# PARTIE I

**Q1** Soit $H$ une matrice symétrique (et réelle) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1°/ $H$ est diagonalisable

2°/ Il existe une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $H$.

3°/ Il existe une matrice $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\rightarrow$ $P$ est inversible et $P^{-1} = {}^tP$

$\rightarrow$ $D = P^{-1}HP = {}^tPHP$.

**Q2**
- $H = {}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- ${}^tH = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = H$ ; $H$ est symétrique. $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $\lambda$ une valeur propre de $H$. $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $HX = \lambda X$.

${}^tX\,{}^tA\,AX = {}^tXHX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\,{}^tXX = \lambda \langle X, X\rangle_n$. $\lambda = \dfrac{{}^t(AX)AX}{\langle X, X\rangle_n} = \dfrac{\langle AX, AX\rangle_n}{\langle X, X\rangle_n}$

$X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

$\langle AX, AX\rangle_n \geqslant 0$ et $\langle X, X\rangle_n > 0$.

Ainsi $\lambda \geqslant 0$.

Alors $H = {}^tAA$ est symétrique, réelle et ses valeurs propres sont positives.

$\underline{\underline{H = {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}}$.

**Q3** a) $H = {}^tAA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Observons que $H - I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ donc $rg(H - I_3) = 1 < 3$.

Ainsi 1 est valeur propre de $H$ et $\dim SEP(H, 1) = 3 - rg(H - I_3) = 2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $HX = X \Leftrightarrow (H - I_3)(X) = 0 \Leftrightarrow 5x + 5y + 5z = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$.

$SEP(H, 1)$ est le plan vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $x + y + z = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Notons que, par exemple, $SEP(H, 1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$H$ est symétrique et réelle. Elle est donc diagonalisable et ses sous-espaces sont orthogonaux.

Comme $1 \in Sp(H)$ et $\dim SEP(H,1) = 2$, $H$ possède une seconde valeur propre $\alpha$ et $SEP(H,\alpha) = SEP(H,1)^{\perp}$, OK ?

$SEP(H,1)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est orthonormale. Alors $SEP(H,\alpha)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Observons que $H\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6+5+5\\5+6+5\\5+5+6\end{pmatrix} = 16\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Ainsi $\alpha = 16$.

Finalement $Sp\,H = \{1,16\}$, $SEP(H,1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ et $SEP(H,16) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Construisons une base orthogonale de $SEP(H,1)$ ... assez rapidement (on peut aussi utiliser Schmidt).

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in SEP(H,1)$. $X = \begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}$ $(z = -x-y)$.

$X$ est orthogonal à $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ssi $x-y=0$. Alors $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur de $SEP(H,1)$ orthogonal à $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ qui est lui même un vecteur de $SEP(H,1)$.

$\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$ est une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls de $SEP(H,1)$.

Comme $\dim SEP(H,1) = 2$, c'est une base orthogonale de $SEP(H,1)$.

$\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\|_3 = \sqrt{2}$ et $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\|_3 = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. Notons que $\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|_3 = \sqrt{3}$

Alors $\mathcal{B}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale de $SEP(H,1)$ et

$\mathcal{B}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale de $SEP(H,16)$.

Comme $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = SEP(H,1) \overset{\perp}{\oplus} SEP(H,16)$, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $H$ respectivement associés aux valeurs propres $1$, $1$ et $16$.

$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $H$ respectivement associés aux valeurs propres $1$, $1$ et $16$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base B.

1°) $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ 2°) $P^{-1}HP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

3°) P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ car c'est la matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale.

Ainsi si $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, P est orthogonale et $C = P^{-1}HP = {}^tPHP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

b) Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. D est diagonale, ses coefficients sont positifs ou nuls et $D^2 = C$ !

c) $S = PDP^{-1} = PD{}^tP$. $S \in M_3(\mathbb{R})$ et ${}^tS = {}^t(PD{}^tP) = {}^t({}^tP){}^tD{}^tP \overset{D \text{ est diagonale}}{=} PD{}^tP = S$

Ainsi $S \in S_3(\mathbb{R})$. $S = PDP^{-1}$ donc S et D sont semblables.

Alors $Sp(S) = Sp(D) = \{1, 4\}$ ; les valeurs propres de S sont strictement positives.

cela montre alors que S est inversible et $S \in S_3^+(\mathbb{R})$.

$U = AS^{-1} = A(PDP^{-1})^{-1} = A(P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = APD^{-1}P^{-1} = APD^{-1}{}^tP$.

${}^tUU = {}^t(AS^{-1})AS^{-1} = {}^tS^{-1}{}^tAAS^{-1} = ({}^tS)^{-1}HS^{-1} \overset{{}^tS = S}{=} S^{-1}HS^{-1}$. ${}^tUU = S^{-1}HS^{-1}$.

${}^tUU = S^{-1}HS^{-1} = (PDP^{-1})^{-1}H(PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}HPD^{-1}P^{-1} = PD^{-1}D^2D^{-1}P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

$(PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ ; $P^{-1}HP = C = D^2$.

${}^tUU = I_3$ donc $U \in O_3(\mathbb{R})$. De plus $U = AS^{-1}$ donc $A = US$.

Ainsi $A = US$ avec $U \in O_3(\mathbb{R})$ et $S \in S_3(\mathbb{R})$.

$$U = APD^{-1}{}^tP = A\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$U = A\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

# PARTIE II

**Q1** Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien $E$.
Soit $x \in E$.

1° $\min\limits_{y \in F} \|x-y\|$ existe.

2° $\exists ! y \in F$, $\|x-y\| = \min\limits_{y \in F} \|x-y\|$. $y$ est la projection orthogonale de $x$ sur $F$.

**Q2** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est l'orthogonale de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

$\min\limits_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A-S\|$ existe et vaut $\|A-A'\|$ où $A'$ est la projection orthogonale de $A$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \inf\limits_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A-S\| = \min\limits_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A-S\| = \|A-A'\|$.

