SUJET 21

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. p appartient à $[\![0, p]\!]$.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique que nous noterons, si nécessaire, $< .,. >_n$ (ou plus simplement $< .,. >$ si nous ne le confondons pas avec celui de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini dans la partie II).

Rappelons que : $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < X, Y >_n = {}^tXY = {}^tYX$.

Nous noterons $\|.\|_n$ la norme associée (ou $\|.\|$ si...).

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques (resp. anti-symétriques).

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétriques et dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tMM = M\,{}^tM = I_n$ (ou M inversible et $M^{-1} = {}^tM$).

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p.

∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p.

Le but du problème est de calculer la distance, au sens de la norme de Schur définie dans la partie II, d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, Δ_p et ∇_p.

PARTIE I UN EXEMPLE DE DÉCOMPOSITION POLAIRE

Q1 Rappeler ce que vous savez sur la réduction d'une matrice symétrique et réelle H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q2 Montrer que si A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $H = {}^tAA$ est un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (noter que $HX = \lambda X$ donne ${}^tX\,{}^tAAX = \cdots$).

Q3 Ici : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. On pose $H = {}^tAA$ (cela ressemble à $I + 5J$...).

a) Calculer H et construire une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de H.

Trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale C telle que $C = P^{-1}HP = {}^tPHP$.

b) Trouver une matrice diagonale D à coefficients positifs ou nuls telle que $D^2 = C$.

c) On pose $S = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$. Justifier rapidement que S est une matrice inversible de $\mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.

On pose $U = AS^{-1}$.

Montrer que ${}^tUU = S^{-1}HS^{-1}$ et que U est une matrice orthogonale telle que $A = US$ (ne pas travailler sur des tableaux !). Calculer U.

PARTIE II CALCUL DE LA DISTANCE DE A À $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ET À $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

On pose $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ < A, B > = \operatorname{tr}({}^tAB)$ (c'est la trace du produit de la transposée de A par B).

On rappelle que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que $\forall (U,V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\text{tr}({}^tU) = \text{tr}(U)$ et $\text{tr}(UV) = \text{tr}(VU)$.

Q1 a) Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $< A, A >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$.

b) Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q2 Rappeler le théorème de “meilleure approximation”.

Q3 a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), < .,. >)$.

b) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A - {}^tA)\|$.

Déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

Q4 Calculer $d(A, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où A est la matrice de la partie I. Déduire de I $\|A\|$ et calculer alors $d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$.

PARTIE III THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION POLAIRE

Q1 a) Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et que l'inverse d'un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q2 W est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont positifs ou nuls, telle que ${}^tWW = D^2$.

Pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$, on note C_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de W.

a) Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. Montrer que ${}^tC_iC_i = d_i^2$ et calculer ${}^tC_iC_j$ pour $i \neq j$.

Montrer que si d_i est nul alors C_i est nulle.

b) On pose $I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid d_i \neq 0\}$. Montrer que si I n'est pas vide, $\left(\dfrac{1}{d_i}\, C_i\right)_{i\in I}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ C_i = d_i\, F_i.$$

c) Soit F la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$.

Dire pourquoi F est une matrice orthogonale et justifier l'égalité $W = FD$ (au pire “travailler avec des éléments génériques”).

Q3 A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $H = {}^tAA$ est un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe un élément P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls tels que $\Delta = {}^tPHP = {}^t({}^tPAP)({}^tPAP)$.

En déduire qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls telle que ${}^t({}^tPAP)({}^tPAP) = D^2$.

b) Utiliser Q2. pour montrer qu'il existe une matrice orthogonale F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PFD{}^tP = (PF{}^tP)(PD{}^tP).$$

En déduire qu'il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = US$.

PARTIE IV DISTANCE DE A À $\mathcal{O}_n$.

On est prié de relire les résultats contenus dans III Q 1 a).

Q1 M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et R une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\|RM\| = \|M\|$ ($\|.\|$ est la norme de II).

b) Montrer que $\|MR\| = \|M\|$ (on rappelle qur $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$).

► Dans la suite de cette partie A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A = US$ avec $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

Q2 a) Montrer que si Ω appartient à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\,\Omega\|$.

En déduire que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

b) Montrer que $d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ (partir de $\|S - \Omega\|$ et s'inspirer de ce qui précède).

Q3 On pose $D = \operatorname{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

a) Montrer que $\forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \|D - \Omega\|^2 = \|D\|^2 - 2\operatorname{tr}(D\Omega) + n = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k^2 - 2\operatorname{tr}(D\Omega) + n.$

b) Soit $\Omega = (\omega_{ij})$ un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \omega_{ij} \in [-1, 1]$.

