SUJET 4

On rappelle que :

→ cos définit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

→ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ 2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

PARTIE I

Q1 n est un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k} (\cos\theta)^{n-2k} (\cos^2\theta - 1)^k$$

(calculer la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$).

Q2 n est un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer qu'il existe un élément T_n de $\mathbb{R}[X]$ et un seul tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta).$$

b) Préciser la parité de T_n. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$. Donner le degré de T_n.

c) Expliciter T_0, T_1, T_2 et T_3.

Q3 Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$:

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

(on pourra commencer par montrer que ces deux polynômes coïncident en $\cos\theta$).

Q4 $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si k est élément de $[\![0, n-1]\!]$, $y_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ est une racine de T_n.

En déduire avec beaucoup de soin que T_n admet exactement n racines réelles distinctes et que ces racines sont dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Q5 $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser le maximum et le minimum de T_n sur $[-1, 1]$. Montrer que la fonction T_n atteint sur $[-1, 1]$ ses extremums en $n+1$ points que l'on déterminera.

PARTIE II

Dans cette partie E est l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Q1 Montrer que pour tout élément u de E, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} u(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Q2 Pour tout couple (f, g) d'éléments de E on pose : $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans la suite nous noterons $< .,. >$ ce produit scalaire et N la norme associée.

Dans la suite encore, F est le sous espace vectoriel de E constitué par les applications polynômiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Si n appartient à $\mathbb{N}$, F_n est le sous-espace de F constitué par les applications polynômiales de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus n. On pourra confondre F et $\mathbb{R}[X]$ (resp. F_n et $\mathbb{R}_n[X]$)...

On se propose, pour ω dans $\mathbb{N}$, de trouver l'ensemble $\mathcal{S}_\omega$ des éléments P de F tels que :

$$\forall x \in [-1,1], (1-x^2)\,P''(x) - x\,P'(x) + \omega^2 P(x) = 0.$$

Q3 n est élément de $\mathbb{N}$.

Montrer que $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de F_n (on pourra poser $t = \cos\theta$ ...).

En déduire que si n n'est pas nul, T_n est orthogonal à F_{n-1}.

Calculer la norme $N(T_n)$ de T_n.

Q4 Φ est l'application qui à tout élément P de F associe $\Phi(P)$ défini(e) par

$$\forall x \in [-1,1],\ \Phi(P)(x) = (1-x^2)P''(x) - xP'(x).$$

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de F.

b) P est un élément de F. Préciser la dérivée de $x \to \sqrt{1-x^2}\,P'(x)$ sur $]-1,1[$ (on pourra l'exprimer en fonction de $\Phi(P)$).

c) Soit P un élément de $\operatorname{Ker}\Phi$. Montrer proprement que P' est nulle. Déterminer le noyau de Φ.

Q5 P et Q sont deux éléments de F. Montrer que :

$$< \Phi(P), Q > = < P, \Phi(Q) >$$

(utiliser proprement Q4b)).

Q6 n est élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que F_n est stable par Φ. Φ_n est l'application de F_n dans F_n qui à P dans F_n associe $\Phi(P)$.
Montrer très simplement que Φ_n est un endomorphisme diagonalisable de F_n.

b) Ici n n'est pas nul. Montrer que si P est élément de F_n, il existe un réel λ tel que : $\Phi_n(P) + \lambda P \in F_{n-1}$.

Montrer que si de plus P est orthogonal à F_{n-1} alors il en est de même pour $\Phi_n(P) + \lambda P$.

Montrer dans ce cas que : $\Phi_n(P) + \lambda P = 0$.

c) Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $\Phi_n(T_n) + n^2 T_n = \Phi(T_n) + n^2 T_n = 0$.

Q7 n est dans $\mathbb{N}$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ_n.

Q8 Répondre au problème posé.

PARTIE III

Dans cette partie n est un élément de $\mathbb{N}^*$. On rappelle que, pour tout élément k de $[\![0, n-1]\!]$ $y_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$, que y_0, y_1, ..., y_{n-1} sont les zéros de T_n et que $(T_0, T_1, \ldots, T_{n-1})$ est une base de F_{n-1} donc de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$...

On rappelle encore que pour tout élément k de $\mathbb{N}$ et tout réel θ, $T_k(\cos\theta) = \cos(k\,\theta)$.

Q1 a et b sont deux réels. On suppose que b n'est pas un multiple de 2π. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \cos\left((a + \frac{(n-1)b}{2}\right) \frac{\sin(bn/2)}{\sin(b/2)}.$$

Q2 Montrer que si r appartient à $[\![1, n-1]\!]$, $\sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k) = 0$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} T_0(y_k)$.

Montrer que pour tout élément r de $[\![0, n-1]\!]$: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k)$.

Q3 Soit P un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. En utilisant la base $(T_0, T_1, \cdots, T_{n-1})$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(y_k).$$

Q4 Montrer que la formule précédente vaut encore pour les éléments de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (on pourra prendre un élément de cet ensemble et faire la division euclidienne par T_n).

PARTIE VI

---

n appartient à $\mathbb{N}^*$. f est un élément de E que l'on se propose d'approximer à partir de ses valeurs en n points x_0, x_1, ..., x_{n-1} deux à deux distincts de $[-1, 1]$.

Q1 Pout tout g élément de E on pose : $\|g\| = \operatorname*{Sup}_{t\in[-1,1]} |g(t)| = \operatorname*{Max}_{t\in[-1,1]} |g(t)|$. Montrer rapidement que l'on définit ainsi une norme sur E.

Q2 On pose : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \psi(P) = (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_{n-1}))$.

Montrer que ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.

En déduire qu'il existe un élément P_f de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et un seul tel que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P_f(x_k) = f(x_k)$.

Q3 On se propose de trouver un majorant de $\|f - P_f\|$.

On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-1, 1]$.

On pose alors $\forall t \in [-1, 1],\ h(t) = f(t) - P_f(t) - AU(t)$ où A est un réel et $U = (X - x_0)(X - x_1)\cdots(X - x_{n-1})$.

a) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-1, 1]$ et que :

$$h^{(n)} = f^{(n)} - A\ n!.$$

b) On fixe x dans $[-1, 1] - \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Montrer que l'on peut trouver A tel que $h(x) = 0$. A étant ainsi choisi, montrer en itérant le théorème de Rolle que l'on peut trouver un élément de $]-1, 1[$ qui annule $h^{(n)}$.

En déduire que :

$$\exists \alpha_x \in]-1, 1[,\ f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!}\,U(x).$$

Montrer qu'il en est encore ainsi si x appartient à $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

Déduire de ce qui précède que :

$$\|f - P_f\| \leqslant \frac{1}{n!}\,\|f^{(n)}\|\,\|U\|.$$

Q4 Il est alors normal d'essayer de choisir les points x_0, x_1, ..., x_{n-1} de manière à ce que $\|U\|$ soit minimum pour réduire l'erreur que l'on commet en remplaçant f par P_f.

Observons que U est de degré n et unitaire.

a) Montrer que $\widehat{T}_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\,T_n$ est également unitaire et de degré n. Préciser $\|\widehat{T}_n\|$.

b) Soit P un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ de degré n et unitaire. On suppose que : $\|P\| < (1/2^{n-1})$.

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que $P - \widehat{T}_n$ admet au moins n zéros dans $[-1,1]$.

En déduire que $P = \widehat{T}_n$ (!!) et donc que $\|P\| \geqslant \|\widehat{T}_n\|$.

c) Répondre au problème posé.

