SUJET 4

On rappelle que :

→ cos définit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

→ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ 2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

PARTIE I

Q1 n est un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \mathrm{C}_n^{2k} (\cos\theta)^{n-2k}(\cos^2\theta - 1)^k$$

(calculer la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$).

Q2 n est un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer qu'il existe un élément T_n de $\mathbb{R}[X]$ et un seul tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta).$$

b) Préciser la parité de T_n. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$. Donner le degré de T_n.

c) Expliciter T_0, T_1, T_2 et T_3.

Q3 Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$:

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

(on pourra commencer par montrer que ces deux polynômes coïncident en $\cos\theta$).

Q4 $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si k est élément de $[\![0, n-1]\!]$, $y_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ est une racine de T_n.

En déduire avec beaucoup de soin que T_n admet exactement n racines réelles distinctes et que ces racines sont dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Q5 $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser le maximum et le minimum de T_n sur $[-1, 1]$. Montrer que la fonction T_n atteint sur $[-1, 1]$ ses extremums en $n+1$ points que l'on déterminera.

PARTIE II

Dans cette partie E est l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Q1 Montrer que pour tout élément u de E, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} u(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Q2 Pour tout couple (f, g) d'éléments de E on pose : $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans la suite nous noterons $< ., . >$ ce produit scalaire et N la norme associée.

Dans la suite encore, F est le sous espace vectoriel de E constitué par les applications polynômiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Si n appartient à $\mathbb{N}$, F_n est le sous-espace de F constitué par les applications polynômiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus n. On pourra confondre F et $\mathbb{R}[X]$ (resp. F_n et $\mathbb{R}_n[X]$)...

On se propose, pour ω dans $\mathbb{N}$, de trouver l'ensemble $\mathcal{S}_\omega$ des éléments P de F tels que :

$$\forall x \in [-1,1], (1-x^2)\, P''(x) - x\, P'(x) + \omega^2 P(x) = 0.$$

Q3 n est élément de $\mathbb{N}$.

Montrer que $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de F_n (on pourra poser $t = \cos\theta$ ...).

En déduire que si n n'est pas nul, T_n est orthogonal à F_{n-1}.

Calculer la norme $N(T_n)$ de T_n.

Q4 Φ est l'application qui à tout élément P de F associe $\Phi(P)$ défini(e) par

$$\forall x \in [-1,1],\ \Phi(P)(x) = (1-x^2)P''(x) - xP'(x).$$

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de F.

b) P est un élément de F. Préciser la dérivée de $x \to \sqrt{1-x^2}\, P'(x)$ sur $]-1,1[$ (on pourra l'exprimer en fonction de $\Phi(P)$).

c) Soit P un élément de $\operatorname{Ker}\Phi$. Montrer proprement que P' est nulle. Déterminer le noyau de Φ.

Q5 P et Q sont deux éléments de F. Montrer que :

$$< \Phi(P), Q > = < P, \Phi(Q) >$$

(utiliser proprement Q4b)).

Q6 n est élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que F_n est stable par Φ. Φ_n est l'application de F_n dans F_n qui à P dans F_n associe $\Phi(P)$.
Montrer très simplement que Φ_n est un endomorphisme diagonalisable de F_n.

b) Ici n n'est pas nul. Montrer que si P est élément de F_n, il existe un réel λ tel que : $\Phi_n(P) + \lambda P \in F_{n-1}$.

Montrer que si de plus P est orthogonal à F_{n-1} alors il en est de même pour $\Phi_n(P) + \lambda P$.

Montrer dans ce cas que : $\Phi_n(P) + \lambda P = 0$.

c) Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $\Phi_n(T_n) + n^2 T_n = \Phi(T_n) + n^2 T_n = 0$.

Q7 n est dans $\mathbb{N}$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ_n.

Q8 Répondre au problème posé.

PARTIE III

Dans cette partie n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On rappelle que, pour tout élément k de $[\![0, n-1]\!]$ $y_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}\right)$, que y_0, y_1, ..., y_{n-1} sont les zéros de T_n et que $(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1})$ est une base de F_{n-1} donc de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$...

On rappelle encore que pour tout élément k de $\mathbb{N}$ et tout réel θ, $T_k(\cos\theta) = \cos(k\,\theta)$.

Q1 a et b sont deux réels. On suppose que b n'est pas un multiple de 2π. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \cos\left((a + \frac{(n-1)b}{2}\right)\, \frac{\sin(bn/2)}{\sin(b/2)}.$$

Q2 Montrer que si r appartient à $[\![1, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k) = 0$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} T_0(y_k)$.

Montrer que pour tout élément r de $[\![0, n-1]\!]$: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k)$.

