PARTIE I

(Q1) a) s est une application linéaire de F dans $\operatorname{Im} u$ car u est linéaire et que $\operatorname{Im} u = \{u(x) ; x \in E\}$. Notons que s est bijective.

• Soit $x \in \operatorname{Ker} s$. $x \in F$ et $u(x) = 0_{E'}$; $x \in F \cap \operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ ($E = \operatorname{Ker} u \oplus F$) ; $x = 0_E$.
$\operatorname{Ker} s = \{0_E\}$, s est injective.

• Soit $z \in \operatorname{Im} u$. $\exists x \in E$, $u(x) = z$. $\exists! (x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} u \times F$, $x = x_1 + x_2$.
$z = u(x) = u(x_1) + u(x_2) = 0_{E'} + u(x_2)$. $x_2 \in F$ et $u(x_2) = z$; $x_2 \in F$ et $s(x_2) = z$.
$\forall z \in \operatorname{Im} u$, $\exists x_2 \in F$, $s(x_2) = z$; s est surjective.

s est une application linéaire bijective de F sur $\operatorname{Im} u$; s est un isomorphisme de F sur $\operatorname{Im} u$.

b) Soit y un élément de E'. Notons que : $\exists! (x, z) \in F \times F'$, $y = u(x) + z$.

• Existence. $\exists! (y_1, y_2) \in \operatorname{Im} u \times F'$, $y = y_1 + y_2$ car $E' = \operatorname{Im} u \oplus F'$.
$y_1 \in \operatorname{Im} u$, $\exists! x \in F$, $s(x) = y_1$; $x \in F$ et $u(x) = y_1$. $\circledast$

Posons $z = y_2$. Alors $y = u(x) + z$ avec $x \in F$ et $z \in F'$

• Unicité. Supposons que $y = u(x) + z = u(\tilde{x}) + \tilde{z}$ avec $(x, \tilde{x}) \in F^2$ et $(z, \tilde{z}) \in F'^2$.

y se décompose de manière unique comme somme d'un élément de $\operatorname{Im} u$ et de F' donc $u(x) = u(\tilde{x})$ et $z = \tilde{z}$. $(x, \tilde{x}) \in F^2$ donc $s(x) = s(\tilde{x})$. L'injectivité de s donne $x = \tilde{x}$. Ainsi $(x, z) = (\tilde{x}, \tilde{z})$.

$\forall y \in E'$, $\exists! (x, z) \in F \times F'$, $y = u(x) + z$.

Soit $y \in E'$. $\exists! (x, z) \in F \times F'$, $y = u(x) + z$.
$u(x)$ est la projection de y sur $\operatorname{Im} u$ parallèlement à F'. $u(x) = q'(y)$.
$q'(y) \in \operatorname{Im} u$ et $x \in F$ donc $x = s^{-1}(q'(y))$.

$\forall y \in E'$, $\varphi_u(y) = s^{-1}(q'(y))$.

c) La linéarité de q' et s^{-1} donne alors la linéarité de φ_u.
Ainsi φ_u est une application linéaire de E' dans E.

(Q2) a) Supposons que u soit un isomorphisme de E sur E'.
Alors $\ker u = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} u = E'$. Ainsi $F = E$ et $F' = \{0_{E'}\}$.
Notons que $s = u$ et que $q = Id_{E'}$.
$\forall y \in E'$, $\varphi_u(y) = s^{-1}(q'(y)) = s^{-1}(y) = u^{-1}(y)$. $\varphi_u = u^{-1}$.

b) Soit $y \in E'$.
$y \in \ker \varphi_u \Leftrightarrow s^{-1}(q'(y)) = 0_E \Leftrightarrow q'(y) = 0_{E'} \Leftrightarrow y \in \ker q' \Leftrightarrow y \in F'$.

$\ker \varphi_u = F'$.

$\operatorname{Im} \varphi_u = \varphi_u(E) = s^{-1}(q'(E)) = s^{-1}(\operatorname{Im} u) = F$. $\operatorname{Im} \varphi_u = F$.

Soit $y \in E'$. $u(\varphi_u(y)) = u(s^{-1}(q'(y))) = q'(y)$

$$\varphi_u(u(\varphi_u(y))) = \varphi_u(q'(y)) = s^{-1}(q'(q'(y))) \overset{q' \circ q' = q'}{=} s^{-1}(q'(y)) = \varphi_u(y).$$

Ainsi $\forall y \in E'$, $(\varphi_u \circ u \circ \varphi_u)(y) = \varphi_u(y)$.