Q5 On suppose ici, et dans toute la suite, que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = y_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ et que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-1,1]$.

a) Montrer que :

$$\|f - P_f\| \leqslant \frac{\|f^{(n)}\|}{2^{n-1}n!}.$$

b) Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k).$$

c) Montrer que :

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)\right| \leqslant \frac{\pi\|f^{(n)}\|}{2^{n-1}n!}.$$

Q6 Ici $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

On se propose de montrer que f est mieux approché par P_f que par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$.

a) Montrer que $\frac{1}{e\,n!\,2^{n-1}} \leqslant \|f - P_f\| \leqslant \frac{e}{n!\,2^{n-1}}$. (on pourra revenir à Q3 b)).

b) Montrer que $\frac{1}{(n+1)!} \leqslant \|f - S_n\| \leqslant \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}$.

c) Morale ?

Q7 On suppose ici f de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$. $U = (X - y_0)(X - y_1)\cdots(X - y_{n-1})$.

a) S'inspirer de Q3. pour montrer qu'il existe un élément Q_f de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et un seul tel que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ Q_f(y_k) = f(y_k) \text{ et } Q'_f(y_k) = f'(y_k).$$

b) Montrer que pour tout élément x de $[-1,1]$:

$$|(f - Q_f)(x)| \leqslant \frac{\|f^{(2n)}\|}{(2n)!}\,U^2(x).$$

(S'inspirer de Q3 ; fixer x et considérer $\ell(t) = f(t) - Q_f(t) - BU^2(t)$; choisir B pour que $\ell(x) = 0$; considérer le nombre de zéros que l'on peut donner à ℓ')

c) Montrer que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{Q_f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k).$$

Montrer que :

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)\right| \leqslant \frac{2\pi\|f^{(2n)}\|}{2^{2n}(2n)!}.$$

PARTIE I

Q1 $n\in\mathbb{N}, \theta\in\mathbb{R}$. $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k(\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k$.

donc $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}\, i^{2k}(\sin\theta)^{2k}+\sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} C_n^{2k+1}(\cos\theta)^{n-(2k+1)}\, i^{2k+1}(\sin\theta)^{2k+1}$. ← à un chiffre près.

Ainsi $\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(-1)^k(\sin\theta)^{2k}+i\sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} C_n^{2k+1}(\cos\theta)^{n-(2k+1)}(-1)^k(\sin\theta)^{2k+1}$.

Par conséquent : $\cos n\theta=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k$.

Finalement $\forall n\in\mathbb{N}, \forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(n\theta)=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(\cos^2\theta-1)^k$.

Q2 $n\in\mathbb{N}$. a) Posons $\boxed{T_n=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}X^{n-2k}(X^2-1)^k}$.

$T_n\in\mathbb{R}[X]$ et $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta)=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(\cos^2\theta-1)^k=\cos n\theta$. T_n est donc une solution.

Supposons que $\hat{T}_n$ soit une seconde solution. Ainsi $\hat{T}_n\in\mathbb{R}[X]$ et $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\hat{T}_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$.

$T_n-\hat{T}_n\in\mathbb{R}[X]$ et $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $(T_n-\hat{T}_n)(\cos\theta)=T_n(\cos\theta)-\hat{T}_n(\cos\theta)=\cos n\theta-\cos n\theta=0$.

Ainsi peut-on dire que : $\forall x\in[-1,1]$, $(T_n-\hat{T}_n)(x)=0$.

$T_n-\hat{T}_n$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ admettant une infinité de racines donc $T_n-\hat{T}_n=0$. $\hat{T}_n=T_n$.

$$\exists!\, T_n\in\mathbb{R}[X],\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos n\theta=T_n(\cos\theta)\ ;\ T_n=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}X^{n-2k}(X^2-1)^k.$$

b) $T_n(-X)=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(-X)^{n-2k}((-X)^2-1)^k=\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}(-1)^n\underbrace{(-1)^{-2k}}_{=1}X^{n-2k}(X^2-1)^k=(-1)^nT_n(X)$.

$T_n(-X)=(-1)^nT_n(X)$. T_n a la parité de n.

$T_n(1)=T_n(\cos 0)=\cos(n\times 0)=1$. $T_n(-1)=(-1)^nT_n(1)=(-1)^n$.

$T_n(1)=1$ et $T_n(-1)=(-1)^n$. clairement $\deg T_n=n$ (le coeff. de X^n dans T_n est $\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}$)

c) $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(0\theta)=(\cos\theta)^0$; $T_0=1$. $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1$; $T_2=2X^2-1$.

$\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(1\theta)=(\cos\theta)^1$; $T_1=X$. $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\cos(3\theta)=4\cos^3\theta-3\cos\theta$; $T_3=4X^3-3X$.

$T_0=1$. $T_1=X$. $T_2=2X^2-1$. $T_3=4X^3-3X$. Ces résultats s'obtiennent aussi avec la formule donnée en a)

... $T_4=8X^4-8X^2+1$ et $T_5=16X^5-20X^3+5X$.

(Q3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour montrer que $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ il suffit de prouver que $T_{n+2} - (2XT_{n+1} - T_n)$ est le polynôme nul ce qui peut se faire en lui donnant une infinité de racines. Posons $H_n = T_{n+2} - (2XT_{n+1} - T_n)$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $H_n(\cos\theta) = T_{n+2}(\cos\theta) - 2\cos\theta\, T_{n+1}(\cos\theta) + T_n(\cos\theta)$

$$H_n(\cos\theta) = \cos((n+2)\theta) - 2\cos\theta\, \cos((n+1)\theta) + \cos(n\theta)$$

$$H_n(\cos\theta) = \cos((n+2)\theta) - [\cos(\theta + (n+1)\theta) + \cos(\theta - (n+1)\theta)] + \cos(n\theta)$$

$$H_n(\cos\theta) = \cos((n+2)\theta) - \cos((n+2)\theta) - \cos(-n\theta) + \cos(n\theta) = 0.$$

Ainsi $\forall x \in [-1,1]$, $H_n(x) = 0$.

H_n admet une infinité de racines donc $H_n = 0$. $\underline{\underline{T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n}}$.

(Q4) $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. $T_n(y_k) = T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(n\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$.

donc pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\underline{\underline{y_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) \text{ est un zéro de } T_n.}}$

Notons que cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Posons $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\theta_k = \frac{\pi}{2n} + k \times \frac{\pi}{n}$.

$\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\frac{\pi}{2n} \leq \theta_k = \frac{\pi}{2n} + k \times \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2n} + (n-1)\frac{\pi}{n} = \frac{2n-1}{2n}\pi < \pi$.

Ainsi : $0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} < \pi$ donc $-1 < \cos\theta_{n-1} < \cos\theta_{n-2} < \dots < \cos\theta_0 < 1$

Ainsi $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ sont n éléments deux à deux distincts de $]-1,1[$.

T_n a donc n racines réelles distinctes $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ appartenant à $]-1,1[$.

Comme T_n est de degré n : $\underline{\underline{T_n \text{ admet exactement } n \text{ racines réelles et ces racines sont dans l'intervalle }]-1,1[.}}$

(Q5) . $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que T_n est continue sur le segment $[-1,1]$ donc y possède un maximum et un minimum.

$$\max_{x \in [-1,1]} (T_n(x)) = \max_{\theta \in [0,\pi]} T_n(\cos\theta) = \max_{\theta \in [0,\pi]} (\cos(n\theta)) = 1 \quad (\text{prendre } \theta = 0 \dots).$$

$$\min_{x \in [-1,1]} (T_n(x)) = \min_{\theta \in [0,\pi]} T_n(\cos\theta) = \min_{\theta \in [0,\pi]} (\cos(n\theta)) = -1 \quad (\text{prendre } \theta = \frac{\pi}{n} \dots).$$

Soit $x \in [-1,1]$. $\exists!\, \theta \in [0,\pi]$, $x = \cos\theta$.

