\sum_{n=1}^{m} v_n\right| \leq \frac{1}{N^{m+1}}\frac{1}{(m+1)!}(m+1)!\,C_{N+m}^{m+1}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}}=\frac{C_{N+m+1-1}^{m+1}}{N^{m+1}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}}$$

donc $\left|\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^N}-1-\sum_{n=1}^{m} v_n\right| \leq \frac{v_{m+1}}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}}$.

En notant que : $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{v_{m+1}}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}}=0$ * nous aurons alors :

$\lim\limits_{m\to+\infty}\left|\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^N}-1-\sum_{n=1}^{m} v_n\right|=0$ ou : $\lim\limits_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m} v_n=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^N}-1$

ce qui donnera : $E(Z_N)=\sum_{n=1}^{+\infty} v_n=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^N}-1$. Ne reste plus qu'à montrer *

$$\frac{v_{m+1}}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}}\sim\frac{1}{(N-1)!}\frac{(m+1)^{N-1}}{N^{m+1}}\times\left(\frac{N}{N-1}\right)^{N+m+1}=\frac{1}{(N-1)!}\left(\frac{N}{N-1}\right)^N\frac{(m+1)^{N-1}}{(N-1)^{m+1}}$$

Ne reste donc plus qu'à montrer que : $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{(m+1)^{N-1}}{(N-1)^{m+1}}=0$

Or : $\frac{(m+1)^{N-1}}{(N-1)^{m+1}}=e^{(N-1)\ln(m+1)-(m+1)\ln(N-1)}=e^{(m+1)\left[(N-1)\frac{\ln(m+1)}{m+1}-\ln(N-1)\right]}=0$

Ceci achève donc de prouver que : $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{v_{m+1}}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N+m+1}}=0$.

$\left\{\begin{array}{l}-\ln(N-1)<0 \text{ et}\\ \lim\limits_{m\to+\infty}\frac{\ln(m+1)}{m+1}=0\end{array}\right.$ $(N\geq 3)$.

$$\lim_{N\to+\infty}E(Z_N)=\lim_{N\to+\infty}\left[e^{-N\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)}-1\right]=e-1$$

$\lim\limits_{N\to+\infty}\left[-N\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)\right]=1$ car $-N\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)\sim -N\left(-\frac{1}{N}\right)=1$

donc $\lim\limits_{N\to+\infty}E(Z_N)=e-1$.

Q5 Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$p(Z_N = k) = v_k - v_{k+1}$.

$$v_k = \frac{C_{N+k-1}^{k}}{N^k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{(N+k-1)^k}{k!} \times \frac{1}{N^k} = \frac{1}{k!}\left(1+\frac{k-1}{N}\right)^k \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!}$$

donc $\underbrace{\lim_{N\to+\infty} v_k}_{!} = \frac{1}{k!}$. $\lim_{N\to+\infty} p(Z_N = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = g(k)$!

g étant une loi de probabilité (II Q4) il est clair que l'on peut trouver une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(Z = k) = \lim_{N\to+\infty} p(Z_N = k)$.

Remarque.. Pour N grand II Q4 et III Q5 montrent qu'avec remise ou sans remise c'est la même chose ! Alors on la remet, non ?! Q6 → p.14

PARTIE IV

Q1.. $k \in [\![1, N]\!]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $k < u_{i+1}$ signifie que les tirages $2, 3, \ldots, n+1$ ont amené un numéro strictement supérieur à k.

Si $k = N$ la probabilité correspondante est nulle.

Si $k < N$ la probabilité est $\left(\frac{N-k}{N}\right)^n$

Dans les deux cas la probabilité cherchée est $\left(\frac{N-k}{N}\right)^n$.

Notons T_1 la v.a.r. égale au numéro obtenu au premier tirage. (En fait $T_1 = u_1$!?)

$$p(A_n) = \sum_{k=1}^{N} p(A_n \cap T_1 = k) = \sum_{k=1}^{N} p(A_n / T_1 = k)\, p(T_1 = k) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{N-k}{N}\right)^n \frac{1}{N}$$

donc $p(A_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n$

(Q2) Notons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n$!

$\forall k \in [\![1,N]\!],\ |1-\frac{k}{N}|<1$, donc pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, la série de terme général $(1-\frac{k}{N})^n$ converge ; la série de terme général x_n est donc convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-\left(1-\frac{k}{N}\right)} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$$

$$\underline{\underline{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.}}$$

(Q3) Notons B_r l'événement r est le plus petit élément de $\mathbb{N}^*$ tel que $u_{r+1} \leq \min(u_1,u_2,\dots,u_r)$.
Il s'agit encore de prouver que : $p\left(\bigcup_{r=1}^{+\infty} B_r\right) = \sum_{r=1}^{+\infty} p(B_r) = 1$

Si $r=1$: $p(B_1) = p(u_2 \leq u_1)$

Si $r \geq 2$ B_r est réalisé si et seulement si $\begin{cases} u_2 > \min(u_1) \\ u_3 > \min(u_1,u_2) \\ \dots\dots\dots \\ u_r > \min(u_1,u_2,\dots,u_r) \\ u_{r+1} \leq \min(u_1,u_2,\dots,u_r) \end{cases}$

donc B_r est réalisé si et seulement si $\begin{cases} u_2 > u_1 \\ u_3 > u_1 \\ \dots\dots \\ u_r > u_1 \\ u_{r+1} \leq u_1 \end{cases}$

donc B_r " $= \{\forall i \in [\![2,r]\!],\ u_1 < u_i\} - \{\forall i \in [\![2,r+1]\!],\ u_1 < u_i\}$ "