De même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \|A-A''\|$ où $A''$ est la projection orthogonale de $A$ sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$A = \frac{1}{2}(A+{}^tA) + \frac{1}{2}(A-{}^tA)$. ${}^t\left(\frac{1}{2}(A+{}^tA)\right) = \frac{1}{2}({}^tA+A) = \frac{1}{2}(A+{}^tA)$; $\frac{1}{2}(A+{}^tA) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

${}^t\left(\frac{1}{2}(A-{}^tA)\right) = \frac{1}{2}({}^tA-A) = -\frac{1}{2}(A-{}^tA)$; $\frac{1}{2}(A-{}^tA) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Alors $A = \frac{1}{2}(A+{}^tA) + \frac{1}{2}(A-{}^tA)$ avec $\frac{1}{2}(A+{}^tA) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-{}^tA) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\frac{1}{2}(A+{}^tA)$ est la projection orthogonale de $A$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A-{}^tA)$ est la projection orthogonale de $A$ sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$A' = \frac{1}{2}(A+{}^tA)$ et $A'' = \frac{1}{2}(A-{}^tA)$.

$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|A-A'\| = \|A''\| = \|\frac{1}{2}(A-{}^tA)\|$. $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \|A-A''\| = \|A'\| = \|\frac{1}{2}(A+{}^tA)\|$.

$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A-{}^tA)\|$ et $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A+{}^tA)\|$.

---

**Q3** $d(A, \mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A+{}^tA)\|$. $A' = \frac{1}{2}(A+{}^tA) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\|A'\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tA'A') = \mathrm{Tr}((A')^2) = \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\right) = 8$. $\underline{\underline{d(A, \mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = 2\sqrt{2}}}$.

$d^2(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \|A''\|^2 \underset{\text{Pythagore}}{=} \|A\|^2 - \|A'\|^2 = \mathrm{Tr}(H) - 8 = 18 - 8 = 10$. $\underline{\underline{d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \sqrt{10}}}$.

**Q1** a) Soient $P$ et $Q$ deux éléments de $O_n(\mathbb{R})$.

$${}^t(PQ)PQ = {}^tQ\,{}^tP\,P\,Q = {}^tQ\,I_n\,Q = {}^tQ\,Q = I_n. \text{ De même } PQ\,{}^t(PQ) = I_n.$$

Ainsi $PQ \in O_n(\mathbb{R})$.

${}^tP\,P = I_n$ donc $P$ est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

Alors ${}^tP^{-1}P^{-1} = {}^t({}^tP)\,{}^tP = P\,{}^tP = I_n = {}^tP\,P = {}^tP\,{}^t({}^tP) = P^{-1}\,{}^tP^{-1}$ ; $P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

<u>Le produit de deux éléments de $O_n(\mathbb{R})$ est un élément de $O_n(\mathbb{R})$.</u>

<u>L'inverse d'un élément de $O_n(\mathbb{R})$ est un élément de $O_n(\mathbb{R})$.</u>

b) Soit $P$ un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Posons $Q = P + P = 2P$.

${}^tQQ = {}^t(2P)(2P) = 4\,{}^tP\,P = 4I_n$ ; $Q \notin O_n(\mathbb{R})$.

<u>Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable pour $+$ (et pour $\cdot$) ; $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.</u> <u>Remarque</u>.. On aurait également pu observer que $0_{M_n(\mathbb{R})} \notin O_n(\mathbb{R})$.

**Q2** Posons $W = (w_{ij})$ et ${}^tWW = (\gamma_{ij})$.

a) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\gamma_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} w_{\ell i}\, w_{\ell j} = (w_{1i} \dots w_{ni}) \begin{pmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ \vdots \\ w_{nj} \end{pmatrix} = {}^tC_i\,C_j$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_i\,C_j = \gamma_{ij}$.

Rappelons que $(\gamma_{ij}) = {}^tWW = D^2 = \mathrm{Diag}(d_1^2, d_2^2, \dots, d_n^2)$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_iC_j = \gamma_{ij} = \begin{cases} d_i^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_iC_i = d_i^2$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow {}^tC_iC_j = 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i = 0 \Rightarrow d_i^2 = 0 \Rightarrow {}^tC_iC_i = 0 \Rightarrow \|C_i\|_n^2 = 0 \Rightarrow C_i = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

<u>$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i = 0 \Rightarrow C_i = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.</u>

b) 1^er cas.. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i = 0$. Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit $(F_1, \dots, F_n)$ une base orthonormale quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ :

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = 0 = 0 F_i = d_i F_i$.

2^ème cas.. $I = \{i \in [\![1,n]\!] \mid d_i \neq 0\} \neq \emptyset$.

Posons $\forall i \in I$, $F_i = \frac{1}{d_i} C_i$. $\forall i \in I$, $\langle F_i, F_i \rangle_n = \frac{1}{d_i^2} \langle C_i, C_i \rangle_n = 1$.

$\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle F_i, F_j \rangle_n = \frac{1}{d_i} \frac{1}{d_j} \langle C_i, C_j \rangle_n = 0$.

Par conséquent $(F_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si $I = [\![1,n]\!]$, $(F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = d_i F_i$. Supposons $I \subsetneq [\![1,n]\!]$. Posons $J = [\![1,n]\!] - I$.

Il existe alors une famille orthonormale $(F_i)_{i \in J}$ qui complète $(F_i)_{i \in I}$ en une base orthonormale.

Alors $(F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall i \in I$, $C_i = d_i F_i$. $\forall i \in [\![1,n]\!] - I$, $d_i = 0$ donc $C_i = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0 . F_i = d_i F_i$.

multiplication externe !

Finalement $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = d_i F_i$

Dans tous les cas on a montré qu'il existe une base orthonormale $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $C_i = d_i F_i$.

c) $F$ est une matrice orthogonale car c'est la matrice de passage d'une base orthonormale (la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) à une base orthonormale (la base $(F_1, \dots, F_n)$). Ainsi $F \in O_n(\mathbb{R})$.

