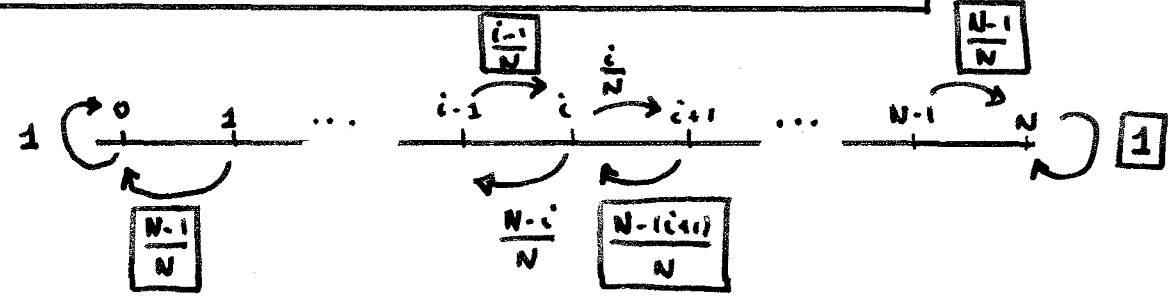
Exercice 1 : probabilités et algèbre linéaire

I Étude d'une suite de variables aléatoires

Q1



Q2 • $X_1(\Omega)=\{0,2\}$. $P(X_1=0)=\frac{N-1}{N}$ et $P(X_1=2)=\frac{1}{N}$.

J'éviterai les arbres ...

• $X_2(\Omega)=\{0,1,3\}$

- $\{X_2=0\}\subset\{X_1=0\}$ donc $P(\{X_2=0\})=P(\{X_2=0\}\cap\{X_1=0\})$.
$P(X_2=0)=P(X_1=0)\,P_{\{X_1=0\}}(X_2=0)=\frac{N-1}{N}\times 1$; $P(X_2=0)=\frac{N-1}{N}$.
- $\{X_2=1\}\subset\{X_1=2\}$ donc $P(\{X_2=1\})=P(\{X_2=1\}\cap\{X_1=2\})$
$P(X_2=1)=P(X_1=2)\,P_{\{X_1=2\}}(X_2=1)=\frac{1}{N}\times\frac{N-2}{N}$; $P(X_2=1)=\frac{N-2}{N^2}$.
- $\{X_2=3\}\subset\{X_1=2\}$ donc $P(\{X_2=3\})=P(\{X_2=3\}\cap\{X_1=2\})$.
$P(X_2=3)=P(X_1=2)\,P_{\{X_1=2\}}(X_2=3)=\frac{1}{N}\times\frac{2}{N}=\frac{2}{N^2}$.

$X_2(\Omega)=\{0,1,3\}$, $P(X_2=0)=\frac{N-1}{N}$, $P(X_2=1)=\frac{N-2}{N^2}$ et $P(X_2=3)=\frac{2}{N^2}$.

• si $N\geqslant 4$. $X_3(\Omega)=\{0,2,4\}$.

Notons que $(\{X_2=0\},\{X_2=1\},\{X_2=3\})$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors

$\forall i\in X_3(\Omega)$, $P(X_3=i)=P(X_2=0)\,P_{\{X_2=0\}}(X_3=i)+P(X_2=1)\,P_{\{X_2=1\}}(X_3=i)+$
$P(X_2=3)\,P_{\{X_2=3\}}(X_3=i)$

$\forall i \in X_3(\Omega)$, $P_{\{X_2=0\}}(X_3=i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $P_{\{X_2=1\}}(X_3=i) = \begin{cases} \frac{N-1}{N} & \text{si } i=0 \\ \frac{1}{N} & \text{si } i=2 \\ 0 & \text{si } i=4 \end{cases}$ et

$$P_{\{X_2=3\}}(X_3=i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i=0 \\ \frac{N-3}{N} & \text{si } i=2 \\ \frac{3}{N} & \text{si } i=4 \end{cases}$$

Alors - $P(X_3=0) = P(X_2=0) + \frac{N-1}{N} P(X_2=1) + 0\,P(X_2=3) = \frac{N-1}{N} + \frac{N-1}{N}\,\frac{N-2}{N^2} = \frac{N^3-3N+2}{N^3}$.