$T_n(x) = \pm 1 \Leftrightarrow T_n(\cos\theta) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos(n\theta) = \pm 1 \Leftrightarrow n\theta \equiv 0\ [\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv 0\ [\frac{\pi}{n}]$

$T_n(x) = \pm 1 \underset{\theta \in [0,\pi]}{\Leftrightarrow} \exists k \in [\![0,n]\!], \theta = k\frac{\pi}{n} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,n]\!], x = \cos\frac{k\pi}{n}$.

$\underline{\underline{T_n \text{ admet sur } [-1,1] \text{ ses extremums en } n+1 \text{ points : } 1, \cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{2\pi}{n}, \dots, \cos\frac{(n-1)\pi}{n}, -1.}}$

PARTIE II

Le texte de Q1 a été modifié. $\hat{f}$ est devenu u. Pour $\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^{\pi}u(\cos\theta)d\theta$ voir Q3.

Q1. Soit $\hat{f}\in E$. $t\mapsto\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

$\hat{f}$ est continue sur $[-1,1]$ donc $\exists M\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall t\in[-1,1]$, $|\hat{f}(t)|\leqslant M$.

$\forall t\in[0,1[$, $\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|\leqslant\frac{M}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\leqslant\frac{M}{(1-t)^{1/2}}$ $\left(\sqrt{1+t}\geqslant 1 \text{ si } t\in[0,1[\right)$.

La convergence de $\int_0^1\frac{M\,dt}{(1-t)^{1/2}}$ et la positivité de $t\mapsto\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|$ montrent que $\int_0^1\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|dt$ converge.

$\forall t\in]-1,0]$, $\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|\leqslant\frac{M}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\leqslant\frac{M}{(1+t)^{1/2}}$ $(\sqrt{1-t}\geqslant 1 \text{ si } t\in]-1,0])$.

La convergence de $\int_{-1}^0\frac{M}{(1+t)^{1/2}}dt$ et la positivité de $t\mapsto\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|$ montrent que $\int_{-1}^0\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|dt$ converge.

Ainsi $\int_{-1}^1\left|\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right|dt$ converge. $\int_{-1}^1\frac{\hat{f}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est absolument convergente donc convergente.

Q2 Notons que si $(f,g)\in E^2$, $fg\in E$ donc $\varphi(f,g)$ a un sens d'après Q1.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(f,g,h)\in E^3$, $\varphi(\lambda f+g,h)=\int_{-1}^1\frac{(\lambda f+g)(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_{-1}^1\frac{\lambda f(t)h(t)+g(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\lambda\int_{-1}^1\frac{f(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int_{-1}^1\frac{g(t)h(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Donc $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(f,g)\in E^2$, $\varphi(\lambda f+g,h)=\lambda\varphi(f,h)+\varphi(g,h)$.

$\forall(f,g)\in E^2$, $\varphi(f,g)=\int_{-1}^1\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_{-1}^1\frac{g(t)f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\varphi(g,f)$. $\forall(f,g)\in E^2$, $\varphi(f,g)=\varphi(g,f)$.

Soit $f\in E$. $\forall t\in]-1,1[$, $\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\geqslant 0$, donc $\varphi(f,f)=\int_{-1}^1\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\geqslant 0$. positivité de la fonction...

Supposons $\varphi(f,f)=0$. $\forall\varepsilon\in]0,1[$, $0\leqslant\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\leqslant\int_{-1}^1\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=0$

Ainsi $\forall\varepsilon\in]0,1[$, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$. Or $t\mapsto\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$... donc sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$...

Par conséquent $\forall\varepsilon\in]0,1[$, $\forall t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, $\frac{f^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}=0$, $\forall\varepsilon\in]0,1[$, $\forall t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$, $f(t)=0$.

Ainsi $\forall t\in]-1,1[$, $f(t)=0$.

$f(-1)=\lim_{t\to-1}f(t)=0$ et $f(1)=\lim_{t\to1}f(t)=0$ car f est continue en -1 et 1. Donc f est nulle.

Ainsi $\forall f\in E$, $\varphi(f,f)\geqslant 0$ et $\forall f\in E$, $\varphi(f,f)=0_E\Rightarrow f=0_E$. φ est un produit scalaire sur E.

Q3 Soit $(f,g)\in E^2$.

Soit $\alpha\in]-1,1[$ et $\beta\in]-1,1[$. $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \overset{t=\cos\theta}{=} \int_{\operatorname{Arccos}\alpha}^{\operatorname{Arccos}\beta} \frac{f(\cos\theta)g(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta)\,d\theta = \int_{\operatorname{Arccos}\alpha}^{\operatorname{Arccos}\beta} f(\cos\theta)g(\cos\theta)\frac{-\sin\theta}{|\sin\theta|}\,d\theta$

$\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{\operatorname{Arccos}\beta}^{\operatorname{Arccos}\alpha} f(\cos\theta)g(\cos\theta)\,d\theta$ $\quad$ ($\sin\theta\geq 0$ si $\theta\in[0,\pi]$...)

$\lim\limits_{\beta\to 1^-}\operatorname{Arccos}\beta = 0$ et $\lim\limits_{\alpha\to -1^+}\operatorname{Arccos}\alpha = \pi$. Ainsi $\displaystyle\underline{\underline{\int_{-1}^{1}\frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^\pi f(\cos\theta)g(\cos\theta)\,d\theta}}$.

Soit $(i,j)\in[\![0,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$.

$\displaystyle\langle T_i,T_j\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{T_i(t)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^\pi T_i(\cos\theta)T_j(\cos\theta)\,d\theta = \int_0^\pi \cos(i\theta)\cos(j\theta)\,d\theta$

$\displaystyle\langle T_i,T_j\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((i+j)\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((i-j)\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((i+j)\theta)}{i+j}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((i-j)\theta)}{i-j}\right]_0^\pi = 0$

$\forall (i,j)\in[\![0,n]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow \langle T_i,T_j\rangle = 0$. $(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est une famille orthogonale de F_n.

$\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\deg T_k = k$; $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $T_k\neq 0$!

$(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est une famille orthogonale de F_n constituée de vecteurs non nuls ;

$(T_0,T_1,\dots,T_n)$ est alors une famille libre de $n+1$ éléments de F_n, qui est de dimension $n+1$.

$\underline{\underline{(T_0,T_1,\dots,T_n) \text{ est une base orthogonale de } F_n}}$. Maintenant si $n\in\mathbb{N}^*$, $\underline{\underline{T_n \text{ est orthogonal à } \operatorname{Vect}(T_0,\dots,T_{n-1}) = F_{n-1}}}$

$\displaystyle N^2(T_n) = \langle T_n,T_n\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{T_n^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^\pi T_n^2(\cos\theta)\,d\theta = \int_0^\pi (\cos(n\theta))^2\,d\theta = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2n\theta)}{2}\,d\theta$

* $n=0$ $\quad \displaystyle N^2(T_n) = \int_0^\pi \frac{1+1}{2}\,d\theta = \pi$

* $n\geq 1$ $\quad \displaystyle N^2(T_n) = \int_0^\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2n\theta)}{2}\right)d\theta = \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(2n\theta)}{4n}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

$\underline{\underline{N(T_0) = \sqrt{\pi}}}$ et $\underline{\underline{N(T_n) = \sqrt{\pi/2} \text{ si } n\in\mathbb{N}^*}}$.

