SUJET 22

Dans ce qui suit, n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

$< .,. >$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $< .,. >$ la norme associée.

Une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ converge vers un élément L de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \|X_k - L\| = 0$.

Préliminaire

M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constiuée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres γ_1, γ_2, ..., γ_n avec $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n$.

P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ et $D = \mathrm{Diag}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$.

On pose $\rho(M) = \displaystyle\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n} |\gamma_i|$. Notons que $\rho(M) = \displaystyle\operatorname*{Max}_{\gamma\in\mathrm{Sp}\,M} |\gamma|$ et $\rho(M)$ s'appelle le **rayon spectral de** M.

Q1 a) Vérifier que $\rho(M) = \mathrm{Max}(|\gamma_1|, |\gamma_n|)$.

b) Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|MX\| \leqslant \rho(M)\,\|X\|$.

Q2 a) Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \gamma_1\,\|X\|^2 \leqslant < MX, X > \leqslant \gamma_n\,\|X\|^2$.

b) Montrer que les valeurs propres de M sont strictement positives si et seulement si :

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow < MX, X > > 0$.

Q3 On suppose que les valeurs propres de M sont strictement positives.

a) Montrer qu'il existe une matrice symétrique M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives et qui vérifie $M'^2 = M$ (on commencera par établir le résultat pour D).

b) On se propose de montrer l'unicité de M'. Soit M'' une seconde matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives et qui vérifie $M''^2 = M$.

Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales R et S et deux matrices diagonales U et V telle que $M' = RU\,{}^tR$ et $M'' = SV\,{}^tS$.

Montrer que $RU^2\,{}^tR = SV^2\,{}^tS$. En déduire l'existence d'une matrice T telle que $TU^2 = V^2T$. Montrer que $TU = VT$ et que $M' = M''$.

Dans toute la suite B est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, A est une **matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives** et F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pose $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = \dfrac{1}{2} < AX, X > - < B, X >$.

On se propose de montrer que la restriction de f à F admet un minimum atteint en un point et un seul X^* et de construire (dans certain cas...) une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui converge vers X^* et une suite de réels qui converge vers la valeur de ce minimum.

Au lieu de parler du minimum de la restriction de f à F nous parlerons du minimum de f sous la contrainte F.

Partie I : Existence et unicité de X^*

Q1 a) Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X+H) - f(X) = \dfrac{1}{2} < AH, H > + < AX - B, H >$.

b) Montrer que si X est un élément de F tel que $AX - B$ appartienne à $F^{\perp}$, alors f admet en X un minimum sous la contrainte F.

c) Réciproquement on suppose que f admet en X (appartenant à F) un minimum sous la contrainte F.

Soit H un élément de F. Ainsi, pour tout réel λ, $X + \lambda H$ appartient à F non ?

Montrer que pour tout réel λ strictement positif (resp. strictement négatif), $\dfrac{\lambda}{2} < AH, H > + < AX - B, H >$ est un réel positif ou nul (resp. négatif ou nul).

En déduire que $< AX - B, H >= 0$. Conclure.

d) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que f admette en X (appartenant à F) un minimum sous la contrainte F.

Q2 On pose $G = \{AX ; X \in F\}$.

a) Montrer G est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ isomorphe à F, puis que G est un supplémentaire de $F^{\perp}$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) En déduire que f admet un minimum sous la contrainte F et que ce minimum est réalisé en un unique point X^* de F. Donner la valeur de ce minimum.

Q3 On se propose d'étendre le résultat précédent aux sous-espaces affines de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On admet (jusqu'à III Q1 !) qu'il existe une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid CX = 0\}$.

Soit D un éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $F_D = \{Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid CZ = D\}$ et on suppose que F_D contient au moins un élément Z_0.

a) Montrer que $F_D = \{Z_0 + X \,;\, X \in F\}$ et que $\forall X \in F$, $f(Z_0 + X) = \dfrac{1}{2} < AX, X > - < B - AZ_0, X > + f(Z_0)$.

b) Montrer alors que la restriction de f à F_D admet un minimum et qu'il existe un unique élément de F_D qui le réalise.

Partie II : Approximation de $\mathbf{X^*}$ et $\mathbf{f(X^*)}$ dans le cas où F est $\mathcal{M}_{\mathbf{n,1}}(\mathbb{R})$

Dans cette seule partie F est $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. X^* est alors l'unique élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui réalise le minimum de f (sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

On se propose de construire une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui converge vers X^*.

Q1 Montrer que X^* est LA solution de l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$.

Q2 Soit α un réel strictement positif. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ X_{k+1} = X_k + \alpha\,(B - AX_k).$$

a) Prouver que $X^* = X^* + \alpha\,(B - AX^*)$.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \|X_{k+1} - X^*\| \leqslant \rho(I_n - \alpha\,A)\,\|X_k - X^*\|$.

En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \|X_k - X^*\| \leqslant \big(\rho(I_n - \alpha\,A)\big)^k\,\|X_0 - X^*\|$.

b) $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constiuée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n avec $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

Montrer que $\rho(I_n - \alpha\,A) = \mathrm{Max}(|1 - \alpha\,\lambda_1|, |1 - \alpha\,\lambda_n|)$ et que $\rho(I_n - \alpha\,A) < 1$ si et seulement si $\alpha < \dfrac{2}{\lambda_n}\cdot$

Dans toute la suite de cette partie, α est un réel appartenant à $\left]0, \dfrac{2}{\lambda_n}\right[$.

c) Montrer alors que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers X^*.