Soit $x \in E$. $\varphi_u(u(x)) = s^{-1}(q'(u(x)))$; $u(\varphi_u(u(x))) = u(s^{-1}(q'(u(x)))) = q'(u(x)) \overset{u(x) \in \operatorname{Im} u}{=} u(x)$

Alors $\forall x \in E$, $(u \circ \varphi_u \circ u)(x) = u(x)$.

$\varphi_u \circ u \circ \varphi_u = \varphi_u$ et $u \circ \varphi_u \circ u = u$.

c) $\varphi_u \circ u \circ \varphi_u = \varphi_u$; $u \circ \varphi_u \circ u \circ \varphi_u = u \circ \varphi_u$ et $u \circ \varphi_u \in \mathcal{L}(E')$.

Ainsi $u \circ \varphi_u$ est une projection "de E'".

$\varphi_u \circ u \circ \varphi_u = \varphi_u$; $\varphi_u \circ u \circ \varphi_u \circ u = \varphi_u \circ u$ et $\varphi_u \circ u \in \mathcal{L}(E)$.

Ainsi $\varphi_u \circ u$ est une projection de E. Remarque... ceci est en fait inutile ! voir plus loin.

$\forall y\in E'$, $(u\circ\varphi_u)(y) = u(s^{-1}(q'(y))) = s(s^{-1}(q'(y))) = q'(y)$; $u\circ\varphi_u = q'$!!

$u\circ\varphi_u = q'$ est la projection sur $\mathrm{Im}\,u$ parallèlement à F'.

Soit $x\in E$. $x-q(x)\in \mathrm{Ker}\,u$. $u(x-q(x)) = 0_E$; $u(x) = u(q(x))$.

$\varphi_u(u(x)) = \varphi_u(u(q(x))) = s^{-1}(q'(u(q(x)))) \underset{u(q(x))\in \mathrm{Im}\,u}{=} s^{-1}(u(q(x))) \underset{q(x)\in F}{=} s^{-1}s(q(x)) = q(x)$.

$\varphi_u\circ u = q$ est la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Ker}\,u$.

Supposons $\mathrm{rg}\,u = \dim E'$. Alors $\mathrm{Im}\,u = E'$; $q' = Id_{E'}$; $u\circ\varphi_u = Id_{E'}$.

Supposons $\mathrm{rg}\,u = \dim E$. Alors $\dim \mathrm{Ker}\,u = 0$; $F = E$; $q = Id_E$; $\varphi_u\circ u = Id_E$.

Si $\mathrm{rg}\,u = \dim E'$: $u\circ\varphi_u = Id_{E'}$ et φ_u est un inverse à droite de u.
Si $\mathrm{rg}\,u = \dim E$: $\varphi_u\circ u = Id_E$ et φ_u est un inverse à gauche de u.

Q3 a) Soit $y\in E'$. $v(u(v(y))) = v(y)$; $v(u(v(y)) - y)\in \mathrm{Ker}\,v$.

Posons $t = -(u(v(y)) - y)$; $t\in \mathrm{Ker}\,v$ et $y = \underbrace{u(v(y))}_{\in \mathrm{Im}\,u} + \underbrace{t}_{\in \mathrm{Ker}\,v}$.

Ainsi $y\in \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Ker}\,v$

Par conséquent $E'\subset \mathrm{Im}\,u + \mathrm{Ker}\,v$. Comme $\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Ker}\,v \subset E'$: $\mathrm{Im}\,u + \mathrm{Ker}\,v = E'$.

Soit $y\in \mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Ker}\,v$. $\exists t\in E$, $u(t) = y$ et $v(y) = 0$

$y = u(t) = u(v(u(t))) = u(v(y)) = u(0_E) = 0_{E'}$. Ainsi $\mathrm{Im}\,u\cap \mathrm{Ker}\,v = \{0_{E'}\}$.

Finalement $E' = \mathrm{Im}\,u \oplus \mathrm{Ker}\,v$ ... et $u\circ v$ est la projection sur $\mathrm{Im}\,u$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,v$

On montre de même (ou en échangeant les rôles de u et v) que $E = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,v$.
et $v\circ u$ est...

b) Supposons que $\mathrm{Ker}\,v = F'$ et $\mathrm{Im}\,v = F$.

Soit $y\in E'$. Posons $t = -(u(v(y)) - y)$. $t\in \mathrm{Ker}\,v$ et $y = u(v(y)) + t$.