Q4 a) Par définition de F si $P\in F$ alors $\phi(P)\in F$. ϕ est une application de F dans F.

Soient $(P,Q)\in F^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$\forall x\in[-1,1]$, $\phi(\lambda P+Q)(x) = (1-x^2)(\lambda P+Q)''(x) - x(\lambda P+Q)'(x) = (1-x^2)(\lambda P''(x)+Q''(x)) - x(\lambda P'(x)+Q'(x))$.

$\forall x\in[-1,1]$, $\phi(\lambda P+Q)(x) = \lambda\left[(1-x^2)P''(x) - xP'(x)\right] + \left[(1-x^2)Q''(x) - xQ'(x)\right]$.

$\forall x\in[-1,1]$, $\phi(\lambda P+Q)(x) = \lambda\,\phi(P)(x) + \phi(Q)(x) = [\lambda\phi(P)+\phi(Q)](x)$.

$\underline{\underline{\phi(\lambda P+Q) = \lambda\,\phi(P)+\phi(Q)}}$.

Ainsi $\underline{\phi \text{ est un endomorphisme de } F.}$

b) $P \in F$. $u : x \mapsto \sqrt{1-x^2}\, P'(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]-1,1[$.

$\forall x \in]-1,1[$, $u'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} P'(x) + \sqrt{1-x^2}\, P''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left((1-x^2) P''(x) - x P'(x) \right)$

$\forall x \in]-1,1[$, $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \phi(P)(x)$.

c) Soit $P \in \operatorname{Ker} \phi$. $\forall x \in [-1,1]$, $\phi(P)(x) = 0$.

Ainsi, en utilisant la relation de b) : $\forall x \in]-1,1[$, $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \phi(P)(x) = 0$.

Donc u' est nulle sur $]-1,1[$. Par conséquent u est constante sur $]-1,1[$.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-1,1[$, $u(x) = \sqrt{1-x^2}\, P'(x) = \lambda$. $\forall x \in]-1,1[$, $P'(x) = \lambda \times \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Or $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} P'(x) = P'(1)$ donc nécessairement $\lambda = 0$!

Ainsi $\forall x \in]-1,1[$, $P'(x) = 0$. P' étant continue sur $[-1,1]$: $\forall x \in [-1,1]$, $P'(x) = 0$.

P est donc constante sur $[-1,1]$. $P \in F_0$.

Réciproquement si $P \in F_0$: $P' = P'' = 0$ et $\phi(P) = 0$ donc $P \in \operatorname{Ker} \phi$.

Ainsi $\underline{\operatorname{Ker} \phi = F_0.}$

Q5 $(P,Q) \in F^2$. Soit $(\alpha, \beta) \in]-1,1[^2$.

$$\int_\alpha^\beta \frac{\phi(P)(t)\, Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ u : x \mapsto \sqrt{1-x^2}\, P'(x)}}{=} \int_\alpha^\beta u'(t) Q(t)\, dt = \left[u(t) Q(t) \right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(t) Q'(t)\, dt$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\phi(P)(t)\, Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \left[\sqrt{1-t^2}\, P'(t) Q(t) \right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \left(P'(t) Q'(t) \sqrt{1-t^2} \right) dt$$

$$\lim_{\beta \mapsto 1^-} \left(\sqrt{1-\beta^2}\, P'(\beta) Q(\beta) \right) = \lim_{\alpha \mapsto -1^+} \left(\sqrt{1-\alpha^2}\, P'(\alpha) Q(\alpha) \right) = 0$$

Ainsi : $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\phi(P)(t)\, Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = -\int_{-1}^1 \left(P'(t) Q'(t) \sqrt{1-t^2} \right) dt$

Donc $\underline{\langle \phi(P), Q \rangle = -\displaystyle\int_{-1}^1 P'(t) Q'(t) \sqrt{1-t^2}\, dt}$

En échangeant P et Q on obtient : $\langle \phi(Q), P\rangle = -\int_{-1}^{1} Q'(t)P'(t)\sqrt{1-t^2}\,dt$

Ainsi $\langle \phi(P), Q\rangle = -\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = -\int_{-1}^{1} Q'(t)P'(t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \langle \phi(Q), P\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle$.

$\forall (P,Q)\in F^2$, $\langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle$. ϕ est un endomorphisme symétrique de E

Q6 a) Soit $P\in F_n$. P est polynômiale de degré au plus n et :
$\forall x\in[-1,1]$, $\phi(P) = (1-x^2)P''(x) - xP'(x)$, donc $\phi(P)$ est également polynômiale de de degré au plus n ($\deg P'' \leq n-2$ et $\deg P' \leq n-1$)

Donc $\forall P\in F_n$, $\phi(P)\in F_n$. F_n est stable par ϕ.

Par définition ϕ_n est une application de F_n dans F_n.
$\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\forall (P,Q)\in F_n^2$, $\phi_n(\lambda P+Q) = \phi(\lambda P+Q) = \lambda\phi(P)+\phi(Q) = \lambda\phi_n(P)+\phi_n(Q)$.
ϕ_n est donc un endomorphisme de F_n.
$\forall (P,Q)\in F_n^2$, $\langle \phi_n(P), Q\rangle = \langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle = \langle P, \phi_n(Q)\rangle$.

ϕ_n est un endomorphisme symétrique de F_n.

Ainsi ϕ_n est un endomorphisme diagonalisable de F_n.

b) $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $P\in F_n$

Clairement si $P\in F_{n-1}$ pour tout réel λ, $\phi_n(P)+\lambda P\in F_{n-1}$ car F_{n-1} est stable par ϕ donc par ϕ_n.
On peut donc se contenter de traiter le cas où P est de degré n ... ce que nous ne ferons pas !
Reprenons P dans F_n et notons a_n le coefficient de X^n dans P (si $P\in F_{n-1}$, $a_n=0$!). → ou de x^n...
Le coefficient de X^n dans $\phi_n(P)$ est : $-n(n-1)a_n - na_n = -n^2a_n$.
Ainsi $\phi_n(P)+n^2P$ est un élément de F_n dont le coefficient de X^n est nul.

Donc $\phi_n(P)+n^2P\in F_{n-1}$. Si $P\in F_n$, $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $\phi_n(P)+\lambda P\in F_{n-1}$.

Supposons de plus : P orthogonal à F_{n-1}.

$\forall Q \in F_{n-1}$, $\langle P, Q\rangle = 0$.

$\forall Q \in F_{n-1}$, $\langle \phi_n(P)+\lambda P, Q\rangle = \langle \phi_n(P), Q\rangle + \lambda\langle P, Q\rangle = \langle \phi_n(P), Q\rangle = \langle P, \phi_n(Q)\rangle$

Or si Q appartient à F_{n-1}, $\phi_n(Q) = \phi(Q)$ appartient à F_{n-1} car F_{n-1} est stable par ϕ.

Comme P est orthogonal à F_{n-1} il vient $\forall Q \in F_{n-1}$, $\langle P, \phi_n(Q)\rangle = 0$.

Donc $\forall Q \in F_{n-1}$, $\langle \phi_n(P)+\lambda P, Q\rangle = 0$; $\underline{\phi_n(P)+\lambda P \text{ est orthogonal à } F_{n-1}}$.

