SUJET 5

Dans tout le problème n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et x_1, x_2, ..., x_n sont n éléments de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$.

p est une fonction numérique continue et strictement positive sur $]a, b[$ telle que $\displaystyle\int_a^b t^k p(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

On est prié de remarquer que tute les intégrales qui interviennent dans ce texte sont des intégrales généralisées.

PARTIE I

Q0 Montrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t$ existe pour tout élément P de $\mathbb{R}[X]$.

Q1 $U = (X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n)$.

Pour tout i élément de $[\![1, n]\!]$, U_i est le quotient de U par $X - x_i$ et $L_i = \dfrac{1}{U_i(x_i)}\, U_i$.

a) Evaluer $L_i(x_j)$ pour i et j dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que les coordonnées d'un élément P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base sont $(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n))$.

b) Montrer qu'il existe un unique élément $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k\, P(x_k)$$

(on pourra procéder par analyse-synthèse en se servant de la base $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$).

Désormais, pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, $a_k = \displaystyle\int_a^b L_k(t)\ p(t)\,\mathrm{d}t$.

Q2 Dans cette question $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont réels}}$ et f est une fonction numérique continue sur $[a, b]$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)p(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

b) On pose $P_f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ L_k$. Montrer que P_f est l'unique élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P_f(x_k) = f(x_k)$.

Ainsi pourrons-nous approximer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t$ par $\displaystyle\int_a^b P_f(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$. La question suivante consiste à trouver un majorant de l'erreur résultant de cette approximation.

Q3 Ici a et b sont encore deux réels et f est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$.

On pose $M_n = \underset{t\in[a,b]}{\text{Sup}} |f^{(n)}(t)| = \underset{t\in[a,b]}{\text{Max}} |f^{(n)}(t)|$ et pour tout élément t de $[a,b]$, $g(t) = f(t) - P_f(t) - A\,U(t)$ où A est un réel.

a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et que pour tout t dans $[a,b]$

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - A\ n!$$

b) $\boxed{\text{On fixe } x}$ dans $[a,b] - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Trouver A pour que $g(x) = 0$ (faire simple). On suppose désormais que A a cette valeur. Ainsi x_1, x_2, ..., x_n et x sont $n+1$ zéros distincts de g.

c) Montrer par récurrence que pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$, $g^{(k)}$ possède au moins $n-k+1$ zéro(s) dans $]a,b[$ (utiliser Rolle).

d) Montrer alors que : $\exists \alpha_x \in]a,b[,\ f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!}\ U(x)$.

Montrer que ceci vaut encore si x appartient à $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

e) Montrer enfin que $\left| \displaystyle\int_a^b f(t)p(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \right| \leqslant \dfrac{M_n}{n!} \displaystyle\int_a^b |U(t)|p(t)\,\mathrm{d}t$.

PARTIE II

On rappelle qu'un polynôme non nul est unitaire ou normalisé si le coefficient de son terme de plus haut degré est 1.

On garde les notations de la partie précédente. En particulier $U = (X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_n)$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est toujours l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k\,P(x_k).$$

Le but de cette partie est de voir de quelle manière on peut choisir les points x_1, x_2, ..., x_n pour que la formule précédente soit encore vraie pour les éléments de $\mathbb{R}_{n-1+q}[X]$ avec q le plus grand possible et de voir ensuite les effets de l'amélioration de la formule sur l'approximation étudiée dans I Q3. On pourra observer que les outils développés dans le cours d'algèbre bilinéaire font ici le maximum.

Q1 Si (P,Q) est un couple d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ on pose :

$$< P, Q >= \int_a^b P(t)\,Q(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.

Q2 Ici q est dans $\mathbb{N}^*$ et on suppose que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1+q}[X],\ \int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k\,P(x_k).$$

a) Montrer alors que : $\forall k \in [\![0, q-1]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^i\,U(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = 0$. En déduire que U un polynôme normalisé (ou unitaire) de $\mathbb{R}_n[X]$ orthogonal à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$.

b) On suppose que $q > n$. Utiliser ce qui précède pour montrer que U (ou $< U, U >$) est nul et en déduire une contradiction !

Ainsi on ne peut espérer plus que $q = n$! Autrement dit au mieux on ne pourra étendre la formule de IQ1.b qu'aux éléments de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Montrons que le mieux est possible.

Q3 a) Soit r un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que l'orthogonal de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ $\boxed{\text{dans } \mathbb{R}_r[X]}$ est une droite vectorielle que nous noterons D_r.

En déduire qu'il existe un polynôme normalisé (ou unitaire) P_r de $\mathbb{R}_r[X]$ et un seul orthogonal à $\mathbb{R}_{r-1}[X]$. Montrer que le degré de P_r est r.

b) On pose $P_0 = 1$. Montrer que, pour tout m dans $\mathbb{N}$, $(P_0, P_1, \dots, P_m)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_m[X]$.

Q4 a) Utiliser Q2a) pour montrer que $\boxed{\text{si}}$: $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\displaystyle\int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k\,P(x_k)$ $\boxed{\text{alors}}$ x_1, x_2, ..., x_n sont les zéros de P_n.

b) Réciproquement on suppose que x_1, x_2, ..., x_n sont les zéros de P_n (notons que pour l'instant rien n'indique que P_n admet n zéros distincts entre a et b...).
Soient P un élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, Q et R le quotient et le reste dans la division de P par P_n.