$\mathrm{Ker}\,v = F'$. Donc $u(v(y))\in \mathrm{Im}\,u$ et $t\in F'$; alors $q'(y) = u(v(y))$

$v(y) \in \operatorname{Im} v = F$ donc $q'(y) = u(v(y)) = s(v(y))$; $v(y) = s^{-1}(q'(y)) = \varphi_u(y)$.

Ainsi $\forall y \in E'$, $v(y) = \varphi_u(y)$. $\underline{\underline{v = \varphi_u}}$.

c) $\underline{\underline{\text{Ainsi } \varphi_u \text{ est l'unique application linéaire de } E' \text{ dans } E \text{ telle que :}}}$

$\underline{\underline{\varphi_u \circ u \circ \varphi_u = \varphi_u\ ,\ u \circ \varphi_u \circ u = u\ ,\ \operatorname{Ker} \varphi_u = F' \text{ et } \operatorname{Im} \varphi_u = F.}}$

Q4 a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), u(e_2)) = \operatorname{Vect}(e_2)$.

$\operatorname{rg} u = 1$ donc $\dim \operatorname{Ker} u = 1$ et $e_1 \in \operatorname{Ker} u$. $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(e_1)$.

$\underline{\underline{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(e_1) \text{ et } \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(e_2).}}$

b) Soit $x \in \operatorname{Ker} u \cap F$. $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $x = \alpha e_1 = \beta(te_1 + e_2)$. $\begin{cases} \alpha = \beta t \\ 0 = \beta \end{cases}$; $\alpha = \beta = 0$.

Ainsi $\operatorname{Ker} u \cap F = \{0_E\}$ et $\dim \operatorname{Ker} u + \dim F = 1+1 = 2 = \dim E$.

Alors $\underline{\underline{E = \operatorname{Ker} u \oplus F}}$. On montre de même que $\underline{\underline{E = \operatorname{Im} u \oplus F'}}$.

c) Soit $y \in E$. $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $y = \alpha e_1 + \beta e_2 = \underbrace{\alpha(e_1 + te_2)}_{\in F'} + \underbrace{(\beta - \alpha t) e_2}_{\in \operatorname{Im} u}$

$q(y) = (\beta - \alpha t) e_2$. Or $u(e_2) = e_2$;

$q(y) = (\beta - \alpha t)\, u(e_2) = (\beta - \alpha t)\, u(e_2 + te_1) - \underbrace{(\beta - \alpha t) t u(e_1)}_{= 0_E}$

$q(y) = u((\beta - \alpha t)(e_2 + te_1)) \underset{(\beta - \alpha t)(e_2 + te_1) \in F}{\uparrow}{=} s((\beta - \alpha t)(e_2 + te_1))$; $s^{-1}(q(y)) = (\beta - \alpha t)(e_2 + te_1)$.

Ainsi $\varphi_u(\alpha e_1 + \beta e_2) = \varphi_u(y) = (\beta - \alpha t)(e_2 + te_1)$.

En particulier $\varphi_u(e_1) = -t^2 e_1 - te_2$ et $\varphi_u(e_2) = te_1 + e_2$.

$\underline{\underline{M_B(\varphi_u) = \begin{pmatrix} -t^2 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}}}$

PARTIE II

(Q0) Soit ℓ une projection de E. Notons G_1 sa base et G_2 sa direction.

→ Supposons que $G_2 = G_1^\perp$ et montrons que ℓ est symétrique.

Soit $x \in E$. $\exists ! (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$, $x = x_1 + x_2$.

Soit $y \in E$. $\exists ! (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2$, $y = y_1 + y_2$.

$$\langle \ell(x), y \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \underbrace{\langle x_1, y_2 \rangle}_{=0 \ \left| \begin{array}{l} x_1 \in G_1 \\ y_2 \in G_1^\perp \end{array}\right.} = \langle x_1, y_1 \rangle.$$

De même $\langle \ell(y), x \rangle = \langle y_1, x_1 \rangle$.

Ainsi $\langle \ell(x), y \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle = \langle y_1, x_1 \rangle = \langle x, \ell(y) \rangle$.

$\forall (x, y) \in E^2$, $\langle \ell(x), y \rangle = \langle x, \ell(y) \rangle$. ℓ est symétrique.

→ Supposons que ℓ est symétrique.

Montrons que $G_2 = G_1^\perp$. Il suffit de prouver que G_1 et G_2 sont orthogonaux car G_1 et G_2 sont supplémentaires.