$\phi_n(P)+\lambda P \in F_{n-1}$ et $\phi_n(P)+\lambda P \in F_{n-1}^{\perp}$ donc $\underline{\phi_n(P)+\lambda P = 0}$

Nous venons en fait de prouver que si $\underline{P \in F_{n-1}^{\perp} : \phi_n(P)+\lambda P = 0 \text{ avec } \lambda = n^2}$.

c) Tout est clair. Notons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \in F_n$.

1er cas.. $n \in \mathbb{N}^*$. D'après Q3, T_n est orthogonal à F_{n-1} d'après ce qui précède : $\phi_n(T_n) + n^2 T_n = 0$. Donc $\phi(T_n) + n^2 T_n = 0$

2e cas.. $n = 0$. $\phi(T_n) + n^2 T_n = \phi(T_0) = 0$ ($T_0' = T_0'' = 0$ car $T_0 \in F_0 = \operatorname{Ker}\phi$).

Finalement : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ \phi_n(T_n) + n^2 T_n = \phi(T_n) + n^2 T_n = 0}$.

Q7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. $F_k \subset F_n$.

$$\phi_n(T_k) + k^2 T_k = \phi(T_k) + k^2 T_k = 0.$$

Donc $\phi_n(T_k) = -k^2 T_k$ et $T_k \neq 0$. Par conséquent $-k^2 \in Sp(\phi_n)$.

ϕ_n admet au moins $n+1$ valeurs propres distinctes $0, -1, -2^2, \dots, -n^2$. Comme ϕ_n est un endomorphisme de F_n espace vectoriel de dimension $n+1$, ϕ_n a au plus $n+1$ valeurs propres distinctes.

Ainsi $\underline{0, -1, -2^2, \dots, -n^2 \text{ sont les valeurs propres de } \phi_n}$ et les sous-espaces propres de ϕ_n sont des droites vectorielles.

<u>Remarque</u>.- $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $SEP(\phi_n, -k^2) = \operatorname{Vect}(T_k)$.

Q8. $\omega \in \mathbb{N}$. Posons $S_\omega = \{P \in F \mid \forall x \in [-1,1],\ (1-x^2)P''(x) - xP'(x) + \omega^2 P(x) = 0\}$.

D'après ce qui précède : $\operatorname{Vect}(T_\omega) \subset S_\omega$. Réciproquement soit $P \in S_\omega$. Si $P = 0$: $P \in \operatorname{Vect}(T_\omega)$.

Supposons P non nul et notons n son degré. $\phi_n(P) = -\omega^2 P$. $-\omega^2 \in Sp(\phi_n)$ et $P \in SEP(\phi_n, -\omega^2) = \operatorname{Vect}(T_\omega)$

Donc $P \in \operatorname{Vect}(T_\omega)$.

Finalement $\underline{S_\omega = \operatorname{Vect}(T_\omega)}$.

$n \in \mathbb{N}^*$

PARTIE III

Q1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \mathrm{Re}\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kb)}}_{e^{ia}(e^{ib})^k}\Big) = \mathrm{Re}\Big(e^{ia}\,\frac{1-(e^{ib})^n}{1-e^{ib}}\Big)$ car $e^{ib} \neq 1$ $(b \not\equiv 0\,[2\pi])$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \mathrm{Re}\Big(e^{ia}\,\frac{e^{i\frac{bn}{2}}}{e^{ibn/2}}\,\frac{e^{-ibn/2}-e^{ibn/2}}{e^{-ib/2}-e^{+ib/2}}\Big) = \mathrm{Re}\Big(e^{i(a+\frac{bn}{2}-\frac{b}{2})}\,\frac{-2i\sin(bn/2)}{-2i\sin(b/2)}\Big)$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \cos\Big(a+\frac{(n-1)b}{2}\Big)\,\frac{\sin(bn/2)}{\sin(b/2)}$.

Q2 Soit $r \in [\![1,n-1]\!]$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k) = \sum_{k=0}^{n-1} T_r\Big(\cos\Big(\frac{\pi}{2n}+k\frac{\pi}{n}\Big)\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\Big(r\Big(\frac{\pi}{2n}+k\frac{\pi}{n}\Big)\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\Big(\frac{r\pi}{2n}+k\,\frac{r\pi}{n}\Big)$$

$r \in [\![1,n-1]\!]$ donc $\frac{r\pi}{n}$ n'est pas un multiple de 2π. Nous pouvons appliquer Q1 avec $a = \frac{r\pi}{2n}$ et $b = \frac{r\pi}{n}$. Voici alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k) = \cos\Big(\frac{r\pi}{2n}+\frac{(n-1)\frac{r\pi}{n}}{2}\Big)\,\frac{\sin\big(\big(\frac{r\pi}{n}\times n\big)\times\frac{1}{2}\big)}{\sin(r\pi/2n)} = \cos\frac{r\pi}{2}\,\frac{\sin\big(\frac{r\pi}{2}\big)}{\sin(r\pi/2n)} \overset{\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin(2\alpha)}{=} \frac{1}{2}\,\frac{\sin(r\pi)}{\sin(r\pi/2n)} = 0$$

Ainsi $\forall r \in [\![1,n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k) = 0$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} T_0(y_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n. \qquad \sum_{k=0}^{n-1} T_0(y_k) = n.$$

Soit $r \in [\![0,n-1]\!]$.

1ère cas.. $r \geq 1$. T_r est orthogonal à $T_0 = 1$ donc $\langle T_r, 1\rangle = 0$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0 = \frac{\pi}{n}\times 0 = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k)$.

2ème cas.. $r=0$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{1\times 1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = N^2(1) = N^2(T_0) = \pi = \frac{\pi}{n}\times n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_0(y_k)$.

Donc $\forall r \in [\![0,n-1]\!]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k)$.

Q3 Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $P = \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_r T_r$

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_r \int_{-1}^{1} \frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{r=0}^{n-1} \alpha_r \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{r=0}^{n-1} \alpha_r T_r(y_k) \right) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(y_k).$$

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(y_k).$$

Q4 Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. $\exists! (Q, R) \in \mathbb{R}[X]$, $P = Q T_n + R$ avec $\deg R < \deg T_n = n$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(y_k) = Q(y_k) T_n(y_k) + R(y_k) = R(y_k)$ $\quad (T_n(y_k) = 0)$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(y_k) = R(y_k)$.

$Q T_n = P - R$ et $P - R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ ainsi $\deg Q + n = \deg Q + \deg T_n = \deg(Q T_n) \leq 2n-1$

Par conséquent : $\deg Q \leq n-1$.

T_n est orthogonal à $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$ donc à $\mathrm{Vect}(T_0, T_1, \dots, T_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Comme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$: $\langle Q, T_n \rangle = 0$. Ainsi $\int_{-1}^{1} \frac{Q(t) T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0$.

Donc $$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t) T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \underset{R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]}{=} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n} R(y_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n} P(y_k)$$

Donc $$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n} P(y_k).$$

PARTIE IV

Q1 - Soit $g \in E$. $\|g\| = \sup_{t\in[-1,1]} |g(t)| = \max_{t\in[-1,1]} |g(t)|$ existe car $|g|$ est continue sur le segment $[-1,1]$. De plus $\|g\|$ est un élément de $\mathbb{R}_+$.

