PARTIE I

(Q0) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\exists q \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$, $P = \sum_{k=0}^{q} \alpha_k X^k$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^k p(t)dt$ converge donc $\int_a^b \sum_{k=0}^{q} \alpha_k t^k p(t)\, dt$ converge ainsi $\int_a^b P(t)p(t)dt$ est convergente. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)dt$ existe.

(Q1) a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ sont des zéros de $\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(X - x_k) = U_i$

Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!] - \{i\}$, $L_i(x_j) = \dfrac{1}{U_i(x_i)} U_i(x_j) = 0$.

De plus $L_i(x_i) = \dfrac{1}{U_i(x_i)} U_i(x_i) = 1$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$.

Montrons que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est libre. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i\right)(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{L_i(x_j)}_{=\begin{cases}0 \text{ si } i\neq j\\ 1 \text{ si } i=j\end{cases}} = \alpha_j$; $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\alpha_j = 0$.

$(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est libre.

Notons encore que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $L_i = \dfrac{1}{U_i(x_i)} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(X - x_k) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

$(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ayant n éléments et $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$ donc $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Notons $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de P dans la base $(L_1, L_2, \dots, L_n)$.

$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $P(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L_i(x_j) = \alpha_j$

Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ les coordonnées de P dans la base $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ sont : $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n))$.

b) Analyse/Unicité.- Supposons que $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\int_a^b L_i(t)p(t)dt = \sum_{k=1}^{n} a_k L_i(x_k) = a_i$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = \int_a^b L_i(t)p(t)dt$. Ceci montre l'unicité de $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Synthèse/Existence.- Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = \int_a^b L_i(t)p(t)dt$. Montrons que :

$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. $P = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) L_k$. $\int_a^b P(t)p(t)dt = \int_a^b \sum_{k=1}^{n} P(x_k) L_k(t) p(t) dt$

$\int_a^b P(t)p(t)dt = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) \int_a^b L_k(t)p(t)dt = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$. Ceci achève de montrer l'existence.

$\exists ! (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)dt = \sum_{k=1}^n a_k P(x_k)$.
le regnant

Q2 a) f est continue sur $[a,b]$. $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)| \leq M$.

$\forall t \in]a,b[$, $|f(t)p(t)| \leq M|p(t)| = Mp(t) = M\,t^0 p(t)$

$\int_a^b M t^0 p(t)dt$ converge et $|fp|$ est positive donc $\int_a^b |f(t)p(t)|dt$ converge.

$\int_a^b f(t)p(t)dt$ est absolument convergente donc convergente.

b) $P_f = \sum_{k=1}^n f(x_k) L_k$ appartient à $\mathrm{Vect}(L_1, L_2, \ldots, L_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P_f(x_i) = \sum_{k=1}^n f(x_k) L_k(x_i) = f(x_i)$.

Ainsi P_f est un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui coïncide avec f en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Montrons que c'est le seul. Soit P un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P_f(x_k) = f(x_k)$.

$P_f - P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $(P_f - P)(x_k) = f(x_k) - f(x_k) = 0$.

$P_f - P$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et admet au moins n racines donc $P_f - P = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$. $P = P_f$.

$P_f = \sum_{k=1}^n f(x_k) L_k$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P_f(x_k) = f(x_k)$.

Q3 a) f, P_f et U sont de classe C^n sur $[a,b]$ donc $g = f - P_f - AU$ aussi $(A \in \mathbb{R})$.

$P_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P_f^{(n)} = 0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

$U = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$. $\deg U = n$ et le coefficient de X^n dans U est 1, ainsi $U^{(n)}$ est le polynôme constant $n!$

g est de classe C^n sur $[a,b]$ et $g^{(n)} = f^{(n)} - A\,n!$

b) $g(x) = 0 \iff f(x) - P_f(x) - AU(x) = 0 \underset{U(x) \neq 0}{\iff} A = \dfrac{f(x) - P_f(x)}{U(x)}$

$g(x)$ est nul si et seulement si : $A = \dfrac{f(x) - P_f(x)}{U(x)}$.

c) * $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x\}$ est de cardinal $n+1$. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}\}$ avec $a \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_{n+1} \leq b$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. g est continue et dérivable sur $[y_i, y_{i+1}]$. De plus $g(y_i) = g(y_{i+1}) (= 0)$.