Soit $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$.

$$\langle x_1, x_2 \rangle \underset{\ell(x_1) = x_1 \text{ car } x_1 \in G_1}{=} \langle \ell(x_1), x_2 \rangle \overset{\ell \text{ symétrique}}{=} \langle x_1, \ell(x_2) \rangle \underset{x_2 \in G_2}{=} \langle x_1, 0_E \rangle = 0.$$

Ainsi G_1 et G_2 sont orthogonaux. $G_2 = G_1^\perp$ $(E = G_1 \oplus G_2)$.

Alors ℓ est une projection orthogonale.

Ainsi <u>la projection ℓ est une projection orthogonale si et seulement si ℓ est symétrique.</u>

(Q1) Observons que $(\operatorname{Im} u)^\perp$ est un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ dans E' et que $(\operatorname{Ker} u)^\perp$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. La partie I, avec $F = (\operatorname{Ker} u)^\perp$ et $F' = (\operatorname{Im} u)^\perp$, montre qu'il existe une application linéaire u^+ de E' dans E et une seule telle que :

$\operatorname{Ker} u^+ = (\operatorname{Im} u)^\perp$, $\operatorname{Im} u^+ = (\operatorname{Ker} u)^\perp$, $u \circ u^+ \circ u = u$ et $u^+ \circ u \circ u^+ = u^+$.

(Q2) Pour dire $(u^+)^+ = u$ il suffit de vérifier que u est une application linéaire de E dans E' (c'est clair !) telle que :

$\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u^+)^\perp$, $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u^+)^\perp$, $u^+ \circ u \circ u^+ = u^+$ et $u \circ u^+ \circ u = u$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que : $\mathrm{Ker}\, u = (\mathrm{Im}\, u^+)^\perp$ et $\mathrm{Im}\, u = (\mathrm{Ker}\, u^+)^\perp$.

Or $(\mathrm{Ker}\, u)^\perp = \mathrm{Im}\, u^+$ donc $\mathrm{Ker}\, u \underset{\dim E = p}{=} (\mathrm{Ker}\, u)^{\perp\perp} = (\mathrm{Im}\, u^+)^\perp$.

De même $(\mathrm{Im}\, u)^\perp = \mathrm{Ker}\, u^+$ donc $\mathrm{Im}\, u \underset{\dim E' = n}{=} (\mathrm{Im}\, u)^{\perp\perp} = (\mathrm{Ker}\, u^+)^\perp$

Ainsi $\underline{\underline{(u^+)^+ = u^+.}}$

Q3 a) D'après I Q2c) $u \circ u^+$ est la projection sur $\mathrm{Im}\, u$ parallèlement à $(\mathrm{Im}\, u)^\perp$ et $u^+ \circ u$ est la projection sur $(\mathrm{Ker}\, u)^\perp$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, u$.

Ainsi $\underline{\underline{u \circ u^+ \text{ est la projection orthogonale sur } \mathrm{Im}\, u \text{ et } u^+ \circ u \text{ est la projection orthogonale sur } (\mathrm{Ker}\, u)^\perp.}}$

b) $u \circ u^+ \circ u = u$ donc $AA^+A = A$. $u^+ \circ u \circ u^+ = u^+$ donc $A^+AA^+ = A^+$

AA^+ (resp. A^+A) est la matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{B}$) de la projection orthogonale $u \circ u^+$ (resp. $u^+ \circ u$).

AA^+ (resp. A^+A) est la matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{B}$) d'un endomorphisme symétrique de E' (resp. E). Ainsi AA^+ (resp. A^+A) est symétrique.

Finalement $\underline{\underline{AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A^+,\ {}^t(AA^+) = AA^+ \text{ et } {}^t(A^+A) = A^+A.}}$

c) D'après Q2c) $\mathrm{rg}\, u = p$ donne $u^+ \circ u = \mathrm{Id}_E$ donc $\underline{A^+A = I_p.}$

Supposons toujours $\mathrm{rg}\, u = p$. Alors $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim E - \mathrm{rg}\, u = p - p = 0$; $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$; u est injective.

Soit $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX = 0$. ${}^tX\,{}^tAAX = 0$; $\|AX\| = 0$; $AX = 0$.

Soit x l'élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$. $AX = 0$ donne $u(x) = 0_{E'}$; $x \in \mathrm{Ker}\, u$; $x = 0_E$

Ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, ${}^tAAX = 0 \Rightarrow X = 0$; $\underline{{}^tAA \text{ est inversible}}$.

${}^tA = {}^t(AA^+A) = {}^t((AA^+)A) = {}^tA\,{}^t(AA^+) = {}^tAAA^+$; ${}^tA = ({}^tAA)A^+$; l'inversibilité de ${}^tAA$ donne : $\underline{A^+ = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA.}$

Si rg $u = p$ alors $A^+A = I_p$, ${}^tAA$ est inversible et $A^+ = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$.