Notons $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Rappelons que si $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $RE_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de $R$.

Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = WE_j \underline{\underline{d}} FDE_j = F(d_j E_j) = d_j F E_j = d_j F_j = C_j$.

$j^{\text{ème}}$ colonne de $D$ $\quad$ $j^{\text{ème}}$ colonne de $F$

Donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $WE_j = C_j = (FD)E_j$.

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, les $j^{\text{ème}}$ colonnes de $W$ et $FD$ sont identiques.

Ainsi $\underline{\underline{W = FD}}$.

(Q3) a) $H$ est symétrique, réelle et à valeurs propres positives ou nulles.
Alors il existe une matrice $P$ de $O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ telles que :
$$\begin{cases} \Delta = P^{-1}HP = {}^tPHP \\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ \delta_k \geq 0 \end{cases}.$$

$\Delta = {}^tPHP = {}^tP\,{}^tAAP = {}^tP\,{}^tA\,P\,P^{-1}AP = {}^tP\,{}^tA\,P\,{}^tPAP = {}^t({}^tPAP)({}^tPAP)$

<u>Il existe une matrice $P$ de $O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls et telles que : $\Delta = {}^tPHP = {}^t({}^tPAP)({}^tPAP)$.</u>

Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i = \sqrt{\delta_i}$ et $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Alors $D \in M_n(\mathbb{R})$, $D^2 = \Delta$ et $D$ est diagonale à coefficients positifs ou nuls.

<u>Il existe une matrice diagonale $D$ de $M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls telle que : ${}^t({}^tPAP)({}^tPAP) = D^2$.</u>

b) Posons $W = {}^tPAP$. $W \in M_n(\mathbb{R})$, $W = D^2$ et $D$ est diagonale à coefficients positifs ou nuls.

D'après Q1 : $\exists F \in O_n(\mathbb{R})$, $W = FD$.

Alors ${}^tPAP = FD$ ; $A = PFD\,{}^tP = (PF\,{}^tP)(PD\,{}^tP)$.

$\underline{\underline{A = (PF\,{}^tP)(PD\,{}^tP)}}$. Posons $U = PF\,{}^tP = PFP^{-1}$ et $S = PD\,{}^tP = PDP^{-1}$.

$U$ est le produit de trois éléments de $O_n(\mathbb{R})$ donc c'est un élément de $O_n(\mathbb{R})$.

$S \in M_n(\mathbb{R})$ et ${}^tS = {}^t(PD\,{}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^tD\,{}^tP = P\,{}^tD\,{}^tP \underset{\uparrow\ D \text{ est diagonale}}{=} PD\,{}^tP = S$ ; $S \in S_n(\mathbb{R})$.

$S = PDP^{-1}$, $S$ et $D$ sont semblables donc $Sp(S) = Sp(D) = \{d_1, d_2, \dots, d_n\} \subset \mathbb{R}_+$

Ainsi $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. Alors $\underline{\underline{A = US \text{ avec } U \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } S \in S_n^+(\mathbb{R})}}$.

# PARTIE IV Distance de A à $O_n$

**Q1** a) $\|RM\|^2 = Tr({}^t(RM)RM) = Tr({}^tM\,\underbrace{{}^tR\,R}_{I_n \text{ car } R\in O_n(\mathbb{R})}M) = Tr({}^tMM) = \|M\|^2$.

$\|RM\| = \|M\|$

b) $\|MR\|^2 = Tr({}^t(MR)MR) \underset{\text{"Tr(AB)=Tr(BA)"}}{=} Tr(MR\,{}^t(MR)) = Tr(MR\,{}^tR\,{}^tM) = Tr(M\,{}^tM) \underset{\text{"Tr(AB)=Tr(BA)"}}{=} Tr({}^tMM) = \|M\|^2$

$\|MR\| = \|M\|$.

**Q2** a) Soit $\Omega\in O_n(\mathbb{R})$. $\|A-\Omega\| = \|US-\Omega\| = \|U(S-U^{-1}\Omega)\| \overset{U\in O_n(\mathbb{R})\ +\ Q1}{=} \|S-U^{-1}\Omega\|$.

$\forall \Omega\in O_n(\mathbb{R}),\ \|A-\Omega\| = \|S-U^{-1}\Omega\|$

→ Soit $\Omega\in O_n(\mathbb{R})$. $U\in O_n(\mathbb{R})$ donc $U^{-1}\in O_n(\mathbb{R})$. Alors $U^{-1}\Omega\in O_n(\mathbb{R})$ comme produit de deux éléments de $O_n(\mathbb{R})$

$d(S, O_n(\mathbb{R})) \leq \|S-U^{-1}\Omega\| \leq \|A-\Omega\|$.

$\forall \Omega\in O_n(\mathbb{R}),\ d(S, O_n(\mathbb{R})) \leq \|A-\Omega\|$

Alors $d(S, O_n(\mathbb{R})) \leq \inf\limits_{\Omega\in O_n(\mathbb{R})} \|A-\Omega\| = d(A, O_n(\mathbb{R}))$.

→ Soit $\Omega'\in O_n(\mathbb{R})$. Posons $\Omega = U\Omega'$ ; $\Omega\in O_n(\mathbb{R})$ et $\Omega' = U^{-1}\Omega$.

$d(A, O_n(\mathbb{R})) \leq \|A-\Omega\| = \|S-U^{-1}\Omega\| = \|S-\Omega'\|$.

$\forall \Omega'\in O_n(\mathbb{R}),\ d(A, O_n(\mathbb{R})) \leq \|S-\Omega'\|$ donc $d(A, O_n(\mathbb{R})) \leq d(S, O_n(\mathbb{R}))$.

Finalement $d(A, O_n(\mathbb{R})) = d(S, O_n(\mathbb{R}))$.