- $P(X_3=2) = 0\,P(X_2=0) + \frac{1}{N} P(X_2=1) + \frac{N-3}{N} P(X_2=3) = \frac{1}{N}\,\frac{N-2}{N^2} + \frac{N-3}{N}\,\frac{2}{N^2} = \frac{3N-8}{N^3}$.

- $P(X_3=4) = 0\,P(X_2=0) + 0\,P(X_2=1) + \frac{3}{N} P(X_2=3) = \frac{6}{N^3}$.

Si $N \geq 4$: $X_3(\Omega)=\{0,2,4\}$, $P(X_3=0) = \frac{N^3-3N+2}{N^3}$, $P(X_3=2) = \frac{3N-8}{N^3}$ et $P(X_3=4) = \frac{6}{N^3}$.

b) $N=3$. $X_3(\Omega)=\{0,2,3\}$

- $P(X_3=0) = P(X_2=0) \underbrace{P_{\{X_2=0\}}(X_3=0)}_{=1} + P(X_2=1) \underbrace{P_{\{X_2=1\}}(X_3=0)}_{=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}} + P(X_2=3) \underbrace{P_{\{X_2=3\}}(X_2=0)}_{=0}$

$P(X_3=0) = P(X_2=0) + \frac{2}{3} P(X_2=1) = \frac{3-1}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{3-2}{9} = \frac{20}{27}$.

- $P(X_3=2) = P(X_2=0) \underbrace{P_{\{X_2=0\}}(X_3=2)}_{=0} + P(X_2=1) \underbrace{P_{\{X_2=1\}}(X_3=2)}_{\frac{1}{3}} + P(X_2=3) \underbrace{P_{\{X_2=3\}}(X_3=2)}_{=0}$

$P(X_3=2) = \frac{1}{3} P(X_2=1) = \frac{1}{3} \times \frac{3-2}{9} = \frac{1}{27}$.

- $P(X_3=3) = P(X_2=0) \underbrace{P_{\{X_2=0\}}(X_3=3)}_{=0} + P(X_2=1) \underbrace{P_{\{X_2=1\}}(X_3=3)}_{=0} + P(X_2=3) \underbrace{P_{\{X_2=3\}}(X_3=3)}_{=1}$

$P(X_3=3) = P(X_2=3) = \frac{2}{9} = \frac{6}{27}$.

Si $N=3$: $X_3(\Omega)=\{0,2,3\}$, $P(X_3=0) = \frac{20}{27}$, $P(X_3=2) = \frac{1}{27}$ et $P(X_3=3) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $(\{X_n = i\})_{i \in [\![0,N]\!]}$ est un système complet d'événements

donc $\forall k \in [\![0,N]\!]$, $P(X_{n+1}=k) = \sum_{i=0}^{N} P(\{X_{n+1}=k\} \cap \{X_n = i\})$

1er cas.. $N \geq 4$ soit $k \in [\![2, N-2]\!]$. Soit $i \in [\![0,N]\!]$.

a) $P(X_n = i) \neq 0$. $P(\{X_{n+1}=k\} \cap \{X_n=i\}) = P_{\{X_n=i\}}(X_{n+1}=k)\, P(X_n=i)$.

$$P(\{X_{n+1}=k\} \cap \{X_n=i\}) = \begin{cases} \frac{k-1}{N} P(X_n = k-1) & \text{si } i = k-1 \\ \frac{N-(k+1)}{N} P(X_n = k+1) & \text{si } i = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) $P(X_n=i)=0$. Comme $\{X_{n+1}=k\} \cap \{X_n=i\} \subset \{X_n = i\}$ par croissance de P

on a $0 \leq P(\{X_{n+1}=k\} \cap \{X_n=i\}) \leq P(X_n=i) = 0$.

Ainsi $P(\{X_{n+1}=k\} \cap \{X_n=i\}) = P(X_n=i) = 0$. Alors le résultat obtenu plus haut reste vrai, OK ?!

Par conséquent $P(X_{n+1}=k) = \sum_{i=0}^{N} P(\{X_{n+1}=k\} \cap \{X_n=i\}) = \frac{k-1}{N} P(X_n=k-1) + \frac{N-(k+1)}{N} P(X_n=k+1)$.