B_r " $= \{\forall i \in [\![1,r-1]\!],\ u_1 < u_{i+1}\} - \{\forall i \in [\![1,r]\!],\ u_1 < u_{i+1}\}$ " $= A_{r-1} \setminus A_r$

Comme $A_r \subset A_{r-1}$: $p(B_r) = p(A_{r-1}) - p(A_r) = x_{r-1} - x_r$

$\forall r \in [\![2,+\infty[\![,\ p(B_r) = x_{r-1}-x_r$ et $p(B_1) = p(u_2 \leq u_1) = 1 - p(u_2 > u_1) = 1 - p(A_1)$

$\forall r \in [\![2,+\infty[\![,\ p(B_r) = x_{r-1}-x_r$ et $p(B_1) = 1 - x_1 = x_0 - x_1$

Finalement : $\underline{\underline{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ p(B_r) = x_{r-1}-x_r.}}$

Il ne reste donc plus qu'à prouver que : $\sum_{r=1}^{+\infty}(x_{r-1}-x_r) = 1$

ici : $\sum_{r=1}^{p}(x_{r-1}-x_r) = x_0 - x_p = 1 - x_p$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et :

$\lim_{p\to+\infty} x_p = \lim_{p\to+\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^p\right] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 0 = 0$ $\quad$ ($\forall k\in[\![1,N]\!]$, $|1-\frac{k}{N}|<1$).

Il est donc quasi-certain de pouvoir trouver un plus petit entier strictement positif r tel que : $u_{r+1}\le \inf(u_1,u_2,\dots,u_r)$. Ceci autorise à parler de la variable aléatoire T_N prenant la valeur de ce plus petit entier.

Notons encore que : $\underline{\forall r\in\mathbb{N}^*,\ p(T_N=r) = x_{r-1}-x_r}$.

Q4 $\forall r\in\mathbb{N}^*$, $r\,p(T_N=r)\ge 0$.

Pour prouver que $E(T_N)$ existe il suffit alors de montrer que la série de terme général $r\,p(T_N=r)$ converge c'est à dire que : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r)$ existe.

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r) = \sum_{r=0}^{n-1} p(T_N>r) - n\,p(T_N>n)$ (préliminaire).

$\forall r\in\mathbb{N}^*$, $p(T_N>r) = p(u_2>\inf(u_1)\cap u_3>\inf(u_1,u_2)\cap\dots\cap u_{r+1}>\inf(u_1,u_2,\dots,u_r))$

$\forall r\in\mathbb{N}^*$, $p(T_N>r) = p(\{\forall i\in[\![2,r+1]\!],\ u_1<u_i\}) = p(\{\forall i\in[\![1,r]\!],\ u_1<u_{i+1}\})$

$\forall r\in\mathbb{N}^*$, $p(T_N>r) = x_r$. Ceci vaut encore pour $r=0$ car $p(T_N>0)=1=x_0$.

Finalement $\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r) = \sum_{r=0}^{n-1} x_r - n\,x_n}$

ok ?

Montrons que : $\lim_{n\to+\infty} n\,x_n = 0$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\,x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n\left(1-\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} n\left(1-\frac{k}{N}\right)^n$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $n\,x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} e^{n\left[\ln(1-\frac{k}{N})+\frac{\ln n}{n}\right]}$

$\forall k\in[\![1,N-1]\!]$, $\ln(1-\frac{k}{N})<0$ donc $\forall k\in[\![1,N-1]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} e^{n\left[\ln(1-\frac{k}{N})+\frac{\ln n}{n}\right]} = 0$.

Finalement : $\lim_{n\to+\infty} n\,x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} 0 = 0$.

Rappelons que la série de terme général x_n converge et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\sum_{r=1}^{n} r\,p(T_N=r)\right] = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\sum_{r=0}^{n-1} x_r - n x_n\right] = \sum_{r=0}^{+\infty} x_r = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$

Cl.. $E(T_N)$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge et est à termes positifs ; par conséquent la suite de ses sommes partielles admet pour limite $+\infty$.

Donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\right) = +\infty$.

Cl.. $\lim\limits_{N\to+\infty} E(T_N) = +\infty$. $\quad \left(E(T_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sim \ln(N) \right)$.

(Q5). Rappelons que Q4 nous a donné : $\forall n\in\mathbb{N},\ p(T_N>n) = x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n$

x_n est donc une somme de Riemann pour tout $n\in\mathbb{N}$! Soit $n\in\mathbb{N}$.

Posons $\varphi : t\mapsto (1-t)^n$. φ est continue sur $[0,1]$.

$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right)$, donc $\lim\limits_{N\to+\infty} p(T_N>n) = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt$

$\lim\limits_{N\to+\infty} p(T_N>n) = \int_0^1 (1-t)^n\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ \lim\limits_{N\to+\infty} p(T_N>n) = \frac{1}{n+1}$.

Donc si $n\in\mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{N\to+\infty} p(T_N=n) = \lim\limits_{N\to+\infty} [p(T_N>n-1)-p(T_N>n)] = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \lim\limits_{N\to+\infty} [p(T_N=n)] = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$.

Ici encore prouver qu'il existe une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ revient à prouver que : $h : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R},\ n \mapsto \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ est une loi de probabilité.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ h(n) = \frac{1}{n(n+1)} \in [0,1]$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} h(n)\right) = \lim\limits_{p\to+\infty} \left[\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right] = \lim\limits_{p\to+\infty} \left(1-\frac{1}{p+1}\right) = 1$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} h(n) = 1$. Ceci achève de prouver que h est une loi de probabilité.

Il existe donc une v.a. T à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ p(T=k) = \lim\limits_{N\to+\infty} p(T_N=k)$