Remarque.. On pouvait également obtenir ce résultat en remarquant que $\varphi : O_n(\mathbb{R}) \longmapsto O_n(\mathbb{R})$ est une bijection.
$\Omega \longmapsto U^{-1}\Omega$

b) $\forall \Omega\in O_n(\mathbb{R}),\ \|S-\Omega\| = \|PDP^{-1}-\Omega\| = \|P(D-P^{-1}\Omega P)P^{-1}\|$

Rappelons que $P\in O_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1}\in O_n(\mathbb{R})$. Alors :

$\forall \Omega\in O_n(\mathbb{R}),\ \|S-\Omega\| = \|P(D-P^{-1}\Omega P)P^{-1}\| \underset{P\in O_n(\mathbb{R})}{=} \|(D-P^{-1}\Omega P)P^{-1}\| \underset{P^{-1}\in O_n(\mathbb{R})}{=} \|D-P^{-1}\Omega P\|$.

Posons $\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $\hat{\psi}(\Omega) = P^{-1}\Omega P$ et $\check{\psi}(\Omega) = P\Omega P^{-1}$

$\hat{\psi}$ est une application de $O_n(\mathbb{R})$ dans $O_n(\mathbb{R})$ car le produit de trois éléments de $O_n(\mathbb{R})$ est un élément de $O_n(\mathbb{R})$. $\check{\psi}$ est également une application de $O_n(\mathbb{R})$ dans $O_n(\mathbb{R})$.

De plus $\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $\check{\psi}(\hat{\psi}(\Omega)) = P(P^{-1}\Omega P)P^{-1} = \Omega$ et $\hat{\psi}(\check{\psi}(\Omega)) = P^{-1}(P\Omega P^{-1})P = \Omega$.

$\check{\psi} \circ \hat{\psi} = \hat{\psi} \circ \check{\psi} = Id_{O_n(\mathbb{R})}$. $\hat{\psi}$ est une bijection.

Alors $\{\|D - P^{-1}\Omega P\| ; \Omega \in O_n(\mathbb{R})\} = \{\|D - \Omega\| ; \Omega \in O_n(\mathbb{R})\}$

Donc $\inf\limits_{\Omega \in O_n(\mathbb{R})} \|D - P^{-1}\Omega P\| = \inf\limits_{\Omega \in O_n(\mathbb{R})} \|D - \Omega\|$. Rappelons que $\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $\|S - \Omega\| = \|D - P^{-1}\Omega P\|$.

Alors $\inf\limits_{\Omega \in O_n(\mathbb{R})} \|S - \Omega\| = \inf\limits_{\Omega \in O_n(\mathbb{R})} \|D - \Omega\| =$. Ainsi $\underline{\underline{d(S, O_n(\mathbb{R})) = d(D, O_n(\mathbb{R}))}}$

<u>Remarque</u>. On pouvait obtenir ce résultat en procédant comme dans a) !

Q3 a) Soit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$.

$\|D - \Omega\|^2 = \|D\|^2 - 2\langle D, \Omega\rangle + \|\Omega\|^2 = Tr({}^tDD) - 2Tr({}^tD\Omega) + Tr({}^t\Omega\Omega)$.

$\|D - \Omega\|^2 \underset{\substack{{}^tD = D \\ \Omega \in O_n(\mathbb{R})}}{=} Tr(D^2) - 2Tr(D\Omega) + Tr(I_n) \underset{D^2 = diag(d_1^2, d_2^2, \dots, d_n^2)}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} d_k^2 - 2Tr(D\Omega) + n$

$\underline{\underline{\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}),\ \|D - \Omega\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k^2 - 2Tr(D\Omega) + n.}}$

b) Soit $\Omega = (\omega_{ij})$ un élément de $O_n(\mathbb{R})$. ${}^t\Omega\Omega = I_n$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{ki}\omega_{ki} = 1$. et $(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{ki}\omega_{kj} = 0)$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{ki}^2 = 1$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\omega_{ij}^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{ki}^2 = 1$ ; $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|\omega_{ij}| \leq 1$.

$\underline{\underline{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \omega_{ij} \in [-1, 1].}}$

Posons $L = (\ell_{ij}) = D\Omega$ et $D = (d_{ij})$ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $d_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$$\mathrm{Tr}(D\Omega) = \mathrm{Tr}(L) = \sum_{i=1}^{n} \ell_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\,\omega_{ki} = \sum_{i=1}^{n} d_i\,\omega_{ii}$$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i \geq 0$ et $\omega_{ii} \leq 1$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i\omega_{ii} \leq d_i$.

Alors $\mathrm{Tr}(D\Omega) = \sum_{i=1}^{n} d_i\,\omega_{ii} \leq \sum_{i=1}^{n} d_i$.

$\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(D\Omega) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i$.

c) Soit $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$.

$$\|D-\Omega\|^2 = \sum_{k=1}^{n} d_k^2 - 2\,\mathrm{tr}(D\Omega) + n \geq \sum_{k=1}^{n} d_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} d_k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\|D-\Omega\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} (d_k-1)^2 \underset{\text{ok?}}{=} \mathrm{Tr}\left((D-I_n)^2\right) \underset{D-I_n \text{ est diagonale}}{=} \mathrm{Tr}\left({}^t(D-I_n)(D-I_n)\right) = \|D-I_n\|^2$$

Donc $\|D-\Omega\| \geq \|D-I_n\|$.

$\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R})$, $\|D-I_n\| \leq \|D-\Omega\|$ et $I_n \in O_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\min\limits_{\Omega \in O_n(\mathbb{R})} \|D-\Omega\|$ existe et vaut $\|D-I_n\|$.

Alors $d(D, O_n(\mathbb{R})) = \|D-I_n\|$.

$d(A, O_n(\mathbb{R})) = d(S, O_n(\mathbb{R})) = d(D, O_n(\mathbb{R})) = \|D-I_n\|$.

$$\|A-U\| = \|US-U\| = \|U(S-I_n)\| \underset{U \in O_n(\mathbb{R})}{=} \|S-I_n\| = \|PDP^{-1}-I_n\| = \|P(D-I_n)P^{-1}\| \underset{P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})}{=} \|D-I_n\|.$$

Alors $d(A, O_n(\mathbb{R})) = \|A-U\|$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $A-U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; ${}^t(A-U)(A-U) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

$\|A-U\|^2 = 9$ ; $\|A-U\| = 3$. $d(A, O_3(\mathbb{R})) = 3$. (on pouvait également utiliser $\|D-I\|$...).