Si $N \geq 4$ $\forall k \in [\![2,N-2]\!]$, $P(X_{n+1}=k) = \frac{k-1}{N} P(X_n=k-1) + \frac{N-(k+1)}{N} P(X_n=k+1)$.

• $P(X_{n+1}=0) = \sum_{i=0}^{N} P(\{X_{n+1}=0\} \cap \{X_n=i\})$

Notons que si $i \in [\![2,N]\!]$, $P(\{X_{n+1}=0\} \cap \{X_n=i\}) = 0$.

Alors $P(X_{n+1}=0) = P(\{X_{n+1}=0\} \cap \{X_n=0\}) + P(\{X_{n+1}=0\} \cap \{X_n=1\})$.

$\{X_n=0\} \subset \{X_{n+1}=0\}$ donc $P(\{X_{n+1}=0\} \cap \{X_n=0\}) = P(X_n=0)$.

Si $P(X_n=1) \neq 0$ $P(\{X_{n+1}=0\} \cap \{X_n=1\}) = P_{\{X_n=1\}}(X_{n+1}=0)\, P(X_n=1) = \frac{N-1}{N} P(X_n=1)$

Si $P(X_n=1)=0$ $P(\{X_{n+1}=0\} \cap \{X_n=1\}) = P(X_n=1) = 0$; le résultat précédent reste exact.

Ainsi $P(X_{n+1}=0) = P(X_n=0) + \frac{N-1}{N} P(X_n=1)$.

- $\{X_{n+1}=1\} \subset \{X_n=2\}$.

  $P(\{X_{n+1}=1\})=P(\{X_{n+1}=1\} \cap \{X_n=2\})$.

Si $P(\{X_n=2\}) \neq 0$: $P(\{X_{n+1}=1\})= P_{\{X_n=2\}}(X_{n+1}=1)\, P(X_n=2) = \frac{N-2}{N} P(X_n=2)$.

Si $P(\{X_n=2\})=0$: $P(\{X_{n+1}=1\} \cap \{X_n=2\}) = P(X_n=2)=0$ et le résultat précédent vaut encore.

$$\underline{\underline{P(X_{n+1}=1) = \frac{N-2}{N} P(X_n=2).}}$$

- $\{X_{n+1}=N-1\} \subset \{X_n=N-2\}$

  $P(X_{n+1}=N-1)= P(\{X_{n+1}=N-1\} \cap \{X_n=N-2\})$.

Si $P(X_n=N-2) \neq 0$: $P(X_{n+1}=N-1) = P_{\{X_n=N-2\}}(X_{n+1}=N-1)\, P(X_n=N-2) = \frac{N-2}{N} P(X_n=N-2)$

Si $P(X_n=N-2)=0$: $P(\{X_{n+1}=N-1\} \cap \{X_n=N-2\}) = P(X_n=N-2)=0$ et le résultat vaut encore.

$$\underline{\underline{P(X_{n+1}=N-1) = \frac{N-2}{N} P(X_n=N-2).}}$$

- $P(X_{n+1}=N) = \sum_{i=0}^{N} P(\{X_{n+1}=N\} \cap \{X_n=i\})$

  Or $\forall i \in [\![0,N-2]\!]$, $P(\{X_{n+1}=N\} \cap \{X_n=i\}) = 0$.

  Donc $P(X_{n+1}=N) = P(\{X_{n+1}=N\} \cap \{X_n=N-1\}) + P(\{X_{n+1}=N\} \cap \{X_n=N\})$.

  $\{X_n=N\} \subset \{X_{n+1}=N\}$ donc $\{X_{n+1}=N\} \cap \{X_n=N\} = \{X_n=N\}$, alors

  $P(\{X_{n+1}=N\} \cap \{X_n=N\}) = P(X_n=N)$.

Si $P(X_n=N-1) \neq 0$ $P(\{X_{n+1}=N\} \cap \{X_n=N-1\}) = P_{\{X_n=N-1\}}(X_{n+1}=N)\, P(X_n=N-1) = \frac{N-1}{N} P(X_n=N-1)$

Si $P(X_n=N-1)=0$, $P(\{X_{n+1}=N\} \cap \{X_n=N-1\}) = 0$ et le résultat vaut encore.