Q3 a) On pose pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : g(X) = AX - B$.

Montrer, pour le fun (voir plus bas), que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X - \alpha\,g(X)) - f(X) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}\,\|g(X)\|^2\,\big(\alpha\,\lambda_n - 2\big)$.

b) Montrer, encore pour le fun (voir plus bas), que la suite $\big(f(X_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c) Montrer que cette suite converge vers le minimum de f (on pourra encadrer $f(X_k) - f(X^*)$).

Q4 On suppose que $\lambda_1 < \lambda_n$ et on pose $\forall t \in \mathbb{R}^{+\,*},\ \varphi(t) = \mathrm{Max}\,\big(|1 - \lambda_1\,t|, |1 - \lambda_n\,t|\big)$.

Montrer que φ possède un minimum atteint en un point et un seul. Proposer alors une “bonne” valeur pour α.

Et si $\lambda_1 = \lambda_n$? ?

Notons que cette algorithme permet d'approximer la solution le l'équation $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX = B$ lorsque A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives. C'est l'occasion de revisiter ESSEC 2004

Notons également qu'en général on ne connaît pas les valeurs propres de A. Ainsi toute méthode permettant de les localiser est la bienvenue...

Partie III Approximation de X^* dans le cas général. Algorithme de Uzawa

On reprend tous les éléments de la partie I. F est donc de nouveau un sous-espace vectoriel quelconque de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

f possède un minimum sous la contrainte F et on note toujours X^* l'unique élément de f qui réalise le minimum de f sous la contrainte F.

Q1 Montrer que l'on peut trouver une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ CX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ (on pourra, si F n'est pas réduit au vecteur nul, utiliser une base de F pour construire un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de noyau F).

On pose alors : $\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ L(X,Y) = f(X) + < Y, CX >$.

L est le Lagrangien associé à f et à la contrainte F.

Soit (X',Y') un élément de $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$. On dit que (X',Y') est un point selle de L si :

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ L(X',Y) \leqslant L(X',Y') \leqslant L(X,Y').$$

Q2 Soit Z un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ h_Z(X) = L(X,Z)$.

Montrer que h_Z possède un minimum atteint en le seul point $A^{-1}\big(B - {}^tCZ\big)$ (on pourra utiliser II Q1).

Q3 Soit (X',Y') un élément de $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$.

a) Montrer que si U appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ < U, V > \geqslant 0$ si et seulement si U est nul (*question qui n'est traitée qu'implicitement dans la correction*).

Montrer que $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ L(X',Y) \leqslant L(X',Y')$ si et seulement si $X' \in F$.

b) Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ L(X',Y') \leqslant L(X,Y')$ si et seulement si $AX' + {}^tCY' = B$.

c) En déduire que (X',Y') est un point selle de L si et seulement si $X' = X^*$ et $AX^* + {}^tCY' = B$.

Q4 On considère le sous-espace vectoriel $H = \{{}^tCY ; Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que $H^\perp = F$. En déduire que L possède au moins un point selle. Est-il unique ?

Facultatif En supposant qu'il ne soit pas toujours unique (! !) donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit unique et dans le cas où il n'est pas unique exprimer l'ensemble des points selle de L partir de l'un d'entre eux.

Dans la suite on se propose ici encore de construire une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui converge vers X^*.

On se donne un point selle (X',Y') de L. Alors nécessairement $X' = X^*$.

Q5 Soient $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. On considère les deux suites $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définies par la récurence suivante.

- $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et X_0 est l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui rend minimum $h_{Y_0} : X \to L(X, Y_0)$.
- Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $Y_{k+1} = Y_k + \rho_k\, CX_k$ et X_{k+1} est l'élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui rend minimum

  $h_{Y_{k+1}} : X \to L(X, Y_{k+1})$.

Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que : $A(X_k - X') + {}^tC(Y_k - Y') = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $Y_{k+1} - Y' = Y_k - Y' + \rho_k\, C(X_k - X')$.

b) En déduire que : $\|Y_{k+1} - Y'\|^2 = \|Y_k - Y'\|^2 - 2\,\rho_k\, < A(X_k - X'), X_k - X' > + (\rho_k)^2 \|C(X_k - X')\|^2$.

Q6 A' est la matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives et qui vérifie $A'^2 = A$.

On pose $S = (A')^{-1\,t}CC(A')^{-1}$.

a) Montrer que S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives.

b) Montrer que l'on peut trouver un un réel δ tel que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|CA'^{-1}X\|^2 \leqslant \delta\, \|X\|^2$.

En déduire que : $\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|CU\|^2 \leqslant \delta < AU, U >$.

c) On considère deux réels α et β tels que : $0 < \alpha < \beta < \dfrac{2}{\delta}\cdot$

On suppose ici que $\forall k \in \mathbb{N},\ \rho_k \in [\alpha, \beta]$. Montrer que la suite de terme général $\|Y_k - Y'\|^2$ est décroissante.

En déduire que : $\lim\limits_{k \to +\infty} < A(X_k - X'), X_k - X' >= 0$.

Montrer alors que la suite $(X_k)_{k \geqslant 0}$ converge vers X^*.

$\boxed{\textbf{Q7}}$ **Facultatif** On reprend les éléments de II Q3. D un éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $F_D = \{Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid CZ = D\}$ ne soit pas vide.

Z^* est l'unique élément de F_D qui réalise le minimum de la restriction de f à F_D.

Construire une suite qui converge vers Z^*.