Comparer $P(x_k)$ et $R(x_k)$ pour tout k dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)\ p(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b R(t)\ p(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que : $\displaystyle\int_a^b P(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k\,P(x_k)$. Conclure.

PARTIE III

Dans cette partie on se propose d'établir une formule de récurrence permettant d'obtenir les P_r, de montrer que P_n admet n racines réelles distinctes appartenant à l'intervalle $]a, b[$ et de revenir sur l'approximation étudiée dans IQ3.

Q1 On rappelle que $(P_r)_{r\geqslant 0}$ est une suite d'éléments unitaires de $\mathbb{R}[X]$ deux à deux orthogonaux et que P_r est de degré r pour tout élément r de $\mathbb{N}$. Ici m appartient à $\mathbb{N}^*$ (ou $[\![2, +\infty[\![$ si vous y tenez).

a) Montrer que XP_m est combinaison linéaire de la famille $(P_0, P_1, \dots, P_m, P_{m+1})$.
Montrer en fait qu'il existe trois réels α_m, β_m et γ_m tels que :

$$XP_m = \alpha_m\ P_{m-1} + \beta_m\ P_m + \gamma_m\ P_{m+1}$$

(prendre i dans $[\![0, m-2]\!]$ montrer que $< XP_m, P_i > = < P_m, XP_i > = 0$ et utiliser ce qui précède).

b) Montrer que : $\gamma_m = 1$, $\beta_m = \dfrac{< XP_m, P_m >}{\|P_m\|^2}$ et $\alpha_m = \dfrac{\|P_m\|^2}{\|P_{m-1}\|^2}$.

En déduire que :
$P_{m+1} = \left(X - \dfrac{< XP_m, P_m >}{\|P_m\|^2}\right) P_m - \dfrac{\|P_m\|^2}{\|P_{m-1}\|^2}\ P_{m-1}$.

Q2 s est le nombre de racines d'ordre de multiplicité impair de P_n appartenant à $]a, b[$.

Si $s = 0$ on pose $P = 1$. Dans le cas contraire on pose $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X - y_i)$ où y_1, y_2, ..., y_s sont les racines d'ordre de multiplicité impair de P_n appartenant à $]a, b[$ $(y_1 < y_2 < \cdots < y_s)$.

Justifier rapidement que PP_n garde un signe constant sur $]a, b[$ et que ce polynôme n'est pas nul.

En déduire que $\displaystyle\int_a^b P(t)\,P_n(t)\,p(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas nul et donc que $s = n$. Conclure.

Dans la suite x_1, x_2, ..., x_n sont les zéros de P_n.

Q3 Dans cette question a et b sont réels et f est une fonction numérique dérivable sur $[a, b]$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément Q_f de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ Q_f(x_k) = f(x_k) \quad \text{et} \quad Q'_f(x_k) = f'(x_k)$$

(on pourra sans doute établir un isomorphisme entre $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^{2n}$)

b) Montrer que $\displaystyle\int_a^b Q_f(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$.

c) Montrer que $\displaystyle Q_f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big(f'(x_i) - 2 f(x_i) L'_i(x_i) \Big) (X - x_i)\ L_i^2 \Big]$.

Q4 Dans cette question a et b sont réels et f est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[a, b]$.

On pose $\displaystyle M_{2n} = \operatorname*{Sup}_{t\in[a,b]} |f^{(2n)}(t)| = \operatorname*{Max}_{t\in[a,b]} |f^{(2n)}(t)|$ et pour tout élément t de $[a, b]$, $h(t) = f(t) - Q_f(t) - A\, P_n^2(t)$ où A est un réel.

a) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[a, b]$ et préciser $h^{(2n)}$.

b) On fixe x dans $[a, b] - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Après avoir choisi A de manière à ce que $h(x) = 0$, montrer que h' possède au moins $2n$ zéros dans $]a, b[$. Montrer que $h^{(2n)}$ admet au moins un zéro dans $]a, b[$.

Montrer que : $\displaystyle\forall x \in [a, b],\ \exists \beta_x \in]a, b[,\ f(x) - Q_f(x) = \frac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!}\ P_n^2(x)$.

c) Montrer enfin que $\displaystyle\left| \int_a^b f(x) p(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \right| \leqslant \frac{M_{2n}\, \|P_n\|^2}{(2n)!}$.

---

a) Montrer alors que : $\forall k \in [\![0, q-1]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k\, U(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t$. En déduire que $U = P_n$ et donc que x_0, x_1, ..., x_{n-1} sont les zéros de P_n.

b) a_0, a_1, ..., a_{n-1} sont les n réels tels que : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\displaystyle\int_a^b P(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, P(x_k)$

Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\displaystyle\int_a^b P(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, P(x_k)$ (on pourra faire la division de P par P_n).

Montrer que pour tout élément k de $[\![0, n-1]\!]$: $a_k > 0$ (considérer $\|L_k\|^2$).