Rolle montre que $\exists z_i \in]y_i, y_{i+1}[$, $g'(z_i) = 0$.

Ainsi $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont n zéros de g' appartenant à $]a,b[$. La propriété est vraie pour $k = 1$.

* Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Soient $z_1, z_2, \dots, z_{n-k+1}$ $n-k+1$ zéros de $g^{(k)}$ tels que : $a < z_1 < z_2 < \dots < z_{n-k+1} < b$.

Soit $i \in [\![1, n-k]\!]$. $g^{(k)}$ est dérivable sur $[z_i, z_{i+1}]$ et $g^{(k)}(z_i) = g^{(k)}(z_{i+1}) (=0)$.

Rolle montre que $\exists t_i \in]z_i, z_{i+1}[$, $g^{(k+1)}(t_i) = 0$

$t_1, t_2, \dots, t_{n-k}$ sont donc $n-k = n-(k+1)+1$ zéros de $g^{(k+1)}$; appartenant à $]a,b[$.

Ainsi s'achève la récurrence.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $g^{(k)}$ possède au moins $n-k+1$ zéro(s) dans $]a,b[$.

d) D'après ce qui précède $g^{(n)}$ possède au moins un zéro α_x dans $]a,b[$.

Donc $g^{(n)}(\alpha_x) = 0$; $f^{(n)}(\alpha_x) = A\, n!$. Or $A = \dfrac{f(x) - P_f(x)}{U(x)}$.

Ainsi $f(x) - P_f(x) = A\, U(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!} U(x)$.

$\exists \alpha_x \in]a,b[$, $f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!} U(x)$.

Si $x = x_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$, $f(x) - P_f(x) = 0$ et $U(x) = 0$.

Ainsi si $x = x_i$ avec $i \in [\![1, n]\!]$, $f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} U(x)$ pour tout $\alpha \in]a,b[$!

Finalement : $\forall x \in [a,b]$, $\exists \alpha_x \in]a,b[$, $f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!} U(x)$.

e) Notons que : $\displaystyle\int_a^b f(t)p(t)dt - \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) = \int_a^b f(t)p(t)dt - \int_a^b P_f(t)p(t)dt = \int_a^b (f(t) - P_f(t))p(t)dt$

Soit $x \in [a,b]$. $\exists \alpha_x \in]a,b[$, $|f(x) - P_f(x)| <= \dfrac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!} U(x)$.

$|f(x) - f(x)| = \dfrac{1}{n!} |f^{(n)}(\alpha_x)||U(x)| \leq \dfrac{\Pi_n}{n!} |f^{(n)}(\alpha_x)$. $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - P_f(x)| \leq \dfrac{\Pi_n}{n!} |U(x)|$

$\forall x \in]a,b[$, $|f(x)p(x) - P_f(x)p(x)| \leq \dfrac{\Pi_n}{n!} |U(x)||p(x)| = \dfrac{\Pi_n}{n!} |U(x)|\, p(x)$.

Or $\displaystyle\int_a^b \frac{\Pi_n}{n!} |U(x)|\, p(x)\, dx$ converge car $|U|$ est continue sur $[a,b]$.

Ainsi $\displaystyle\int_a^b |f(x)p(x) - P_f(x)p(x)| dx$ converge ; $\displaystyle\int_a^b (f(x) - P_f(x))p(x)dx$ est donc absolument convergente.

Le tout permet d'écrire que : $\displaystyle\left|\int_a^b (f(x) - P_f(x))p(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |(f(x) - P_f(x))p(x)|\,dx \leq \int_a^b \frac{\Pi_n}{n!} |U(x)|\, p(x)\,dx$.

Finalement : $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)p(x)dx - \sum_{k=1}^n a_k f(x_k)\right| \leq \frac{\Pi_n}{n!} \int_a^b |U(x)|\, p(x)\, dx$

ou : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)p(t)dt - \sum_{k=1}^n a_k f(x_k)\right| \leq \frac{\Pi_n}{n!} \int_a^b |U(t)|\, p(t)\, dt$.

