SUJET 2

Dans tout le problème $(E, < .,. >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension n ($n \in [\![1, +\infty[\![$) et u est un endomorphisme de E.

On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

PARTIE I

Q1 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est ici une base orthonormale quelconque de E et A est la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

a) Soit u^* l'endomorphisme de E de matrice ${}^tA$ dans $\mathcal{B}$. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ < u(x), y > = < x, u^*(y) > \qquad (1)$$

b) Montrer que u^* est le seul endomorphisme de E vérifiant (1) (prendre une seconde solution w...).

c) v est un second endomorphisme de E et λ est un scalaire. Exprimer $(\lambda u + v)^*$ et $(u \circ v)^*$ en fonction de λ, u^* et v^*.

Q2 a) Montrer que $u^* \circ u$ est un <u>endomorphisme</u> symétrique de E dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

b) Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres orthogonaux de $u^* \circ u$ alors $u(x)$ et $u(y)$ sont orthogonaux.

c) Montrer que $\operatorname{Ker}(u^* \circ u) = \operatorname{Ker} u$. Justifier à l'aide d'un résultat de cours que $\operatorname{Ker}(u^* \circ u)^\perp$ est stable par $u^* \circ u$.

En déduire, à un cas particuler près, que l'on peut trouver une base orthonormale de $\operatorname{Ker}(u^* \circ u)^\perp$ constituée de vecteurs propres de $u^* \circ u$.

Montrer enfin qu'il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que $\Big(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_r)\Big)$ soit une base ortho<u>**gon**</u>ale de $\operatorname{Im} u$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $\operatorname{Ker} u$ (on remarquera que ceci est très légèrement abusif dans les cas particuliers $\operatorname{Ker} u = E$ et $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$).

Dans toute la suite $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E vérifiant les propriétés de c).

On pose : $\forall k \in [\![1, r]\!],\ \sigma_k = \|u(e_k)\|$ et $f_k = \dfrac{1}{\sigma_k}\ u(e_k)$.

On complète la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ en une base orthonormale $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de E.

Q3 Montrer que :

$$\forall x \in E,\ u(x) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k\ < x, e_k >\ f_k$$

(Ecrire x sur la base orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_n)$). Que peut-on dire de la matrice de u relativement aux bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Q4 Déduire de ce qui précède que si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe deux matrices orthogonales P et Q et une matrice diagonale D à éléments diagonaux positifs ou nuls telles que : $M = PDQ^{-1}$.

Q5 Montrer que :

$$\forall y \in E,\ u^*(y) = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k\ < y, f_k >\ e_k$$

(Ecrire $u^*(y)$ sur la base orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_n)$).

PARTIE II

On conserve les notations de la partie I. On pose :

$$\forall x \in E,\ \widehat{u}\,(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sigma_k}\ < x, f_k >\ e_k$$

Q1 Montrer que $\widehat{u}$ est un endomorphisme de E.

Q2 Etablir que l'on a : $\operatorname{Im}\widehat{u} = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$. Quel est le rang de $\widehat{u}$?

Q3 Déterminer $\operatorname{Ker}\widehat{u}$.

Q4 . Démontrer que $u \circ \widehat{u}$ (resp. $\widehat{u} \circ u$) est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} u$ (resp. $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$). Que dire de $\widehat{u}$ lorsque $r = n$?

Q5 Soit v un endomorphisme de E ayant les mêmes propriétés que celles établies pour $\widehat{u}$ dans les questions 2, 3 et 4. Montrer que $(v \circ u) \circ \widehat{u} = \widehat{u}$ et $v \circ (u \circ \widehat{u}) = v$. Conclusion ?

Ainsi $\widehat{u}$ ne dépend pas du choix de la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ fait dans la partie I. $\widehat{u}$ s'appelle le pseudo-inverse de u.

Vous avez le choix entre deux énoncés pour la question suivante.

Q6 Montrer que $\widehat{(u^*)} = (\widehat{u})^*$.

Q6' a) Montrer que $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$.

b) Montrer que si f est une projection orthogonale de E : $f^* = f$.

c) Montrer que $\widehat{(u^*)} = (\widehat{u})^*$.

Q7 Ici $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ $(n \leqslant 2)$ est muni du produit scalaire canonique et u est défini par $\forall P \in E,\ u(P) = P'$. Déterminer la matrice de $\widehat{u}$ dans la base canonique de E.

PARTIE III

On conserve les notations des parties 1 et 2.

Q1 Soit b un vecteur non nul de E.

a) Montrer que $\operatorname*{Min}_{x \in E} \|u(x) - b\|$ existe.

b) Etablir qu'il existe un unique élément x_0 de $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ tel que $\|u(x_0) - b\| = \operatorname*{Min}_{x \in E} \|u(x) - b\|$.

Montrer de plus que, x_0 est parmi les vecteurs t de E pour lesquels $\|u(t) - b\|$ est minimale, celui qui a la plus petite norme.

c) En utilisant les résultats de la question 4 de la partie 2, montrer que $u(x_0) = (u \circ \widehat{u})(b)$. En déduire que $x_0 = \widehat{u}(b)$.

Q2 Pour tout élément v de $\mathcal{L}(E)$ on pose $|||v||| = \operatorname*{Sup}_{x \in E \text{ et } \|x\|=1} \|v(x)\|$. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

Q3 Soit w un endomorphisme de E.

a) Montrer que $\forall v \in \mathcal{L}(E),\ \forall x \in E,\ \|u(v(x)) - w(x)\| \geqslant \|u(\widehat{u} \circ w(x))) - w(x)\|$.

b) En déduire que $|||u \circ (\widehat{u} \circ w) - w||| = \operatorname*{Min}_{v \in \mathcal{L}(E)} |||u \circ v - w|||$.

c) Montrer de même que $|||(w \circ \widehat{u}) \circ u - w||| = \operatorname*{Min}_{v \in \mathcal{L}(E)} |||v \circ u - w|||$.