Finalement $\underline{\underline{P(X_{n+1}=N) = \frac{N-1}{N} P(X_n=N-1) + P(X_n=N).}}$

Résumons. Si $N \geq 4$:

$$P(X_{n+1}=0) = P(X_n=0) + \frac{N-1}{N} P(X_n=1).$$

$$P(X_{n+1}=1) = \frac{N-2}{N} P(X_n=2).$$

$$\forall k \in [\![2, N-2]\!],\ P(X_{n+1}=k) = \frac{k-1}{N} P(X_n=k-1) + \frac{N-(k+1)}{N} P(X_n=k+1). \quad (*)$$

$$P(X_{n+1}=N-1) = \frac{N-2}{N} P(X_n=N-2).$$

$$P(X_{n+1}=N) = \frac{N-1}{N} P(X_n=N-1) + P(X_n=N).$$

Remarque.. (*) vaut encore pour $k=1$ et $k=N-1$.

2ème cas.. $N=3$ Des raisonnements analogues aux précédents donnent :

$$P(X_{n+1}=0) = P(X_n=0) + \frac{2}{3} P(X_n=1)$$

$$P(X_{n+1}=1) = \frac{1}{3} P(X_n=2)$$

$$P(X_{n+1}=2) = \frac{1}{3} P(X_n=1)$$

$$P(X_{n+1}=3) = \frac{2}{3} P(X_n=2) + P(X_n=3).$$

b] 1er cas $N \geq 4$.

Alors
$$U_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{N-1}{N} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-3}{N} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \frac{N-3}{N} & 0 & \frac{1}{N} & 0 \\ \vdots & & & 0 & \frac{N-2}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & \frac{N-1}{N} & 1 \end{pmatrix}}_{=M} U_n \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}.$$

$M = (a_{ij})_{\substack{0 \le i \le N \\ 0 \le j \le N}}$ avec $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j=1 \text{ ou } i=j=N \\ \frac{i-1}{N} \text{ si } j=i-1 \text{ et } i \in [\![1,N]\!] \\ \frac{N-(i+1)}{N} \text{ si } j=i+1 \text{ et } i \in [\![0,N-1]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ convient.

2ième cas : $N=3$.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} U_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$ convient

Q4 a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$. $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi 1 est valeur propre de M et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Notons que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.

$$MX = \varepsilon \times \frac{1}{3} X \iff \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = \frac{\varepsilon}{3}x \\ \frac{1}{3}z = \frac{\varepsilon}{3}y \\ \frac{1}{3}y = \frac{\varepsilon}{3}z \\ \frac{2}{3}z + t = \frac{\varepsilon}{3}t \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon}{3} - 1\right)x \\ z = \varepsilon y \\ y = \varepsilon z \\ t = \frac{2}{3}\frac{1}{\frac{\varepsilon}{3} - 1} z \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{\varepsilon - 3}{2}x \\ z = \varepsilon y \\ y = \varepsilon^2 y = y \\ t = \frac{2}{\varepsilon - 3} z \end{cases}.$$

$$MX = \frac{\varepsilon}{3}X \iff \begin{cases} y = \frac{\varepsilon - 3}{2}x \\ z = \varepsilon \frac{\varepsilon - 3}{2}x \\ t = \frac{2}{\varepsilon - 3}\varepsilon\frac{\varepsilon - 3}{2}x = \varepsilon x \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{\varepsilon - 3}{2}x \\ z = \frac{1 - 3\varepsilon}{2}x \\ t = \varepsilon x \end{cases}.$$

Alors $\frac{\varepsilon}{3}$ est valeur propre de M et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon-3 \\ 1-3\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix}\right)$.

Finalement $\frac{1}{3}$ est valeur propre de M et $SEP(M,\frac{1}{3})=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$-\frac{1}{3}$ est valeur propre de M et $SEP(M,-\frac{1}{3})=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\in M_{4,1}(\mathbb{R})$. $MX=X \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{2}{3}y=x \\ \frac{1}{3}z=y \\ \frac{1}{3}y=z \\ \frac{2}{3}z+t=t \end{cases} \Leftrightarrow y=z=0$.