PARTIE II

Q1 Notons tout d'abord que si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{R}[X]$, $PQ \in \mathbb{R}[X]$ et par conséquent $\int_a^b P(t)Q(t)p(t)\,dt$ existe (S Q 0).

Soit $(P,Q,R) \in \mathbb{R}[X]^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\langle \lambda P+Q, R\rangle = \int_a^b (\lambda P+Q)(t)R(t)p(t)\,dt = \int_a^b (\lambda P(t)R(t)p(t) + Q(t)R(t)p(t))\,dt$

$$= \lambda\int_a^b P(t)R(t)p(t)\,dt + \int_a^b Q(t)R(t)p(t)\,dt = \lambda\langle P,R\rangle + \langle Q,R\rangle \quad (1)$$

- $\langle Q,P\rangle = \int_a^b Q(t)P(t)p(t)\,dt = \int_a^b P(t)Q(t)p(t)\,dt = \langle P,Q\rangle \quad (2)$

- $\forall t\in\mathbb{R}, (P(t))^2 \geqslant 0$. $\forall t\in]a,b[, \ (P(t))^2 p(t) \geqslant 0$; $\langle P,P\rangle = \int_a^b (P(t))^2 p(t)\,dt \geqslant 0 \quad (3)$.

Supposons $\langle P,P\rangle = 0$. Soit $(u,v)\in]a,b[$ tel que $u<v$.

$0 \leq \int_u^v P^2(t)p(t)\,dt \leq \int_a^b P^2(t)p(t)\,dt = 0$ car $\forall t\in]a,b[, \ P^2(t)p(t)\geqslant 0$.

Ainsi $P^2 p$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[u,v]$. $P^2 p$ est nulle sur $[u,v]$.

$\forall x\in [u,v], \ P^2(x)p(x)=0$; $\forall x\in[u,v], \ P(x)=0$ (p est strictement positive sur $]a,b[$).

P admet donc une infinité de 0 ; $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$\langle P,P\rangle = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]} \quad (4)$

CL.. (1), (2), (3) et (4) montrent que <u>$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.</u>

Q2 a) Soit $i\in [\![0,q-1]\!]$. $X^i U \in \mathbb{R}_{n-1+q}[X]$ ($\deg U = n$).

Donc $\int_a^b t^i U(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^i U(x_k) = 0$. $\forall k\in[\![1,n]\!], \ U(x_k)=0$ car $U=\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$.

<u>$\forall i\in[\![0,q-1]\!], \ \int_a^b t^i U(t)p(t)\,dt = 0$.</u>

Donc $\forall i\in[\![0,q-1]\!], \ \langle X^i, U\rangle = 0$ et par conséquent : $\forall P\in \mathbb{R}_{q-1}[X] = \mathrm{Vect}(1,X,\dots,X^{q-1}), \ \langle P,U\rangle = 0$

<u>U est donc orthogonal à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$.</u> De plus $U = \prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$ donc U est unitaire de degré n.

Finalement <u>U est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ orthogonal à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$</u>

b) On suppose $q > n$. $q-1 \geqslant n$ donc $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}_{q-1}[X]$.

Ainsi $U \in \mathbb{R}_{q-1}[X] \cap (\mathbb{R}_{q-1}[X])^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$; alors $U = 0_{\mathbb{R}[X]}$ or nous avons vu que $\deg U = n$!

Ainsi si $q \in \mathbb{N}^*$ et si $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1+q}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(u_k)$ alors $q \leqslant n$

(Q3) a) $r \in \mathbb{N}^*$. $\dim \mathbb{R}_r[X] = r+1$ et $\dim \mathbb{R}_{r-1}[X] = r$ donc l'orthogonal de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_r[X]$ est une droite vectorielle que nous noterons D_r

Montrer qu'il existe un polynôme unitaire P_r de $\mathbb{R}_r[X]$ et un seul orthogonal à $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ revient à montrer que D_r possède un polynôme unitaire et un seul.