- $\|g\|=0 \Leftrightarrow \max_{t\in[-1,1]} |g(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall t\in[-1,1], g(t)=0 \Leftrightarrow g=0_E$. $\|g\|=0 \Leftrightarrow g=0_E$!
- $\forall \lambda\in\mathbb{R}$, $\|\lambda g\| = \max_{t\in[-1,1]} |(\lambda g)(t)| = \max_{t\in[-1,1]} (|\lambda|\,|g(t)|) = |\lambda| \max_{t\in[-1,1]} |g(t)| = |\lambda|\,\|g\|$
- Soit h un second élément de E. $\forall t\in[-1,1]$, $|(g+h)(t)| \leq |g(t)|+|h(t)| \leq \|g\|+\|h\|$

Ainsi $\max_{t\in[-1,1]} |(g+h)(t)| \leq \|g\|+\|h\|$; $\|g+h\| \leq \|g\|+\|h\|$.

Ainsi $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ g \mapsto \|g\| \end{array}$ est bien une norme sur E

Q2 Soient $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(P,Q)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\psi(\lambda P+Q) = ((\lambda P+Q)(x_0),\dots,(\lambda P+Q)(x_{n-1})) = (\lambda P(x_0)+Q(x_0),\dots,\lambda P(x_{n-1})+Q(x_{n-1}))$

$\psi(\lambda P+Q) = \lambda(P(x_0),\dots,P(x_{n-1})) + (Q(x_0),\dots,Q(x_{n-1})) = \lambda\psi(P)+\psi(Q)$.

ψ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $P\in\operatorname{Ker}\psi$. $(P(x_0),P(x_1),\dots,P(x_{n-1})) = 0_{\mathbb{R}^n}$. $P(x_0)=P(x_1)=\dots=P(x_{n-1})=0$.

Ainsi P est un polynôme de degré au plus $n-1$ ayant au moins n zéros distincts

donc $P=0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$. $\operatorname{Ker}\psi = \{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$. ψ est injective.

$\psi\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X],\mathbb{R}^n)$, ψ est injective et $\dim\mathbb{R}_{n-1}[X] = n = \dim\mathbb{R}^n < +\infty$ donc

ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $P(x_k)=f(x_k) \Leftrightarrow \psi(P) = (f(x_0),\dots,f(x_{n-1}))$

$\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $P(x_k)=f(x_k) \Leftrightarrow P = \psi^{-1}((f(x_0),\dots,f(x_{n-1})))$!

Ainsi $\exists!\, P_f\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $P_f(x_k)=f(x_k)$: $P_f = \psi^{-1}((f(x_0),\dots,f(x_{n-1})))$.

Q3 a) $\forall t\in[-1,1]$, $\ell(t) = f(t) - P_f(t) - A\,U(t)$.

f étant C^n sur $[-1,1]$ ℓ l'est aussi car P_f et U sont de classe C^∞ sur $[-1,1]$!

$\forall t \in [-1,1]$, $h^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - P_f^{(n)}(t) - A\,U^{(n)}(t)$

$P_f^{(n)} = 0$ car $P_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $U = X^n + S$ où $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ $(U = (X-x_0)(X-x_1)\cdots(X-x_{n-1}))$.

Donc $U^{(n)} = n! + S^{(n)} = n!$

Finalement $\forall t \in [-1,1]$, $h^{(n)}(t) = f^{(n)} - A\,n!$.

$U(x) \neq 0$ car $x \in [-1,1] - \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$

b) $x \in [-1,1] - \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$.

$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - P_f(x) - A\,U(x) = 0 \Leftrightarrow A = \dfrac{f(x) - P_f(x)}{U(x)}$.

Ainsi il existe une valeur de A et une seule telle que $h(x) = 0$: $A = \dfrac{f(x) - P_f(x)}{U(x)}$.

A étant ainsi choisi, h admet au moins $n+1$ zéros : $x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ dans $[-1,1]$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $h^{(k)}$ admet au moins $n+1-k$ zéros dans $]-1,1[$.

→ $\{x, x_0, \dots, x_{n-1}\} = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ avec $-1 \leq z_0 < z_1 < \dots < z_n \leq 1$ (en classant on a admis la liste $x, x_0, \dots, x_{n-1}$ suivant l'ordre croissant). Soit $i \in [\![0,n-1]\!]$.

h est continue et dérivable sur $[z_i, z_{i+1}]$ et $h(z_i) = h(z_{i+1})$ $(=0)$

Rolle montre que : $\exists\, t_i \in]z_i, z_{i+1}[$, $h'(t_i) = 0$.

h' admet donc au moins $n+1-1$ zéros dans $]-1,1[$: $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$.

La propriété est vraie pour $k=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![1,n-1]\!]$ et montrons la pour $k+1$.

$h^{(k)}$ admet au moins $n+1-k$ zéros dans $]-1,1[$

Notons $u_0, u_1, \dots, u_{n-k}$ $n+1-k$ zéros de $h^{(k)}$ tels que : $-1 < u_0 < u_1 < \dots < u_{n-k} < 1$.

Soit $i \in [\![0,n-k-1]\!]$. $h^{(k)}$ est dérivable sur $[u_i, u_{i+1}]$ ($k \leq n-1$!) et

$h^{(k)}(u_i) = h^{(k)}(u_{i+1})$ $(=0)$. Donc $\exists\, v_i \in]u_i, u_{i+1}[$, $(h^{(k)})'(v_i) = 0$. $h^{(k+1)}(v_i) = 0$.

Ainsi $h^{(k+1)}$ admet au moins $(n+1)-(k+1)$ $(=n-k)$ zéros dans $]-1,1[$: $v_0, v_1, \dots, v_{n-k-1}$

Ceci achève la récurrence.

Appliquons la propriété à l'ordre n. Comme $n+1-n = 1$ il vient :

$\exists\, \alpha \in]-1,1[$, $h^{(n)}(\alpha) = 0$.

Or $A = \dfrac{f(x) - P_f(x)}{U(x)}$ et $h^{(n)}(\alpha) = f^{(n)}(\alpha) - A\, n! = 0$.

Par conséquent : $\underline{f(x) - P_f(x) = A\,U(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\,U(x).}$

Nous avons donc montré que pour $x \in [-1,1] - \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ il existe un élément de $]-1,1[$ tel que : $f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\,U(x)$.

Ceci est encore vrai pour tout élément x de $[-1,1]$. En effet soit $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$.

$f(x) - P_f(x) = 0$ par définition de P_f et $U(x) = 0$ par définition de U !

Donc $\forall \alpha \in [-1,1]$, $f(x) - P_f(x) = 0 = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\,U(x)$; en particulier $\exists \alpha \in]-1,1[$, $f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\,U(x)$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall x \in [-1,1],\ \exists \alpha \in]-1,1[,\ f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\,U(x).}}$

Soit $x \in [-1,1]$. $\exists \alpha \in]-1,1[$, $f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}\,U(x)$.

$|f(x) - P_f(x)| = \dfrac{1}{n!}\,|f^{(n)}(\alpha)|\,|U(x)| \leq \dfrac{1}{n!}\,\|f^{(n)}\|\,\|U\|$.

Donc $\forall x \in [-1,1]$, $|f(x) - P_f(x)| \leq \dfrac{1}{n!}\,\|f^{(n)}\|\,\|U\|$. Ainsi $\max\limits_{x \in [-1,1]} |f(x) - P_f(x)| \leq \dfrac{1}{n!}\,\|f^{(n)}\|\,\|U\|$.