De même si rg $u = n$ alors $A^+A = I_n$, $A{}^tA$ est inversible et $A^+ = {}^tA\,(A{}^tA)^{-1}$.

notons ce dernier résultat. rg $u = n$ donne $\dim \mathrm{Im}\, u = \dim E'$; $\mathrm{Im}\, u = E'$.

Alors $q' = \mathrm{Id}_{E'}$; ainsi $u \circ u^+ = \mathrm{Id}_{E'}$; $AA^+ = I_n$.

Soit $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A{}^tAY = 0$; ${}^tYA{}^tAY = 0$; $\|{}^tAY\| = 0$; ${}^tAY = 0$.

Alors ${}^tYA = 0$; ${}^tYAA^+ = 0$; ${}^tYI_n = 0$; ${}^tY = 0$; $Y = 0$.

Ainsi ${}^tAA$ est inversible.

$A = A(A^+A)$; ${}^tA = {}^t(A^+A)\,{}^tA = A^+A\,{}^tA$; $A^+ = A(A{}^tA)^{-1}$.

Q4 D'après I Q3 : $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, v$ et $E' = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, v$.

Soit $x \in E$. $\exists!\,(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\, u \times \mathrm{Im}\, v$, $x = x_1 + x_2$. $u(x) = u(x_2)$; $v(u(x)) = v(u(x_2))$.

Or $\exists t \in E'$, $x_2 = v(t)$. Alors $v(u(x_2)) = v(u(v(t))) = v(t) = x_2$

Ainsi $v \circ u$ est la projection sur $\mathrm{Im}\, v$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, u$.

Comme $v \circ u$ est une projection orthogonale : $\mathrm{Im}\, v = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.

De même $u \circ v$ est la projection sur $\mathrm{Im}\, u$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, v$ et comme c'est une projection orthogonale : $\mathrm{Ker}\, v = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$.

Résumons : $v \in \mathcal{L}(E', E)$, $\mathrm{Ker}\, v = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$, $\mathrm{Im}\, v = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$, $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$,

alors $v = u^+$.

Q5 . AW (resp. WA) est la matrice de $u \circ w$ (resp. $w \circ u$) dans la base orthonormale $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{B}$) de E' (resp. E).

. AW (resp. WA) sont des matrices symétriques.

Ainsi $u \circ w$ (resp. $w \circ u$) est un endomorphisme symétrique de E' (resp. E).

. $AWAW = A(WAW) = AW$; $(u \circ w)^2 = u \circ w$; $u \circ w$ est une projection.

de même $w \circ u$ est une projection.

$u\circ w$ (resp. $w\circ u$) est une projection et un endomorphisme symétrique de E' (resp. E) ; $u\circ w$ et $w\circ u$ sont des projections orthogonales.

$w\in\mathcal{L}(E',E)$, $u\circ w\circ u=u$, $w\circ u\circ w=w$, $u\circ w$ et $w\circ u$ sont des projections orthogonales ; d'après Q4 : $\underline{\underline{w=u^+}}$.

Q6 a) $u\circ u^+$ est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,u$.

Comme $y\in E'$: $\|y-(u\circ u^+)(y)\|=\min\limits_{z\in \mathrm{Im}\,u}\|y-z\|$.

$\|y-u(u^+(y))\|=\min\limits_{t\in E}\|y-u(t)\|$.

$\underline{\underline{u^+(y)\text{ est une pseudo solution de (1).}}}$

Soit $x\in E$.

x pseudo solution de (1) $\Leftrightarrow \|y-u(x)\|=\min\limits_{t\in E}\|y-u(t)\| \Leftrightarrow u(x)$ est la projection orthogonale de y sur $\mathrm{Im}\,u$

x pseudo solution de (1) $\Leftrightarrow u(x)=u\circ u^+(y) \Leftrightarrow u(x-u^+(y))=0$.

x pseudo solution de (1) $\Leftrightarrow x-u^+(y)\in \mathrm{Ker}\,u \Leftrightarrow \exists h\in\mathrm{Ker}\,u,\ x=u^+(y)+h$.

$\underline{\underline{\text{On obtient toutes les pseudo solutions de (1) en ajoutant à } u^+(y) \text{ les éléments de } \mathrm{Ker}\,u.}}$

b) Montrons que $u^+(y)$ est LA pseudo solution de (1) de norme minimale.