# PARTIE V

**Q1** Rappelons que le spectre de A est un ensemble fini ; $Sp\,A \cap \mathbb{R}_+^*$ également.

1er cas.. $Sp\,A \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$. Soit $\lambda_0$ le plus petit élément de $Sp\,A \cap \mathbb{R}_+^*$.

Alors $]0,\lambda_0[ \cap Sp\,A = \emptyset$ ; $\forall \lambda \in ]0,\lambda_0[$, $A - \lambda I_n$ est inversible.

2e cas.. $Sp\,A \cap \mathbb{R}_+^* = \emptyset$. Alors $Sp\,A \cap ]0,+\infty[ = \emptyset$. Soit $\lambda_0$ un élément quelconque de $\mathbb{R}_+^*$ ; $\forall \lambda \in ]0,\lambda_0[$, $A - \lambda I_n$ est inversible.

Dans les deux cas : $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \lambda \in ]0,\lambda_0[$, $A - \lambda I_n$ est inversible.

Posons $q_0 = E(\frac{1}{\lambda}) + 1$. $q_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{1}{\lambda} < q_0$ ; $\frac{1}{q_0} < \lambda$.

$\forall q \in [\![q_0,+\infty[\![$, $0 < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{q_0} < \lambda$. $\forall q \in [\![q_0,+\infty[\![$, $A - \frac{1}{q} I_n$ est inversible.

$\exists q_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall q \in [\![q_0,+\infty[\![$, $A - \frac{1}{q} I_n$ est inversible.

$\underline{\underline{\forall q \in [\![q_0,+\infty[\![,\ A - \frac{1}{q} I_n \in GL_n(\mathbb{R})}}$.

Ainsi $\forall q \in [\![q_0,+\infty[\![$, $0 \leq d(A, GL_n(\mathbb{R})) \leq \|A - (A - \frac{1}{q} I_n)\| = \frac{1}{q} \|I_n\|$.

En faisant tendre $q$ vers $+\infty$ il vient : $0 \leq d(A, GL_n(\mathbb{R})) \leq 0$.

Ainsi $\underline{\underline{d(A, GL_n(\mathbb{R})) = 0}}$.

**Q2** $GL_n(\mathbb{R}) \subset \Delta_p$ donc $d(A, \Delta_p) \leq d(A, GL_n(\mathbb{R}))$.

Alors $0 \leq d(A, \Delta_p) \leq d(A, GL_n(\mathbb{R})) = 0$.

Donc $\underline{\underline{d(A, \Delta_p) = 0}}$.

---

<u>Remarque</u>.. $\forall q \in [\![q_0,+\infty[\![$, $\|A - (A - \frac{1}{q} I_n)\| = \frac{1}{q} \|I_n\|$ et $\lim\limits_{q \to +\infty} \frac{1}{q} \|I_n\| = 0$.

Alors on peut dire que 1°.. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists B \in GL_n(\mathbb{R})$, $\|A - B\| < \varepsilon$.

ou 1°.. $(A - \frac{1}{q} I_n)_{q \geq q_0}$ est une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A.

Ceci exprime que <u>$GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$</u>.

# PARTIE VI

**Q1** a) Soit $X = \sum_{i=1}^{k} x_i C_i$ un élément non nul de $F_k$.

$SX = \sum_{i=1}^{k} x_i SC_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \lambda_i C_i$. Comme $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base orthonormale,

$\langle SX, X\rangle = \sum_{i=1}^{k} (x_i\lambda_i) x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2$ et $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2$.

Alors ${}^tXSX = \langle SX, X\rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_k x_i^2 = \lambda_k \|X\|^2 = \lambda_k\, {}^tXX$.

Ainsi $\frac{{}^tXSX}{{}^tXX} \geqslant \lambda_k$. $\forall X \in F_k - \{0\}$, $\frac{{}^tXSX}{{}^tXX} \geqslant \lambda_k$.

Observons que $C_k \in F_k - \{0\}$ et : $\frac{{}^tC_kSC_k}{{}^tC_kC_k} = \frac{{}^tC_k(\lambda_k C_k)}{{}^tC_kC_k} = \lambda_k \frac{{}^tC_kC_k}{{}^tC_kC_k} = \lambda_k$.

Alors $\lambda_k = \min_{X \in F_k - \{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \inf_{X \in F_k - \{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX}$.

$\inf_{X \in F_k - \{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX}$ existe et vaut $\lambda_k$. (*) omission ... suite après la b)

b) $n \geqslant \dim(F + \mathrm{Vect}(C_k, \dots, C_n)) = \underbrace{\dim F}_{k} + \underbrace{\dim \mathrm{Vect}(C_k, \dots, C_n)}_{n-(k-1)} - \dim(F \cap \mathrm{Vect}(C_k, \dots, C_n))$

$n \geqslant k + n - k + 1 - \dim(F \cap \mathrm{Vect}(C_k, \dots, C_n))$

Ainsi $\dim(F \cap \mathrm{Vect}(C_k, \dots, C_n)) \geqslant k + n - k + 1 - n = 1$.

La dimension de $F \cap \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)$ est supérieure à 1.

(*) suite de a). En appliquant le résultat démontré pour $k = n$ il vient :

$\inf_{X \in F_n - \{0\}} \frac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \lambda_n$. Donc $\forall X \in F_n - \{0\}$, $\frac{{}^tXSX}{{}^tXX} \geqslant \lambda_n$.

Or $F_n = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, $\frac{{}^tXSX}{{}^tXX} \geqslant \lambda_n$.

c) Soit $X = \sum_{i=k}^{n} x_i C_i$ un élément non nul de $F \cap \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)$.