Donc $\underline{\underline{\|f - P_f\| \leq \dfrac{1}{n!}\,\|f^{(n)}\|\,\|U\|.}}$

Q4 a) Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons a_n le coefficient de X^n dans T_n. Rappelons encore que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg T_n = n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 2a_{n+1}$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = 2a_n$.

$(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $a_1 = 1$ car $T_1 = X$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2^{n-1} a_1 = 2^{n-1}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\underline{\hat{T}_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\,T_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n.}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\|\hat{T}_n\| = \max_{t \in [-1,1]} |\hat{T}_n(t)| = \frac{1}{2^{n-1}} \max_{t \in [-1,1]} |T_n(t)| \underset{\text{IQ5}}{=} \frac{1}{2^{n-1}} \times 1 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|\hat{T}_n\| = \dfrac{1}{2^{n-1}}.}}$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n et unitaire. Montrons par l'absurde que : $\|P\| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

Supposons donc $\|P\| < \frac{1}{2^{n-1}}$. Alors $\forall t \in [-1,1]$, $-\frac{1}{2^{n-1}} < P(t) < \frac{1}{2^{n-1}}$.

Rappelons nous que T_n admet sur $[-1,1]$ ses extremums en $n+1$ points :

$1, \cos\frac{\pi}{n}, \cos\frac{2\pi}{n}, \dots, \cos\frac{(n-1)\pi}{n}, -1$.

Posons $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $t'_k = \cos\frac{k\pi}{n}$. $1 = t'_0 > t'_1 > \dots > t'_n = -1$ ... suite décroissante !

Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. $T_n(t'_k) = \cos(n\frac{k\pi}{n}) = (-1)^k$ et $T_n(t'_{k+1}) = \cos(n\frac{(k+1)\pi}{n}) = (-1)^{k+1}$

$(P-\hat{T}_n)(t'_k) = P(t'_k) - \frac{1}{2^{n-1}}(-1)^k$ et $(P-\hat{T}_n)(t'_{k+1}) = P(t'_{k+1}) - \frac{1}{2^{n-1}}(-1)^{k+1}$

Si k est pair $(P-\hat{T}_n)(t'_k) = P(t'_k) - \frac{1}{2^{n-1}} < 0$ et $(P-\hat{T}_n)(t'_{k+1}) = P(t'_{k+1}) + \frac{1}{2^{n-1}} > 0$.

$\|P\| < 1/2^{n-1}$

Si k est impair c'est le contraire !

Dans les deux cas $P-\hat{T}_n$ est continue sur $[t'_{k+1}, t'_k]$ et $(P-\hat{T}_n)(t'_{k+1})(P-\hat{T}_n)(t'_k) < 0$.

Ainsi $P-\hat{T}_n$ s'annule au moins une fois sur $]t'_{k+1}, t'_k[$ ... et ceci pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$.

Donc $P-\hat{T}_n$ admet au moins n zéros.

Or P et $\hat{T}_n$ sont unitaires de degré n donc $P-\hat{T}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (le coefficient de X^n dans $P-\hat{T}_n$ est nul).

$P-\hat{T}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P-\hat{T}_n$ admet au moins n zéros donc $P-\hat{T}_n = 0$. $P = \hat{T}_n$.

Mais alors $\|P\| = \|\hat{T}_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$!

Ainsi si P est unitaire et de degré n : $\|P\| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} = \|\hat{T}_n\|$. Beau, hein ?

c) U étant de degré n et unitaire, b) montre que $\|U\| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

Si nous posons : $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $x_k = y_k$ alors :

$$\|U\| = \|(X-y_0)(X-y_1)\cdots(X-y_{n-1})\| = \left\|\frac{1}{2^{n-1}}\underbrace{2^{n-1}(X-y_0)(X-y_1)\cdots(X-y_{n-1})}_{T_n \text{ (ok?)}}\right\| = \left\|\frac{1}{2^{n-1}}T_n\right\| = \|\hat{T}_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ainsi $\|U\|$ est minimum en choisissant pour points $x_0, x_1, \dots, x_n$ les zéros de T_n.

Q5 a) Comme nous l'avons vu dans Q4 c) : $U = \widetilde{T}_n$ donc $\|U\| = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Ainsi $\|f - P_f\| \leq \frac{\|f^{(n)}\|}{2^{n-1} n!}$.

b) $P_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc d'après II Q3 : $\int_{-1}^{1} \frac{P_f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_f(y_k)$.

Or $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P_f(y_k) = f(y_k)$. Donc $\underline{\underline{\int_{-1}^{1} \frac{P_f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)}}$.

c) $\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt - \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k) \right| = \left| \int_{-1}^{1} \frac{f(t) - P_f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right|$.

$\forall t \in]-1, 1[$, $\frac{|f(t) - P_f(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{\|f^{(n)}\|}{2^{n-1} n!} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ d'après a).

Or $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et vaut $N^2(T_0) = \pi$. Ceci donne alors la convergence de $\int_{-1}^{1} \frac{|f(t) - P_f(t)|}{\sqrt{1-t^2}} dt$ donc l'absolue convergence de $\int_{-1}^{1} \frac{f(t) - P_f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Ainsi nous pouvons écrire :

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(t) - P_f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \leq \int_{-1}^{1} \frac{|f(t) - P_f(t)|}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{\|f^{(n)}\|}{2^{n-1} n!} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi \|f^{(n)}\|}{2^{n-1} n!}.$$

ce qui donne donc $\underline{\underline{\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(t) - P_f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \leq \frac{\pi \|f^{(n)}\|}{2^{n-1} n!}}}$.

Q6 f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[-1, 1]$. En particulier f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-1, 1]$ et $\forall t \in [-1, 1]$, $f^{(n)}(t) = e^t$.

a) Soit $x \in [-1, 1]$. $\exists \alpha \in]-1, 1[$, $f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} U(x) = \frac{e^\alpha}{n!} U(x)$. $\frac{1}{e} \leq e^\alpha \leq e$ car $\alpha \in]-1, 1[$

Donc $\frac{1/e}{n!} |U(x)| \leq \frac{e^\alpha}{n!} |U(x)| = |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{e}{n!} |U(x)|$.

Donc $\forall x \in [-1, 1]$, $\frac{1/e}{n!} |U(x)| \leq |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{e}{n!} |U(x)|$.

$\forall x \in [-1,1]$, $|f(x)-P_f(x)| \leq \frac{e}{n!}|U(x)| \leq \frac{e}{n!}\|U\| = \frac{e}{n!\,2^{n-1}}$, donc $\max_{x\in[-1,1]}|f(x)-P_f(x)| \leq \frac{e}{n!\,2^{n-1}}$

Ainsi : $\|f-P_f\| \leq \frac{e}{n!\,2^{n-1}}$.

$\forall x \in [-1,1]$, $\frac{1/e}{n!}|U(x)| \leq |f(x)-P_f(x)| \leq \|f-P_f\|$, donc $\max_{x\in[-1,1]}\left(\frac{1/e}{n!}|U(x)|\right) \leq \|f-P_f\|$

Ainsi $\left\|\frac{1/e}{n!}U\right\| \leq \|f-P_f\|$; $\|f-P_f\| \geq \left\|\frac{1/e}{n!}U\right\| = \frac{1/e}{n!}\|U\| = \frac{1}{e\,n!\,2^{n-1}}$.

Donc $\underline{\underline{\frac{1}{e\,n!\,2^{n-1}} \leq \|f-P_f\| \leq \frac{e}{n!\,2^{n-1}}}}$.

b) Soit $x \in [-1,1]$. $|f(x)-S_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k!}$

$|f(x)-S_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$

De plus $|f(1)-S_n(1)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1^k}{k!}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.