Q3 Soit P un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En utilisant la base $(T_0, T_1, \cdots, T_{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(y_k).$$

Q4 Montrer que la formule précédente vaut encore pour les éléments de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (on pourra prendre un élément de cet ensemble et faire la division euclidienne par T_n).

PARTIE VI

---

n appartient à $\mathbb{N}^*$. f est un élément de E que l'on se propose d'approximer à partir de ses valeurs en n points x_0, x_1, ..., x_{n-1} deux à deux distincts de $[-1, 1]$.

Q1 Pout tout g élément de E on pose : $\|g\| = \displaystyle\sup_{t\in[-1,1]} |g(t)| = \max_{t\in[-1,1]} |g(t)|$. Montrer rapidement que l'on définit ainsi une norme sur E.

Q2 On pose : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \psi(P) = (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_{n-1}))$.

Montrer que ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.

En déduire qu'il existe un élément P_f de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et un seul tel que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P_f(x_k) = f(x_k)$.

Q3 On se propose de trouver un majorant de $\|f - P_f\|$.

On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-1, 1]$.

On pose alors $\forall t \in [-1, 1],\ h(t) = f(t) - P_f(t) - AU(t)$ où A est un réel et $U = (X - x_0)(X - x_1)\cdots(X - x_{n-1})$.

a) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-1, 1]$ et que :

$$h^{(n)} = f^{(n)} - A\ n!.$$

b) On $\boxed{\text{fixe}}$ x dans $[-1, 1] - \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Montrer que l'on peut trouver A tel que $h(x) = 0$. A étant ainsi choisi, montrer en itérant le théorème de Rolle que l'on peut trouver un élément de $]-1, 1[$ qui annule $h^{(n)}$.

En déduire que :

$$\exists \alpha_x \in]-1, 1[,\ f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!}\, U(x).$$

Montrer qu'il en est encore ainsi si x appartient à $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

Déduire de ce qui précède que :

$$\|f - P_f\| \leqslant \frac{1}{n!}\, \|f^{(n)}\|\, \|U\|.$$

Q4 Il est alors normal d'essayer de choisir les points x_0, x_1, ..., x_{n-1} de manière à ce que $\|U\|$ soit minimum pour réduire l'erreur que l'on commet en remplaçant f par P_f.

Observons que U est de degré n et unitaire.

a) Montrer que $\widehat{T_n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}\, T_n$ est également unitaire et de degré n. Préciser $\|\widehat{T_n}\|$.

b) Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré n et unitaire. On suppose que : $\|P\| < (1/2^{n-1})$.

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que $P - \widehat{T}_n$ admet au moins n zéros dans $[-1, 1]$.

En déduire que $P = \widehat{T}_n$ (!!) et donc que $\|P\| \geqslant \|\widehat{T}_n\|$.

c) Répondre au problème posé.

Q5 On suppose ici, et dans toute la suite, que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = y_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}\right)$ et que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-1, 1]$.

a) Montrer que :

$$\|f - P_f\| \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|}{2^{n-1}n!}.$$

b) Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k).$$

c) Montrer que :

$$\Big|\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)\Big| \leqslant \frac{\pi\|f^{(n)}\|}{2^{n-1}n!}.$$

Q6 Ici $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) = e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

On se propose de montrer que f est mieux approché par P_f que par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$.

a) Montrer que $\dfrac{1}{e\, n!\, 2^{n-1}} \leqslant \|f - P_f\| \leqslant \dfrac{e}{n!\, 2^{n-1}}$. (on pourra revenir à Q3 b)).

b) Montrer que $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant \|f - S_n\| \leqslant \dfrac{n+2}{(n+1)(n+1)!}$.

c) Morale ?

Q7 On suppose ici f de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1, 1]$. $U = (X - y_0)(X - y_1)\cdots(X - y_{n-1})$.

a) S'inspirer de Q3. pour montrer qu'il existe un élément Q_f de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et un seul tel que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ Q_f(y_k) = f(y_k) \text{ et } Q_f'(y_k) = f'(y_k).$$

b) Montrer que pour tout élément x de $[-1, 1]$:

$$|(f - Q_f)(x)| \leqslant \frac{\|f^{(2n)}\|}{(2n)!}\,U^2(x).$$

(S'inspirer de Q3 ; fixer x et considérer $\ell(t) = f(t) - Q_f(t) - BU^2(t)$; choisir B pour que $\ell(x) = 0$; considérer le nombre de zéros que l'on peut donner à ℓ')

c) Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{Q_f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k).$$

Montrer que :

$$\Big|\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)\Big| \leqslant \frac{2\pi\|f^{(2n)}\|}{2^{2n}(2n)!}.$$