Il suffit de prouver que $\forall h\in\mathrm{Ker}\,u,\ h\neq 0_E \Rightarrow \|u^+(y)\|<\|u^+(y)+h\|$

ou $\forall h\in\mathrm{Ker}\,u,\ h\neq 0_E\Rightarrow \|u^+(y)-0_E\|<\|u^+(y)+h\|$; ou encore :

$\forall h\in\mathrm{Ker}\,u,\ h\neq 0_E \Rightarrow \|u^+(y)-0_E\|<\|u^+(y)-h\|$ ($\mathrm{Ker}\,u$ est un sous-espace vectoriel). Ceci signifie encore que 0_E est la projection orthogonale de $u^+(y)$ sur $\mathrm{Ker}\,u$.

Or ceci est clair car $u^+(y) \in \mathrm{Im}\, u^+ = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$!

$u^+(y)$ est la pseudo solution de (1) de norme minimum.

Cf $\mathrm{rg}\, u = p$ donne $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$.

Donc $\underline{\underline{u^+(y) \text{ est l'unique pseudo solution de (1).}}}$

<u>Remarque</u>. — Nous retrouvons ici le cours sur la méthode des moindres carrés.

Trouver $y \in E'$ tel que $\|y - u(x)\| = \min\limits_{t \in E} \|y - u(t)\|$ c'est

trouver $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que : $\|Y - AX\| = \min\limits_{T \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})} \|Y - AT\|$ où Y est la matrice de y dans la base $\mathcal{B}'$.

$\mathrm{rg}\, u = p$ donc $\mathrm{rg}\, A = p$. Le cours indique que le problème admet une solution et une seule : $X = ({}^tAA)^{-1}\, {}^tA\, Y$. Si x est l'élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ alors $x = u^+(y)$ car Q3 cf nous a montré que si $\mathrm{rg}\, u = p$: $({}^tAA)^{-1}\, {}^tA = A^+$.

PARTIE III

(Q1) $u \in \mathcal{L}(E,E')$ et $u^* \in \mathcal{L}(E',E)$ donc $w = u^* \circ u \in \mathcal{L}(E)$.

$M_{\mathcal{B}}(w) = M_{\mathcal{B}}(u^* \circ u) = M(u^*, \mathcal{B}', \mathcal{B}) \times M(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = {}^tAA$.

Remarquons que ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$, ${}^tAA$ est symétrique.

La matrice de w dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ de E est symétrique, ainsi <u>w est un endomorphisme symétrique de E.</u>

(Q2) a) Soit x un élément de E et y un élément de E'.

Soit X la matrice de x dans $\mathcal{B}$ et Y la matrice de y dans $\mathcal{B}'$.

$\langle u(x), y \rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY$.

$\langle x, u^*(y) \rangle = {}^tX\,({}^tAY)$.

Ainsi <u>$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.</u>

b) Soit λ une valeur propre de w. $\exists x \in E$, $x \neq 0_E$ et $w(x) = \lambda x$.

$\lambda \langle x, x \rangle = \langle w(x), x \rangle = \langle u^*(u(x)), x \rangle = \langle x, u^*(u(x)) \rangle = \langle u(x), u(x) \rangle$

Ainsi $\lambda \|x\|^2 = \|u(x)\|^2$; $\lambda = \dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2} \geqslant 0$.

<u>Les valeurs propres de w sont positives.</u>

c) $w = u^* \circ u$ donc clairement $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} w$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} w$. $u^*(u(x)) = 0$; $\langle u^*(u(x)), x \rangle = 0$; $\langle u(x), u(x) \rangle = 0$;

$\|u(x)\| = 0$; $u(x) = 0$; $x \in \operatorname{Ker} u$.

Ainsi $\operatorname{Ker} w = \operatorname{Ker} u$. Alors $\operatorname{rg} w = \dim E - \dim \operatorname{Ker} w = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u = \operatorname{rg} u$.

<u>$\operatorname{rg} w = \operatorname{rg} u = r$.</u>

(Q3) a) • Supposons $\operatorname{Ker} w = \{0_E\}$. $0 \notin \operatorname{Sp}(w)$, ainsi $\operatorname{Sp}(w) \subset \mathbb{R}^*_+$. De plus $r = p$.

w étant symétrique, il existe une base orthonormale $(u_1, \dots, u_p)$ de E constituée de vecteurs propres de w associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

De plus $\forall i \in [\![1,p]\!] = [\![1,r]\!]$, $\lambda_i > 0$. $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_p)$ répond à la question.