En déduire que $\operatorname{tr}(D\Omega) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$.

c) Montrer que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$ et que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

d) Calculer $d(A, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où A est la matrice de I.

PARTIE V DISTANCE DE A À Δ_p.

p est un élément de $[\![0, n]\!]$. Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1 Montrer qu'il existe un élément q_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que pour tout élément q de $[\![q_0, +\infty[\![$ $A - \frac{1}{q}\,I_n$ soit inversible.

En déduire que $d(A, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = 0$.

Q2 Calculer $d(A, \Delta_p)$.

PARTIE VI DISTANCE DE A À ∇_p.

Q1 **Théorème de Courant et Fischer**

S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ consituée de vecteurs propres de S respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n. On suppose que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$.

k est un élément de $[\![1, n]\!]$ et $\mathcal{E}_k$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k.

On se propose de montrer que : $\lambda_k = \operatorname*{Max}\limits_{F \in \mathcal{E}_k} \operatorname*{Inf}\limits_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX}$.

a) On pose $F_k = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_k)$. Soit $X = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i\, C_i$ un élément non nul de F_k. Montrer que $\dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \geqslant \lambda_k$.

Montrer que $\displaystyle\inf_{X\in F_k-\{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX}$ existe et vaut λ_k.

Utiliser ce qui précède pour montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\},\ \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \geqslant \lambda_n$.

b) Soit F un élément de $\mathcal{E}_k$. Montrer que la dimension de $F \cap \text{Vect}(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)$ est supérieure ou égale à 1 (on pourra majorer la dimension de la somme).

c) Montrer que si X est un vecteur non nul de $F \cap \text{Vect}(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)$ alors $\dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leqslant \lambda_k$.

Montrer que $\displaystyle\inf_{X\in F-\{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX}$ existe et est inférieur ou égal à λ_k. Conclure.

d) Facultatif   Montrer que $\lambda_k = \displaystyle\max_{F\in\mathcal{E}_k} \min_{X\in F-\{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX}$.

Dans toute la suite A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et p est un élément de $\mathbb{N}$ strictement inférieur à r.

∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p.

Q2 a) Montrer que $\text{Ker}\,{}^tAA = \text{Ker}\,A$. En déduire que ${}^tAA$ est de rang r.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ${}^tAA$ respectivement associés à des valeurs propres μ_1, μ_2, ..., μ_n qui vérifient : $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \cdots = \mu_n = 0$ (à un petit abus près lorsque $r = n$).

c) On pose : $\forall i \in [\![1, r]\!],\ Y_i = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_i}}\, AX_i$. Montrer que $(Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on complétera en une base orthonormée $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si nécessaire.

d) Montrer que $A = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}\, Y_k{}^tX_k = \sum\limits_{k=1}^{r} \sqrt{\mu_k}\, Y_k{}^tX_k$ (on pourra utiliser la base orthonormée $(X_1, X_2, \dots, X_n)$).

Montrer que $(Y_k\,{}^tX_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices de rang 1.

Q3 On pose $N = \sum\limits_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k}\; Y_k\,{}^tX_k$. Montrer que N appartient à ∇_p et que $\|A - N\| = \sqrt{\sum\limits_{k=p+1}^{n} \mu_k} = \sqrt{\sum\limits_{k=p+1}^{r} \mu_k}$

Q4 Soit q un élément de $[\![0, p]\!]$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang q.

a) Justifier rapidement l'existence d'une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de la matrice ${}^t(A - M)(A - M)$ respectivement associés à des valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n qui vérifient : $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n \geqslant 0$.

Calculer $\|A - M\|$.

On pose $G = \text{Ker}\,M \cap \text{Im}({}^tAA)$ et dans la suite de la question, k est un élément de $[\![1, r - q]\!]$.

b) Montrer que $\dim G \geqslant r - q$.

c) Montrer que si F un sous-espace vectoriel de G de dimension k : $\alpha_k \geqslant \displaystyle\inf_{X\in F-\{0\}} \frac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX}$.

Montrer que $\dim(G \cap \text{Vect}(X_1, X_2, \dots, X_{k+q})) \geqslant k$ et en déduire que $\alpha_k \geqslant \mu_{k+p}$.

Montrer enfin que : $\|A - M\| \geqslant \|A - N\|$.

d) En déduire $d(A, \nabla_p)$. Et pour $p \in [\![r, n]\!]$? pour $p = 0$?

Q5 On reprend l'exemple de la partie I. Calculer $d(A, \nabla_p)$ pour tout élément p de $[\![0, 3]\!]$.