Soit S un élément non nul de D_r, s son degré et α_s le coefficient de X^s dans S. $D_r = \mathrm{Vect}(S)$. Soit P un élément de D_r ; $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = \lambda S$.

P unitaire $\Leftrightarrow \lambda \alpha_s = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\alpha_s}$.

Ainsi $\frac{1}{\alpha_s} S$ est l'unique polynôme unitaire de D_r.

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme unitaire P_r de $\mathbb{R}_r[X]$ orthogonal à $\mathbb{R}_{r-1}[X]$.

Supposons que $\deg P_r < r$; alors $P_r \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ et P_r est orthogonal à $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ donc P_r est nul ; ceci n'est pas possible car P_r est unitaire.

Ainsi $\deg P_r = r$.

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in [\![0, m]\!]$, $\deg P_k = k$. $(P_0, P_1, \dots, P_m)$ est une famille de $\mathbb{R}_m[X]$ constituée de polynômes de degrés échelonnés ; ainsi $(P_0, P_1, \dots, P_m)$ est une famille libre de $m+1$ éléments de $\mathbb{R}_m[X]$ qui est de dimension $m+1$.

Finalement $(P_0, P_1, \dots, P_m)$ est une base de $\mathbb{R}_m[X]$. Montrons qu'elle est orthogonale.

Soit $(i,j) \in [\![0,m]\!]$ tel que $i \neq j$.

Si $i < j$: $i \leqslant j-1$ donc P_j est orthogonal à P_i car $P_i \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

Si $i > j$: $j \leqslant i-1$ donc P_i ——— P_j — $P_j \in \mathbb{R}_{i-1}[X]$.

Finalement $(P_0, P_1, \dots, P_m)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_m[X]$.

Q4 a) Supposons que $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$.

Q2 c) appliquée avec $q=n$ montre que U est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}_n[X]$ orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; par conséquent $U = P_n$. Ainsi $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de P_n.

Si $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$ alors $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de P_n.

b) $P = QP_n + R$ avec $\deg R < \deg P_n = n$.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(x_k) = Q(x_k)P_n(x_k) + R(x_k) \underset{P_n(x_k)=0}{=} R(x_k)$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(x_k) = R(x_k)$.

$QP_n = P - R$; $\deg P \leq 2n-1$ et $\deg R < n$ donc $\deg(QP_n) \leq 2n-1$.

$\deg(QP_n) = \deg Q + \deg P_n = \deg Q + n \leq 2n-1$; $\deg Q \leq n-1$. $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\int_a^b P(t)p(t)dt = \int_a^b Q(t)P_n(t)p(t)dt + \int_a^b R(t)p(t)dt = \underbrace{\langle Q, P_n\rangle}_{=0 \text{ car } P_n \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X]} + \int_a^b R(t)p(t)dt.$$

$\int_a^b P(t)p(t)dt = \int_a^b R(t)p(t)dt$.

mais $\int_a^b P(t)p(t)dt = \int_a^b R(t)p(t)dt \underset{R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k R(x_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$.

Ainsi si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de P_n : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k)$.

par conséquent :

$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_a^b P(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k) \iff x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de P_n.

PARTIE III

Q1 a) $\deg XP_m = m+1$ et $(P_0, P_1, \dots, P_{m+1})$ est une base de $\mathbb{R}_{m+1}[X]$.

Ainsi XP_m est combinaison linéaire de $(P_0, P_1, \dots, P_{m+1})$

* $\exists (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+2}$, $XP_m = \sum_{k=0}^{m+1} \lambda_k P_k$. Soit $i \in [\![0, m-2]\!]$.

$\langle XP_m, P_i\rangle = \int_a^b tP_m(t)P_i(t)p(t)dt = \int_a^b P_m(t)\, tP_i(t)p(t)dt = \langle P_m, XP_i\rangle$.

* il serait préférable d'écrire $(\lambda_0^{(m)}, \lambda_1^{(m)}, \dots, \lambda_{m+1}^{(m)})$ ... mais ne compliquons pas.

Or $\deg XP_i = i+1$; comme $i \in [\![0, n-2]\!]$, $XP_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

donc $\langle XP_n, P_i \rangle = \langle P_n, XP_i \rangle = 0$.