- Supposons $\mathrm{Ker}\,\omega \neq \{0_E\}$. Posons $r' = \dim \mathrm{Ker}\,\omega$.

  Comme ω est symétrique, $\mathrm{Im}\,\omega = (\mathrm{Ker}\,\omega)^\perp$. La restriction $\hat{\omega}$ de ω à $\mathrm{Im}\,\omega$ est un endomorphisme symétrique de $\mathrm{Im}\,\omega$. Ainsi il existe une base orthonormale $(u_1, \dots, u_r)$ de $\mathrm{Im}\,\omega$ ($\mathrm{rg}\,\omega = \mathrm{rg}\,u = r \dots$) constituée de vecteurs propres de $\hat{\omega}$ donc de ω associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

  Notons que $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\lambda_i > 0$ ($\lambda_i \geqslant 0$ et $\lambda_i = 0 \Rightarrow u_i \in \mathrm{Ker}\,\omega \cap \mathrm{Im}\,\omega = \mathrm{Ker}\,\omega \cap \mathrm{Ker}\,\omega^\perp = \{0_E\}$!!!)

  Soit $(u_{r+1}, \dots, u_p)$ une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\,\omega$.

  $E = \mathrm{Im}\,\omega \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,\omega$; ainsi $(u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_p)$ est une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de ω respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0$. $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_p)$ répond à la question.

<u>Ainsi, dans les deux cas, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_p)$ de E constituée de vecteurs propres de ω respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, ces valeurs propres vérifiant : $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\lambda_i > 0$ et $\forall i \in [\![r+1,p]\!]$, $\lambda_i = 0$.</u>

<u>b)</u> Soit $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$.

$$\langle y_i, y_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \langle u(u_i), u(u_j) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \langle u_i, u^*(u(u_j)) \rangle.$$

$$\langle y_i, y_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \langle u_i, \omega(u_j) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \langle u_i, \lambda_j u_j \rangle = \frac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}} \langle u_i, u_j \rangle.$$

Si $i = j$: $\langle y_i, y_i \rangle = \dfrac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_i}} \times 1 = 1$; si $i \neq j$: $\langle y_i, y_j \rangle = \dfrac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}} \times 0 = 0$.

Ainsi <u>$(y_1, \dots, y_r)$ est une famille orthonormale de E'.</u>

Q4 a) Soit $i \in [\![r+1,p]\!]$. $\|u(u_i)\|^2 = \langle u(u_i), u(u_i) \rangle = \langle u_i, u^*(u(u_i)) \rangle = \langle u_i, \omega(u_i) \rangle$.

$\|u(u_i)\|^2 = \langle u_i, \omega(u_i) \rangle = \langle u_i, 0_E \rangle = 0$; $u(u_i) = 0_{E'}$.

<u>$\forall i \in [\![r+1,p]\!]$, $u(u_i) = 0_{E'}$.</u>

b) Notons Δ la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}_1=(u_1,\dots,u_p)$ et $\mathcal{B}'_1=(y_1,y_2,\dots,y_n)$.

$\Delta = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_1)^{-1} A \ \mathrm{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)$ car $A = M(u,\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

Posons $P=\mathrm{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)$ et $Q=\mathrm{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_1)$.

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'_1$) sont deux bases orthonormales de E (resp. E') donc P (resp. Q) est inversible et $P^{-1}={}^tP$ (resp. $Q^{-1}={}^tQ$).

$\Delta = Q^{-1}AP$; $Q\Delta P^{-1}=A$; $A = Q\Delta\,{}^tP$.

$\forall i\in [\![1,r]\!]$, $u(u_i)=\sqrt{\lambda_i}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}u(u_i)=\sqrt{\lambda_i}\,y_i$ et $\forall i\in [\![r+1,p]\!]$, $u(u_i)=0_{E'}$.

Ainsi $\Delta=(\delta_{ij})$ avec $\delta_{ij}=\begin{cases}\sqrt{\lambda_i} & \text{si } 1\leq i=j\leq r.\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

c'est ce qu'il fallait prouver.

Q5 a) Notons $\tilde{u}$ l'application linéaire de E dans E' de matrice $\sum_{k=1}^{r}\sqrt{\lambda_k}\,Y_k\,{}^tX_k$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

$\forall i\in [\![1,r]\!]$, $u(u_i)=\sqrt{\lambda_i}\,y_i$ et $\forall i\in [\![r+1,p]\!]$, $u(u_i)=0$.