$SX = \sum_{i=k}^{n} x_i \lambda_i C_i$ . ${}^tXSX = \langle X, SX\rangle = \sum_{i=k}^{n} x_i(x_i\lambda_i) = \sum_{i=k}^{n} x_i^2 \lambda_i \leq \lambda_k \sum_{i=k}^{n} x_i^2$.

$(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une BON

Or ${}^tXX = \langle X, X\rangle = \sum_{i=k}^{n} x_i^2$.

Ainsi $\dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leq \dfrac{\lambda_k \sum_{i=k}^{n} x_i^2}{\sum_{i=k}^{n} x_i^2} = \lambda_k$.

Si $X$ est un élément non nul de $F \cap \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)$, $\dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leq \lambda_k$.

$\dim(F \cap \mathrm{Vect}(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)) \geq 1$. Donc $\exists X_0 \in F - \{0\}$, $\dfrac{{}^tX_0SX_0}{{}^tX_0X_0} \leq \lambda_k$.

$\forall X \in F - \{0\}$, $\dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \geq \lambda_n$ (d'après a)). Alors $\left\{ \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} ; X \in F - \{0\} \right\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ ; elle possède une borne inférieure.

Ainsi $\inf_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX}$ existe. De plus $\inf_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leq \dfrac{{}^tX_0SX_0}{{}^tX_0X_0} \leq \lambda_k$.

Par conséquent $\forall F \in \mathcal{E}_k$, $\inf_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leq \lambda_k = \inf_{X \in F_k - \{0\}} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX}$ et $F_k \in \mathcal{E}_k$.

Ceci suffit pour dire que $\lambda_k = \max_{F \in \mathcal{E}_k} \inf_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX}$.

d) Une piste ! Soit $F \in \mathcal{E}_k$.

Remarquer que 1°.- $\inf_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \inf_{X \in F \cap \{X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X'\| = 1\}} {}^tXSX$

2°.- $F \cap \{X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X'\| = 1\}$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

3°.- $X \longmapsto {}^tXSX$ est continue sur $F \cap \{X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X'\| = 1\}$

4°.- Identifier $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$ !

5°.- Conclure avec le cours.

Q2 a) Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ; ${}^tA\,AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ; $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$.

Soit $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$. ${}^tAAX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ; ${}^tX\,{}^tAAX = 0$ ; ${}^t(AX)AX = 0$ ; $\|AX\|^2 = 0$ ; $\|AX\| = 0$.

Alors $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ; $X \in \operatorname{Ker} A$.

Finalement $\underline{\underline{\operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{Ker} A}}$.

$A$ et ${}^tAA$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\operatorname{rg} A = n - \dim \operatorname{Ker} A = n - \dim \operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{rg} {}^tAA$.

$\operatorname{rg} {}^tAA = \operatorname{rg} A$. $\underline{\underline{\operatorname{rg} {}^tAA = r}}$.

b) D'après la première partie ${}^tAA$ est une matrice symétrique dont ses valeurs propres sont positives.

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q$ les valeurs propres distinctes de ${}^tAA$ rangées dans l'ordre décroissant.

$\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_q \geq 0$.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \overset{\perp}{\bigoplus_{i \in [\![1,q]\!]}} \operatorname{SEP}({}^tAA, \gamma_i)$. Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, soit $\mathcal{B}_i$ une base orthonormale de $\operatorname{SEP}({}^tAA, \gamma_i)$.

$\mathcal{B} = \text{"} \bigcup_{i=1}^{q} \mathcal{B}_i \text{"}$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Posons $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des vecteurs propres de ${}^tAA$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, notons $\mu_i$ la valeur propre associée à $X_i$

Comme $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_q$, par construction de $\mathcal{B}$ : $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$.

1er cas.. $r < n$. Alors $0$ est valeur propre de ${}^tAA$ et $\dim \operatorname{SEP}({}^tAA, 0) = n - r$.

Par conséquent
- $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_{q-1} > \gamma_q = 0$
- $\mathcal{B}_q$ contient $n-r$ éléments
- pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $X_i$ est associé à une valeur propre non nulle.

Alors $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \dots = \mu_n = 0$.

2ème cas $r = n$. $0$ n'est pas valeur propre de ${}^tAA$. $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_q > 0$.

Ainsi $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r = \mu_n > 0$

Dans ce deuxième cas $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ${}^tAA$ respectivement associés à des valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ qui vérifient $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \dots = \mu_n = 0$.

c) Soit $(i,j) \in [\![1, r]\!]^2$.

$$\langle Y_i, Y_j \rangle = {}^tY_iY_j = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}}\,{}^t(AX_i)\,\frac{1}{\sqrt{\mu_j}}\,AX_j = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}\sqrt{\mu_j}}\,{}^tX_i\,{}^tAAX_j = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}\sqrt{\mu_j}}\,{}^tX_i(\mu_jX_j)$$

$$\langle Y_i, Y_j \rangle = \frac{\sqrt{\mu_j}}{\sqrt{\mu_i}}\,{}^tX_iX_j = \frac{\sqrt{\mu_j}}{\sqrt{\mu_i}}\langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$ car $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$(Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$ est une famille orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on complète en une base orthonormale $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ ... si nécessaire ← dans le cas où $r < n$.

d) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\mu_\ell}\,(Y_\ell\,{}^tX_\ell)X_i = \sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\mu_\ell}\,\langle X_\ell, X_i \rangle Y_\ell = \sqrt{\mu_i}\,Y_i = AX_i$

$(Y_\ell\,{}^tX_\ell)X_i = Y_\ell({}^tX_\ell X_i) = ({}^tX_\ell X_i)Y_\ell$ $\quad \langle X_\ell, X_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq i \\ 1 & \text{si } \ell = i \end{cases}$

Si $i \in [\![r, n]\!]$ : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\mu_\ell}\,(Y_\ell\,{}^tX_\ell)X_i = \sqrt{\mu_i}\,Y_i = AX_i$.