Ainsi $SEP(M,1)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\dim SEP(M,1)+\dim SEP(M,\frac{1}{3})+\dim SEP(M,-\frac{1}{3})=2+1+1=4$ et $M\in M_4(\mathbb{R})$.

Ainsi M est diagonalisable.

Posons $X_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(X_1,X_4) est une base de $SEP(M,1)$, X_2 est une base de $SEP(M,\frac{1}{3})$ et X_3 est une base de $SEP(M,-\frac{1}{3})$.

Comme $M_{4,1}(\mathbb{R})=SEP(M,1)\oplus SEP(M,\frac{1}{3})\oplus SEP(M,-\frac{1}{3})$, (X_1,X_4,X_2,X_3) est une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$.

Alors $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3,X_4)$ est aussi une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$.

Mieux c'est une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $1,\frac{1}{3},-\frac{1}{3}$ et 1.

Ainsi la deuxième colonne de Π^n est : $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3-2(1/3)^n-(-1/3)^n \\ 2(1/3)^n+2(-1/3)^n \\ 2(1/3)^n-2(-1/3)^n \\ -2(1/3)^n+(-1/3)^n+1 \end{pmatrix}$.

d) $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=\Pi U_n$. Une récurrence simple donne :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=\Pi^n U_0$. Or $U_0=\begin{pmatrix} P(X_0=0) \\ P(X_0=1) \\ P(X_0=2) \\ P(X_0=3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=\Pi^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, U_n est la deuxième colonne de Π^n.

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$\begin{cases} P(X_n=0)=\frac{1}{4}\left(3-2(1/3)^n-(-1/3)^n\right) \\ P(X_n=1)=\frac{1}{2}\left((1/3)^n+(-1/3)^n\right) \\ P(X_n=2)=\frac{1}{2}\left((1/3)^n-(-1/3)^n\right) \\ P(X_n=3)=\frac{1}{4}\left(1-2(1/3)^n+(-1/3)^n\right) \end{cases}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}P(X_n=0)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(3-2(1/3)^n+(-1/3)^n\right)\underset{\left|\frac{1}{3}\right|<1 \text{ et } \left|-\frac{1}{3}\right|<1}{=}\frac{1}{4}(3-2\times 0+0)=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty}P(X_n=3)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(1-2(1/3)^n+(-1/3)^n\right)=\frac{1}{4}.$$

$\lim_{n\to+\infty}P(X_n=0)=\frac{3}{4}$ et $\lim_{n\to+\infty}P(X_n=3)=\frac{1}{4}$

Remarque.. Il est aisé de montrer que si le mobile se trouve au point d'abscisse 2 à l'instant initial 0 :

$$\lim_{n\to+\infty}P(X_n=0)=\frac{1}{4} \text{ et } \lim_{n\to+\infty}P(X_n=3)=\frac{3}{4}.$$

Dans ces conditions si P est la matrice de passage de la base canonique de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$:

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) P est inversible comme matrice de passage ;

3) $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R})$. Posons $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

Il n'est pas utile de raisonner par équivalences : on sait déjà que P est inversible...

Alors $\begin{cases} x+y+z = x' \\ -y-2z = y' \\ -y+2z = z' \\ y-z+t = t' \end{cases}$; $L_2 + L_3$ donne $-2y = y'+z'$ ou $y = -\frac{1}{2}(y'+z')$.

Alors $z = \frac{1}{2}(z'+y) = \frac{1}{4}(2z'-y'-z') = \frac{1}{4}(-y'+z')$

Ainsi $x = x'-y-z = \frac{1}{4}(4x'+2y'+2z'+y'-z') = \frac{1}{4}(4x'+3y'+z')$ et

$t = t'-y+z = \frac{1}{4}(4t'+2y'+2z'-y'+z') = \frac{1}{4}(y'+3z'+4t')$.

Ce tout permet alors de dire que $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $D = \mathrm{Diag}(1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$. $D = P^{-1}MP$ donc $M = PDP^{-1}$.