Ainsi $0 = \langle XP_n, P_i \rangle = \langle \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k, P_i \rangle \underset{\uparrow}{=} \lambda_i \langle P_i, P_i \rangle = \lambda_i \|P_i\|^2$

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale

$\lambda_i \|P_i\|^2 = 0$ donc $\lambda_i = 0$ car $P_i \neq 0$.

Ainsi $\forall i \in [\![0, n-2]\!], \lambda_i = 0$. $XP_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \lambda_n P_n + \lambda_{n+1} P_{n+1}$.

Donc $\exists (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $XP_n = \alpha_n P_{n-1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n+1}$.

XP_n, P_{n-1}, P_n et P_{n+1} sont des polynômes unitaires de degrés respectifs $n+1, n-1, n$ et $n+1$.

par identification il vient alors : $\gamma_n = 1$.

$$\langle XP_n, P_n \rangle = \langle \alpha_n P_{n-1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n+1}, P_n \rangle = \alpha_n \underbrace{\langle P_{n-1}, P_n \rangle}_{=0} + \beta_n \langle P_n, P_n \rangle + \gamma_n \underbrace{\langle P_{n+1}, P_n \rangle}_{=0}.$$

Donc $\langle XP_n, P_n \rangle = \beta_n \|P_n\|^2$.

$$\beta_n = \frac{\langle XP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2}.$$

$$\langle XP_n, P_{n-1} \rangle = \langle \alpha_n P_{n-1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = \alpha_n \|P_{n-1}\|^2 + 0 + 0.$$

donc $$\alpha_n = \frac{\langle XP_n, P_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|^2} = \frac{\langle P_n, XP_{n-1} \rangle}{\|P_{n-1}\|^2}.$$

Or $XP_{n-1} = \sum_{l=0}^{n} \gamma_l P_l$ car $XP_{n-1} \in \mathbb{R}_n[X]$.

Ici encore $\gamma_n = 1$ car XP_{n-1} est unitaire de degré n et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est unitaire de degré k.

Donc $\langle XP_{n-1}, P_n \rangle = \langle P_n, P_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \underbrace{\langle P_k, P_n \rangle}_{=0} = \|P_n\|^2$. $\alpha_n = \dfrac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2}$.

$$XP_n = \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} P_{n-1} + \frac{\langle XP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2} P_n + P_{n+1}.$$

$$P_{n+1} = \left(X - \frac{\langle XP_n, P_n \rangle}{\|P_n\|^2} \right) P_n - \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} P_{n-1}.$$

(Q2) Rappelons qu'un élément P non nul de $\mathbb{R}[X]$ change de signe en $\alpha \in \mathbb{R}$ si et seulement si α est une racine de P d'ordre impair.

Par construction PP_n n'a pas de racine d'ordre impair dans l'intervalle $]a,b[$.

Par conséquent PP_n garde un signe constant sur $]a,b[$.

P et P_n n'étant pas nuls : PP_n n'est pas nul.

$PP_n\,p$ est une fonction continue sur $]a,b[$ et qui y garde un signe constant ; de plus cette fonction n'est pas la fonction nulle. Toute cela montre que : $\int_a^b P(t)P_n(t)p(t)\,dt \neq 0$

Donc $\langle P, P_n\rangle \neq 0$.

Si $\deg P < n$ alors $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\langle P, P_n\rangle = 0$! Donc $\deg P = n$. $s = n$.

Ainsi P_n admet exactement n racines d'ordre impair dans $]a,b[$. Comme P_n est de degré n on en déduit que : P_n admet n racines distinctes et que ces racines sont dans $]a,b[$.

P_n admet n racines distinctes toutes situées dans $]a,b[$.

Remarque.. Dans ce qui précède nous avons prouvé que :

$$\exists!(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\ \exists!\,(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\,]a,b[^n \text{ tels que :}$$

$$\forall P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X],\quad \int_a^b P(t)p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k P(x_k).$$ Notons que :

$*$ $\forall k\in [\![1,n]\!]$, $a_k = \int_a^b L_k(t)p(t)\,dt$

et $*$ $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les zéros de l'unique polynôme unitaire P_n appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ et orthogonale à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(Q3) a) Posons $\forall P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\varphi(P) = (P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n), P'(x_1), P'(x_2), \dots, P'(x_n))$.