$\forall i\in [\![1,r]\!]$, $\sum_{k=1}^{r}\sqrt{\lambda_k}\,Y_k\,{}^tX_k X_i \underset{\substack{\uparrow\\(u_1,\dots,u_p)\text{ est une BON}}}{=} \sqrt{\lambda_i}\,Y_i$; $\forall i\in [\![1,r]\!]$, $\tilde{u}(u_i)=\sqrt{\lambda_i}\,y_i=u(u_i)$.

$\forall i\in [\![r+1,p]\!]$, $\sum_{k=1}^{r}\sqrt{\lambda_k}\,Y_k\,{}^tX_k X_i \underset{\substack{\uparrow\\(u_1,\dots,u_p)\text{ est une BON}}}{=} 0$; $\forall i\in [\![r+1,p]\!]$, $\tilde{u}(u_i)=0_{E'}=u(u_i)$.

Ainsi u et $\tilde{u}$ coïncident sur la base $(u_1,\dots,u_p)$ de E ; $u=\tilde{u}$.

Alors $\underline{\underline{A=\sum_{k=1}^{r}\sqrt{\lambda_k}\,Y_k\,{}^tX_k.}}$

b) $A = \sum_{\ell=1}^{r} \sqrt{\lambda_\ell}\, Y_\ell {}^t X_\ell$ donc ${}^tA = \sum_{\ell=1}^{r} \sqrt{\lambda_\ell}\, X_\ell {}^t Y_\ell$.

$${}^tAA = \sum_{\ell=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_\ell}\sqrt{\lambda_i}\, X_\ell {}^t Y_\ell Y_i {}^t X_i \underset{\uparrow}{=} \sum_{\ell=1}^{r} \sqrt{\lambda_\ell}\, X_\ell {}^t X_\ell .$$

$${}^tY_\ell Y_i = \begin{cases} 1 \text{ si } i=\ell \\ 0 \text{ si } i\neq\ell \end{cases}$$

$$A{}^tA = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\ell=1}^{r} \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_\ell}\, Y_i {}^t X_i X_\ell {}^t Y_\ell \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i}\, Y_i {}^t Y_i$$

$${}^tX_i X_\ell = \begin{cases} 1 \text{ si } \ell=i \\ 0 \text{ si } \ell\neq i \end{cases}$$

$$\underline{\underline{{}^tAA = \sum_{\ell=1}^{r} \lambda_\ell X_\ell {}^t X_\ell \quad \text{et} \quad A{}^tA = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i}\, Y_i {}^t Y_i .}}$$

c) Posons $W = \sum_{\ell=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} X_\ell {}^t Y_\ell$. D'après $\varphi 5$, pour prouver que $A^+ = W$ il suffit de prouver que $AWA = A$, $WAW = W$, ${}^t(AW) = AW$ et ${}^t(WA) = WA$ non ?

$$AW = \sum_{\ell=1}^{r}\sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_\ell}\, \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Y_\ell {}^t X_\ell X_i {}^t Y_i = \sum_{\ell=1}^{r} Y_\ell {}^t Y_\ell \ ; \ {}^t(AW) = \sum_{\ell=1}^{r} {}^t(Y_\ell {}^t Y_\ell) = \sum_{\ell=1}^{r} Y_\ell {}^t Y_\ell$$

donc ${}^t(AW) = AW$.

$$WA = \sum_{i=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \sqrt{\lambda_\ell}\, X_i {}^t Y_i Y_\ell {}^t X_\ell = \sum_{i=1}^{r} X_i {}^t X_i \ ; \ {}^t(WA) = \sum_{i=1}^{r} {}^t(X_i {}^t X_i) = \sum_{i=1}^{r} X_i {}^t X_i = WA$$

$$AWA = \left(\sum_{\ell=1}^{r} Y_\ell {}^t Y_\ell\right)\left(\sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i}\, Y_i {}^t X_i\right) = \sum_{\ell=1}^{r}\sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i}\, Y_\ell {}^t Y_\ell Y_i {}^t X_i = \sum_{\ell=1}^{r} \sqrt{\lambda_\ell}\, Y_\ell {}^t X_\ell = A .$$

$$WAW = \left(\sum_{i=1}^{r} X_i {}^t X_i\right)\left(\sum_{\ell=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} X_\ell {}^t Y_\ell\right) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} X_i {}^t X_i X_\ell {}^t Y_\ell = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} X_i {}^t Y_i = W .$$

Ainsi $W = A^+$

Alors $$\underline{\underline{A^+ = \sum_{\ell=1}^{r} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\ell}} X_\ell {}^t Y_\ell .}}$$