Ainsi $\forall x \in [-1,1]$, $|f(x)-S_n(x)| \leq |f(1)-S_n(1)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$. Ainsi $\max_{x\in[-1,1]}|f(x)-S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$

Donc $\|f-S_n\| = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{1}{k!} \geq \frac{1}{(n+1)!}$.

$\|f-S_n\| = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{k!}\right]$

Or $\forall k \in [\![n+2,+\infty[\![$, $\frac{(n+1)!}{k!} \leq \left(\frac{1}{n+2}\right)^{k-n-1}$ ← A rédiger très soigneusement — très détaillé !

$\|f-S_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!}\left[1+\sum_{k=n+2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{k-n-1}\right] = \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^{k-n-1}\right)$

↑ série convergente car $\frac{1}{n+2} < 1$

$\|f-S_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^k = \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}$.

Ainsi $\underline{\underline{\frac{1}{(n+1)!} \leq \|f-S_n\| \leq \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}}}$.

c) L'encadrement de a) est bien meilleur que celui de b).

(Q7) <u>Solution abrégée</u>. Bédé mais

a) Posons $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\widehat{\varphi}(P) = (P(y_0), P(y_1), \dots, P(y_{n-1}), P'(y_0), \dots, P'(y_{n-1}))$

$\widehat{\varphi}$ est clairement une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Montrons qu'elle est bijective. Il suffit de prouver que $\widehat{\varphi}$ est injective car $\dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] = 2n = \dim \mathbb{R}^{2n} < +\infty$.

Soit $P \in \operatorname{Ker} \widehat{\varphi}$. $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P(y_k) = P'(y_k) = 0$. Ainsi pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, y_k est un zéro d'ordre au moins 2 de P.

Donc P admet au moins $2n$ zéros (comptés avec leur ordre de multiplicité). P étant de degré au plus $2n-1$, P est nul.

Donc $\operatorname{Ker} \widehat{\varphi} = \{0_{\mathbb{R}_{2n-1}[X]}\}$. Ceci achève de prouver que $\widehat{\varphi}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Soit $\varphi \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi(y_k) = f(y_k)$ et $\varphi'(y_k) = f'(y_k) \iff \widehat{\varphi}(\varphi) = (f(y_0), \dots, f(y_{n-1}), f'(y_0), \dots, f'(y_{n-1}))$

$\iff \varphi = \widehat{\varphi}^{-1}((f(y_0), \dots, f(y_{n-1}), f'(y_0), \dots, f'(y_{n-1})))$.

Donc $\exists! \, Q_f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $Q_f(y_k) = f(y_k)$ et $Q_f'(y_k) = f'(y_k)$.

$$Q_f = \widehat{\varphi}^{-1}((f(y_0), \dots, f(y_{n-1}), f'(y_0), \dots, f'(y_{n-1})).$$

b) Soit $x \in [-1,1] - \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$. Posons $\forall t \in [-1,1]$, $\ell(t) = f(t) - Q_f(t) - B\,U^2(t)$ où $B \in \mathbb{R}$.

$\ell(x) = 0 \iff B = \dfrac{f(x) - Q_f(x)}{U^2(x)}$. Dès lors posons $B = \dfrac{f(x) - Q_f(x)}{U^2(x)}$.

f est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$. Q_f et U^2 aussi. Donc ℓ est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$.

$\forall t \in [-1,1]$, $\ell^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) - Q_f^{(2n)}(t) - B\,(U^2)^{(2n)}(t)$.

$Q_f^{(2n)} = 0$ car $Q_f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. $(U^2)^{(2n)} = (2n)!$ car $U^2 = ((X-y_0)(X-y_1)\cdots(X-y_{n-1}))^2$ ok ?

Donc $\forall t \in [-1,1]$, $\ell^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) - (2n)!\,B$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\ell(y_k) = f(y_k) - Q_f(y_k) - B\,U^2(y_k) = 0 - B \times 0 = 0$.

Donc $x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ sont n zéros distincts de ℓ.

Rolle permet alors de montrer que ℓ' possède n zéros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ appartenant à $]-1,1[$ et distincts de $x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ ok ?

De plus : $\forall t \in [-1,1]$, $\ell'(t) = f'(t) - \varphi_f'(t) - B \times 2\, U'(t)\, U(t)$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\ell'(y_k) = f'(y_k) - \varphi_f'(y_k) - B \times 2\, U'(y_k)\, U(y_k) = 0 - 0 = 0$.

Ainsi <u>ℓ' admet au moins n zéros</u> $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ dans $[-1,1]$.

Par récurrence on montre que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\ell^{(k)}$ admet au moins $n+1-k$ zéros dans $[-1,1]$ (pour $k \geq 2$ on peut dire dans $]-1,1[$ mais ce n'est pas utile).

Donc $\exists \alpha \in [-1,1]$, $\ell^{(n)}(\alpha) = 0$. $f^{(n)}(\alpha) = (n)!\, B$; $\dfrac{f(x) - \varphi_f(x)}{U^2(x)} = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{(n)!}$.

Ainsi $|f(x) - \varphi_f(x)| = \dfrac{|f^{(n)}(\alpha)|}{(n)!}\, U^2(x) \leq \dfrac{\|f^{(n)}\|}{(n)!}\, U^2(x)$.

$\forall x \in [-1,1] - \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$, $|f(x) - \varphi_f(x)| \leq \dfrac{\|f^{(n)}\|}{(n)!}\, U^2(x)$.

Ceci est clair pour $x \in \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ ($f(y_k) - \varphi_f(y_k) = 0$ et $U^2(y_k) = 0$).

Donc $\forall x \in [-1,1]$, $|f(x) - \varphi_f(x)| \leq \dfrac{\|f^{(n)}\|}{(n)!}\, U^2(x)$.

c) $\varphi_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_f(y_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)$. (III Q4.)

$$\underbrace{\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k) \right|}_{\Delta} = \left| \int_{-1}^{1} \frac{f(t) - \varphi_f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \right| \leq \int_{-1}^{1} \frac{|f(t) - \varphi_f(t)|}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

(toutes les intégrales sont convergentes)

$$\Delta \leq \int_{-1}^{1} \frac{|f(t) - \varphi_f(t)|}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \leq \frac{\|f^{(n)}\|}{(n)!} \int_{-1}^{1} \frac{U^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \quad . \text{ Or } U = \frac{1}{2^{n-1}} T_n .$$

Donc $\displaystyle\Delta \leq \frac{\|f^{(n)}\|}{(n)!} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 \int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\|f^{(n)}\|}{(n)!} \frac{1}{2^{n-2}} N^2(T_n)$

$\displaystyle\Delta \leq \frac{\|f^{(n)}\|}{(n)!} \frac{1}{2^{n-2}} \times \frac{\pi}{2}$

Ainsi $\displaystyle\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k) \right| \leq \frac{2\pi\, \|f^{(n)}\|}{2^{n}\, (n)!}$. C'est mieux que ce que nous promettait Q5... au moins si $\|f^{(n)}\|$ est bien petite !

D'autres pistes

(P1) Unicité de la suite $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ (strictement croissante ...) dans III Q4 ?

(P2) Unicité de $\widehat{T}_n$ tq $\|\widehat{T}_n\| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ dans IV Q4 ?

(P3) Convergence "des φ_f" vers f lorsque $n \to +\infty$ dans Q5 ?