Alors $M^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

Alors $M^n = \begin{pmatrix} 1 & (1/3)^n & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & -(1/3)^n & -2(-1/3)^n & 0 \\ 0 & -(1/3)^n & 2(-1/3)^n & 0 \\ 0 & (1/3)^n & -(-1/3)^n & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

II Étude de l'arrêt du mobile

(Q1) a) $p_0 = 0$ car on part de l'abscisse 0 et on y reste.

$p_N = 1$ car on part de l'abscisse N (et on y reste).

$q_0 = 1$ car on part de l'abscisse 0 (et on y reste).

$q_N = 0$ car on part de l'abscisse N et on y reste.

b) Soit $i \in [\![1, N-1]\!]$. Supposons qu'à l'instant 0 le mobile se trouve au point d'abscisse i.

Notons S_i l'événement le mobile finit par s'arrêter en N lorsqu'il est parti du point d'abscisse i.

$(\{X_1 = i-1\}, \{X_1 = i+1\})$ est un système complet d'événements, $P(X_1 = i-1) = \frac{N-i}{N}$ et $P(X_1 = i+1) = \frac{i}{N}$.

Alors $P(S_i) = P(X_1 = i-1) P_{\{X_1 = i-1\}}(S_i) + P(X_1 = i+1) P_{\{X_1 = i+1\}}(S_i)$

Notons que $P_{\{X_1 = i-1\}}(S_i) = p_{i-1}$ et $P_{\{X_1 = i+1\}}(S_i) = p_{i+1}$.

Alors $p_i = P(S_i) = \frac{N-i}{N} p_{i-1} + \frac{i}{N} p_{i+1} = \frac{i}{N} p_{i+1} + \frac{N-i}{N} p_{i-1}$.

$(p_0, p_1, \dots, p_N)$ possède la propriété $(\mathcal{P})$.

(Q2) a) $\forall i \in [\![1, N-1]\!]$, $\frac{i}{N} u_{i+1} + \frac{N-i}{N} u_{i-1} = u_i = \frac{i}{N} u_i + \frac{N-i}{N} u_i$

$\forall i \in [\![1, N-1]\!]$, $\frac{i}{N}(u_{i+1} - u_i) = \frac{N-i}{N}(u_i - u_{i-1})$.

$\forall i \in [\![1, N-1]\!]$, $u_{i+1} - u_i = \frac{N-i}{i}(u_i - u_{i-1})$.

Pour tout i dans $[\![1, N-1]\!]$, $u_{i+1} - u_i$ est du signe de $u_i - u_{i-1}$ $\left(\frac{N-i}{i} \geqslant 0\right)$

ainsi $u_1 - u_0, u_2 - u_1, \dots, u_N - u_{N-1}$ ont même signe.

La suite $(u_i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$ est monotone (croissante si $u_0 \leqslant u_1$ et décroissante sinon)

b) $(u_i)_{0\le i\le N}$ étant monotone, si $u_0=u_N$: $(u_i)_{0\le i\le N}$ est constante.

Si $u_0=u_N$: $\forall i\in[\![0,N]\!]$, $u_i=u_0$.

Q3 La propriété $(\mathcal{P})$ est linéaire dans la mesure où toute combinaison linéaire de suites possédant la propriété $(\mathcal{P})$ possède également la propriété $(\mathcal{P})$.

Q4 **a)** $a_N=\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}=(1+1)^{N-1}=2^{N-1}$. $\quad a_N=2^{N-1}.$

Soit $i\in[\![2,N-1]\!]$.

$$\frac{i}{N}a_{i+1}+\frac{N-i}{N}a_{i-1}=\frac{i}{N}\sum_{k=0}^{i}\binom{N-1}{k}+\frac{N-i}{N}\sum_{k=0}^{i-2}\binom{N-1}{k}=\frac{i+N-i}{N}\sum_{k=0}^{i-2}\binom{N-1}{k}+\frac{i}{N}\underbrace{\left(\binom{N-1}{i-1}+\binom{N-1}{i}\right)}_{\binom{N}{i}}$$

$$\frac{i}{N}a_{i+1}+\frac{N-i}{N}a_{i-1}=\sum_{k=0}^{i-2}\binom{N-1}{k}+\frac{i}{N}\binom{N}{i}$$

Or $\frac{i}{N}\binom{N}{i}=\frac{i}{N}\,\frac{N!}{i!(N-i)!}=\frac{(N-1)!}{(i-1)!(N-i)!}=\binom{N-1}{i-1}$.