Si $i \in [\![r+1, n]\!]$ : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\mu_\ell}\,(Y_\ell\,{}^tX_\ell)X_i = \sqrt{\mu_i}\,Y_i = 0 = AX_i$

$\mu_i = 0$ $\quad X_i \in \operatorname{Ker}{}^tAA = \operatorname{Ker} A$.

Finalement $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\mu_\ell}\,(Y_\ell\,{}^tX_\ell)X_i = AX_i$

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\left(\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\mu_\ell}\,Y_\ell\,{}^tX_\ell - A\right)X_i = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Comme $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ on peut alors dire que $\operatorname{Ker}\left(\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\mu_\ell}\,Y_\ell\,{}^tX_\ell - A\right) = M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\mu_\ell}\,Y_\ell\,{}^tX_\ell - A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Finalement $\displaystyle A = \sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\mu_\ell}\,Y_\ell\,{}^tX_\ell = \sum_{\ell=1}^{r} \sqrt{\mu_\ell}\,Y_\ell\,{}^tX_\ell$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$\langle Y_i {}^tX_i, Y_j {}^tX_j \rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t(Y_i {}^tX_i) Y_j {}^tX_j\right) = \mathrm{Tr}\left( X_i ({}^tY_i Y_j) {}^tX_j\right)$.

$\langle Y_i {}^tX_i, Y_j {}^tX_j \rangle = \mathrm{tr}\left( \langle Y_i, Y_j \rangle_n X_i {}^tX_j\right) = \langle Y_i, Y_j \rangle_n \mathrm{Tr}\left(X_i {}^tX_j\right)$.

Si $i \neq j$ : $\langle Y_i, Y_j \rangle_n = 0$ donc $\langle Y_i {}^tX_i, Y_j {}^tX_j \rangle = 0$.

Supposons $i=j$. $\langle Y_i {}^tX_i, Y_j {}^tX_j \rangle = \mathrm{Tr}(X_i {}^tX_i)$. Posons $X_i = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$.

$X_i {}^tX_i = \begin{pmatrix} t_1 t_1 & t_1 t_2 & \dots & t_1 t_n \\ t_2 t_1 & t_2 t_2 & \dots & t_2 t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_n t_1 & t_n t_2 & \dots & t_n t_n \end{pmatrix}$ ; $\mathrm{Tr}(X_i {}^tX_i) = \sum_{\ell=1}^{n} t_\ell^2 = \|X_i\|_n^2 = 1$.

Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle Y_i {}^tX_i, Y_j {}^tX_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

$(Y_k {}^tX_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une famille orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Posons $X_k = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $Y_k = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. $Y_k {}^tX_k = (v_i u_j)$.

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de $Y_k {}^tX_k$ est $u_j Y_k$ ; le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de $Y_k {}^tX_k$ est $\mathrm{Vect}(u_1 Y_k, u_2 Y_k, \dots, u_n Y_k)$ c'est à dire $\mathrm{Vect}(Y_k)$ car $\exists j_0 \in [\![1,n]\!]$, $u_{j_0} \neq 0$ puisque $X_k$ n'est pas nulle. $Y_k$ n'étant pas nulle, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de $Y_k {}^tX_k$ est 1. Ainsi $\mathrm{rg}(Y_k {}^tX_k) = 1$.

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{rg}(Y_k {}^tX_k) = 1$.

Q3 $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mu_k \neq 0$ pour $k \in [\![1,p]\!]$

$\mathrm{Im}\, N = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{p} \sqrt{\mu_k}\, Y_k {}^tX_k\right) \subset \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im}\left(\sqrt{\mu_k}\, Y_k {}^tX_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im}\left(Y_k {}^tX_k\right)$

Ainsi $\dim \mathrm{Im}\, N \leq \dim\left(\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Im}(Y_k {}^tX_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{p} \dim\left(\mathrm{Im}(Y_k {}^tX_k)\right) = \sum_{k=1}^{p} 1 = p$.

Dangereux ?

Alors $\mathrm{rg}\, N \leq p$. Ainsi $N \in \nabla_p$.

$$\|A-N\| = \left\| \sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\mu_\ell}\, Y_\ell\, {}^tX_\ell - \sum_{\ell=1}^{p} \sqrt{\mu_\ell}\, Y_\ell\, {}^tX_\ell \right\| = \left\| \sum_{\ell=p+1}^{n} \sqrt{\mu_\ell}\, Y_\ell\, {}^tX_\ell \right\| = \sqrt{\sum_{\ell=p+1}^{n} (\sqrt{\mu_\ell})^2}$$

$(Y_1{}^tX_1, Y_2{}^tX_2, \dots, Y_n{}^tX_n)$ est une famille orthogonale.

Par conséquent $\|A-N\| = \sqrt{\sum_{\ell=p+1}^{n} \mu_\ell} = \sqrt{\sum_{\ell=p+1}^{r} \mu_\ell}$.

Q4 a) ${}^t(A-M)(A-M)$ est, d'après I, une matrice symétrique de $M_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

Il existe une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ${}^t(A-M)(A-M)$ respectivement associés aux valeurs propres $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$.

En ordonnant les réels $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ dans l'ordre décroissant il est clairement de construire une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de ${}^t(A-M)(A-M)$ respectivement associés à des valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ qui vérifient $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$.

${}^t(A-M)(A-M)$ est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Ainsi $\mathrm{Tr}({}^t(A-M)(A-M)) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell$.

Alors $\|A-M\| = \sqrt{\langle A-M, A-M\rangle} = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^t(A-M)(A-M))} = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell}$.

$\|A-M\| = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell}$.

b) $n \geq \dim(\mathrm{Ker}\, M + \mathrm{Im}({}^tAA)) = \dim \mathrm{Ker}\, M + \dim \mathrm{Im}({}^tAA) - \dim(\mathrm{Ker}\, M \cap \mathrm{Im}\, {}^tAA)$.

$n \geq (n - \mathrm{rg}\, M) + \mathrm{rg}({}^tAA) - \dim G$ ; $\dim G \geq n - q + r - n = r - q$.