Alors $\frac{i}{N}a_{i+1}+\frac{N-i}{N}a_{i-1}=\sum_{k=0}^{i-2}\binom{N-1}{k}+\binom{N-1}{i-1}=\sum_{k=0}^{i-1}\binom{N-1}{k}=a_i$.

Examinons le cas $i=1$.

$$\frac{1}{N}a_2+\frac{N-1}{N}a_0=\frac{1}{N}a_2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{1}\binom{N-1}{k}=\frac{1}{N}\left[\binom{N-1}{0}+\binom{N-1}{1}\right]=\frac{1}{N}(1+N-1)=1.$$

Or $a_1=\sum_{k=0}^{0}\binom{N-1}{k}=1$ donc $\frac{1}{N}a_2+\frac{N-1}{N}a_0=a_1$.

Finalement $\forall i\in[\![1,N-1]\!]$, $a_i=\frac{i}{N}a_{i+1}+\frac{N-i}{N}a_i$.

$(a_0,a_1,\dots,a_N)$ possède la propriété $(\mathcal{P})$.

b) Pour $\forall i \in [\![0,N]\!]$, $b_i = p_i - \frac{1}{2^{N-1}} a_i$.

Notons que $b_0 = p_0 - \frac{1}{2^{N-1}} a_0 = 0$ et que $b_N = p_N - \frac{1}{2^{N-1}} a_N = 1 - 1 = 0$.

Montrons alors que $(b_i)_{0 \le i \le N}$ possède la propriété (9) (c'est le caractère linéaire de (9) !).

$\forall i \in [\![1,N-1]\!]$, $b_i = p_i - \frac{1}{2^{N-1}} a_i = \frac{i}{N} p_{i+1} + \frac{N-i}{N} p_{i-1} - \frac{1}{2^{N-1}}\left(\frac{i}{N} a_{i+1} + \frac{N-i}{N} a_{i-1}\right)$

$\forall i \in [\![1,N-1]\!]$, $b_i = \frac{i}{N}\left(p_{i+1} - \frac{1}{2^{N-1}} a_{i+1}\right) + \frac{N-i}{N}\left(p_{i-1} - \frac{1}{2^{N-1}} a_{i-1}\right) = \frac{i}{N} b_{i+1} + \frac{N-i}{N} b_{i-1}$.

Ainsi $(b_i)_{0 \le i \le N}$ possède la propriété (9) et vérifie $b_0 = b_N$.

Donc $\forall i \in [\![0,N]\!]$, $b_i = b_0 = 0$.

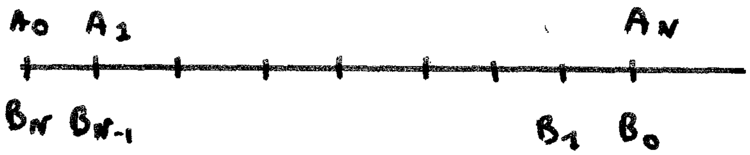
Alors $\forall i \in [\![0,N]\!]$, $p_i = \frac{1}{2^{N-1}} a_i$. Alors $\forall i \in [\![1,N]\!]$, $p_i = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{i-1} \binom{N-1}{k}$.

Rappelons que $p_0 = 0$.

Q5 Pour tout $i \in [\![0,N]\!]$ notons A_i le point d'abscisse i.

Considérons alors le repère $(A_N, \overrightarrow{A_N A_{N-1}})$. Pour tout $i \in [\![0,N]\!]$ notons B_i le point d'abscisse i dans ce repère.

Alors $\forall i \in [\![0,N]\!]$, $B_i = A_{N-i}$



▲ • Si le mobile se trouve en B_0 à l'instant n il reste en ce point à l'instant $n+1$

• ——— B_N ———

• A l'instant 0, il se trouve en l'un des points $B_0, B_1, \dots, B_N$.

• Supposons qu'à l'instant n il soit en $B_i = A_{N-i}$ avec $i \in [\![1,N-1]\!]$.

A l'instant $n+1$ il se trouve en $B_{i+1}=A_{N-i-1}$ avec la probabilité $\frac{N-(N-i)}{N}=\frac{i}{N}$

et en $B_{i-1}=A_{N-i+1}$ avec la probabilité $\frac{N-i}{N}$. ▼

Tout ceci permet d'affirmer que la probabilité pour que le mobile arrive en B_N en étant parti de B_i est p_i pour tout $i \in [\![0,N]\!]$.

Alors la probabilité pour que le mobile arrive en B_N en étant parti de B_{N-i} est p_{N-i} pour tout $i \in [\![0,N]\!]$.

Or $B_N=A_0$ et $B_{N-i}=A_i$. Ainsi la probabilité que le mobile arrive en A_0 en étant parti de A_i est p_{N-i}

Or par définition cette probabilité est q_i pour tout $i \in [\![0,N]\!]$.

Ainsi $\forall i \in [\![0,N]\!],\ q_i=p_{N-i}$.

Soit $i \in [\![0,N]\!]$. Montrons que $p_i+q_i=1$.

Si $i=0$: $p_i+q_i=p_0+q_0=0+1=1$.

Si $i=N$: $p_i+q_i=p_N+q_N=1+0=1$.

Supposons que $i \in [\![1,N-1]\!]$. $p_i+q_i=p_i+p_{N-i}=\frac{1}{2^{N-1}}\sum_{k=0}^{i-1}\binom{N-1}{k}+\frac{1}{2^{N-1}}\sum_{k=0}^{N-i-1}\binom{N-1}{k}$

Or $\sum_{k=0}^{N-i-1}\binom{N-1}{k}=\sum_{k=0}^{N-i-1}\binom{N-1}{N-1-k}=\sum_{j=i}^{N-1}\binom{N-1}{j}=\sum_{k=i}^{N-1}\binom{N-1}{k}$

Alors $p_i+q_i=\frac{1}{2^{N-1}}\left[\sum_{k=0}^{i-1}\binom{N-1}{k}+\sum_{k=i}^{N-1}\binom{N-1}{k}\right]=\frac{1}{2^{N-1}}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}=\frac{1}{2^{N-1}}2^{N-1}=1$.

Finalement $\forall i \in [\![0,N]\!],\ p_i+q_i=1$.

Soit $i \in [\![0,N]\!]$. Notons S_i l'événement le mobile finit par s'arrêter en N lorsqu'il est parti du point d'abscisse i et notons S'_i l'événement le mobile finit par s'arrêter en lorsqu'il est parti du point d'abscisse i.

S_i et S'_i sont disjoints donc $P(S_i \cup S'_i) = P(S_i) + P(S'_i) = p_i + q_i = 1$

$S_i \cup S'_i$ est quasi-certain et ceci pour tout i dans $[\![0, N]\!]$.

Par conséquent il est quasi-certain que le mobile finisse par s'arrêter

en l'un des deux points d'abscisse 0 ou N.

(Q6) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\{X_n = N\} \subset S_1$ donc $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{X_n = N\} \subset S_1$.

Réciproquement si S_1 est réalisé il existe au moins un instant n où le mobile retourne en N donc il existe un élément n de $\mathbb{N}$ tel que $\{X_n = N\}$ soit réalisé.

Ainsi $S_1 \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{X_n = N\}$.

Finalement $S_1 = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{X_n = N\}$ alors $p_1 = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{X_n = N\}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\{X_n = N\} \subset \{X_{n+1} = N\}$ donc la suite $(\{X_n = N\})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Le théorème de la limite monotone montre que $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{X_n = N\}\right) = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = N)$

Ainsi $p_1 = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = N)$. De même $q_1 = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{X_n = 0\}\right) = \lim_{n \to +\infty} P(X_n = 0)$.

b) Supposons $N = 3$. Rappelons que nous avons montré que

$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = N) = \frac{1}{4}$ et $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 0) = \frac{3}{4}$.

$p_1 = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{1-1} \binom{N-1}{k} = \frac{1}{2^{N-1}} = \frac{1}{2^{3-1}} = \frac{1}{4}$. Alors $q_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Les valeurs de p_1 et q_1 sont cohérentes avec le résultat de I 4 d).