$\dim G \geq r - q$.

c) Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $G$ de dimension $k$.

D'après le théorème de Courant et Fischer : $\alpha_k = \max_{F' \in E_k} \inf_{X \in F' - \{0\}} \dfrac{{}^tX({}^t(A-M)(A-M))X}{{}^tXX}$.

Alors $\alpha_k \geq \inf_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tX({}^t(A-M)(A-M))X}{{}^tXX}$

Soit $X \in F - \{0\}$. $X \in \mathrm{Ker}\, M$. Alors $(A-M)X = AX$ et ${}^tX\,{}^t(A-M) = {}^t((A-M)X) = {}^t(AX) = {}^tX\,{}^tA$.

Ainsi $\dfrac{{}^tX({}^t(A-M)(A-M))X}{{}^tXX} = \dfrac{{}^tX\,{}^tAAX}{{}^tXX}$.

Alors $\inf\limits_{X\in F-\{0\}} \dfrac{{}^tX({}^t(A-M)(A-M)X}{{}^tXX} = \inf\limits_{X\in F-\{0\}} \dfrac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX}$.

Ainsi $\underline{\underline{\alpha_k \geqslant \inf\limits_{X\in F-\{0\}} \dfrac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX}}}$.

$\forall i\in[\![1,r]\!], \mu_i\neq 0$
$\forall i\in[\![r+1,n]\!], \mu_i=0$

$\mathrm{Im}\,{}^tAA = \mathrm{Vect}({}^tAAX_1, {}^tAAX_2,\dots,{}^tAAX_n) = \mathrm{Vect}(\mu_1X_1,\mu_2X_2,\dots,\mu_nX_n) = \mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_r)$.

Alors $G\cap\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q}) = \mathrm{Ker}\,M\cap\mathrm{Vect}(X_1,\dots,X_r)\cap\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q})$

$G\cap\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q}) = \mathrm{Ker}\,M\cap\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q})$ $\quad(k+q\leqslant r)$

$n\geqslant \dim(\mathrm{Ker}\,M+\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q})) = \dim\mathrm{Ker}\,M+\dim\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q})-\dim(\mathrm{Ker}\,M\cap\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q}))$

$n\geqslant(n-q)+(k+q)-\dim(\mathrm{Ker}\,M\cap\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q}))$

Alors $\dim(\mathrm{Ker}\,M\cap\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q}))\geqslant k$.

Ainsi $\underline{\underline{\dim(G\cap\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q}))\geqslant k}}$.

On peut alors trouver un sous-espace vectoriel $F$ de $G\cap\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q})$ de dimension $k$.

D'après ce qui précède $\alpha_k\geqslant\inf\limits_{X\in F-\{0\}}\dfrac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX}$. Soit $X$ un élément non nul de $F$.

$X\in\mathrm{Vect}(X_1,X_2,\dots,X_{k+q})$. $\exists(z_1,\dots,z_{k+q})\in\mathbb{R}^{k+q}$, $X=\sum\limits_{i=1}^{k+q}z_iX_i$. ${}^tAAX=\sum\limits_{i=1}^{k+q}z_i\mu_iX_i$.

${}^tX{}^tAAX = \langle X,{}^tAAX\rangle \underset{\uparrow}{=} \sum\limits_{i=1}^{k+q}z_i^2\mu_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k+q}z_i^2\mu_{k+q} = \|X\|^2\mu_{k+q} = {}^tXX\,\mu_{k+q}$.

$(X_1,X_2,\dots,X_n)$ est une base orthonormale

Alors $\forall X\in F-\{0\}$ $\dfrac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX}\geqslant\mu_{k+q}$ ; $\inf\limits_{X\in F-\{0\}}\dfrac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX}\geqslant\mu_{k+q}$.

Ainsi $\underline{\underline{\alpha_k\geqslant\mu_{k+q}}}$.

Ceci vaut pour tout $k$ dans $[\![1,r-q]\!]$.

Alors $\|A-M\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \underset{\uparrow}{\geqslant} \sum\limits_{k=1}^{r-q}\alpha_k \geqslant \sum\limits_{k=1}^{r-q}\mu_{k+q} = \sum\limits_{k=q+1}^{r}\mu_k \underset{\uparrow}{\geqslant} \sum\limits_{k=p+1}^{r}\mu_k = \|A-N\|^2$

$\forall i\in[\![1,n]\!], \alpha_i\geqslant 0$ $\qquad$ $q\leqslant p$ et $\forall i\in[\![1,r]\!], \mu_i>0$

Ainsi $\|A-M\| \geq \|A-N\|$.

d) Nous venons de voir que pour $q \in [\![0,p]\!]$ et pour $M$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang $q$ alors $\|A-M\| \geq \|A-N\|$.

Alors $\forall M \in \nabla_p$, $\|A-M\| \geq \|A-N\|$. Or $N \in \nabla_p$.

Ainsi $\|A-N\| = \min\limits_{M \in \nabla_p} \|A-M\|$ ; $\|A-N\| = d(A, \nabla_p)$.

Finalement $d(A, \nabla_p) = \sqrt{\sum_{k=p+1}^{n} \mu_k} = \sqrt{\sum_{k=p+1}^{r} \mu_k}$.

Si $p \in [\![r, n]\!]$, $A \in \Delta_p$ et $d(A, \nabla_p) = 0$.

Si $p = 0$, $\Delta_p = \{0\}$ ; $d(A, \nabla_p) = \|A\| = \sqrt{Tr({}^tAA)}$

$d(A, \nabla_p) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mu_k}$

Q5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\mu_1 = 16$ et $\mu_2 = \mu_3 = 1$.

Alors $d(A, \nabla_0) = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$d(A, \nabla_1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

$d(A, \nabla_2) = \sqrt{1} = 1$.

$d(A, \nabla_3) = 0$.

Au cahier près :

$\forall p \in [\![0, n]\!]$, $d(A, \nabla_p) = \sqrt{\sum_{k=p+1}^{n} \mu_k}$