- φ est une application de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(P,Q)\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]^2$.

$\varphi(\lambda P+Q) = ((\lambda P+Q)(x_1), \dots, (\lambda P+Q)(x_n), (\lambda P+Q)'(x_1), \dots, (\lambda P+Q)'(x_n))$.

$\varphi(\lambda P+Q) = (\lambda P(x_1)+Q(x_1), \dots, \lambda P(x_n)+Q(x_n), \lambda P'(x_1)+Q'(x_1), \dots, \lambda P'(x_n)+Q'(x_n))$

$\varphi(\lambda P+Q) = \lambda(P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n)) + (Q(x_1), \dots, Q(x_n), Q'(x_1), \dots, Q'(x_n))$

$\varphi(\lambda P+Q) = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$.

Ainsi φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Montrons alors que φ est un isomorphisme. Il suffit de prouver que φ est injective car $\dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2n} = 2n < +\infty$!

Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$. $\varphi(P) = 0_{\mathbb{R}^{2n}}$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $P(x_k) = P'(x_k) = 0$.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, x_k est une racine de P d'ordre au moins 2.

Ainsi P admet au moins $2n$ racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.

Or $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, donc P est nul.

$\operatorname{Ker} \varphi = \{0_{\mathbb{R}_{2n-1}[X]}\}$. Ceci achève de prouver que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $P(x_\ell) = f(x_\ell)$ et $P'(x_\ell) = f'(x_\ell)$

$$\Updownarrow$$
$$(P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n)) = (f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n))$$
$$\Updownarrow$$
$$\varphi(P) = (f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n)).$$
$$\Updownarrow$$
$$P = \varphi^{-1}\big((f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n))\big)$$

Par conséquent il existe un unique élément Q_f de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\begin{cases} Q_f(x_k) = f(x_k) \\ \text{et} \\ Q_f'(x_k) = f'(x_k) \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_a^b Q_f(t)\, p(t)\,dt \overset{Q_f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k Q_f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$. $\boxed{\displaystyle\int_a^b Q_f(t)\, p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)}$.

c) Posons $H = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \big[(f'(x_i) - 2f(x_i) L_i'(x_i))(X - x_i) L_i^2\big]$. Montrons que : $H = Q_f$.

→ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\deg L_i^2 = 2(n-1) = 2n-2$ et $\deg((X - x_i) L_i^2) = 2n-1$ donc $H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

→ $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $L_i^2(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}$ et $(x_k - x_i) L_i^2(x_k) = 0$

Ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $H(x_k) = f(x_k)$.

→ $H' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, 2 L_i' L_i + \sum_{i=1}^{n} \big[(f'(x_i) - 2f(x_i) L_i'(x_i))(L_i^2 + (X - x_i)\, 2 L_i' L_i)\big]$

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $2 L_i'(x_k) L_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 2L_k'(x_k) & \text{si } k = i \end{cases}$ et $(L_i^2 + (X - x_i)\, 2 L_i' L_i)(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$

donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $H'(x_k) = f(x_k)\, 2 L_k'(x_k) + (f'(x_k) - 2f(x_k) L_k'(x_k)) = f'(x_k)$.

Finalement $H \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $H(x_k) = f(x_k)$, $H'(x_k) = f'(x_k)$; donc $H = Q_f$.

Ainsi $\underline{\underline{Q_f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) L_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(f'(x_i) - 2 f(x_i) L_i'(x_i) \right) (X - x_i) L_i^2 \right]}}$.

Q4 a) f, Q_f et P_n^2 sont de classe C^{2n} sur $[a,b]$ donc $h = f - Q_f - AP_n^2$ est de classe C^{2n} sur $[a,b]$.

$Q_f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ donc $Q_f^{(2n)} = 0$. P_n^2 est unitaire de degré $2n$ donc $(P_n^2)^{(2n)} = (2n)!$

Ainsi $\underline{\underline{h^{(2n)} = f^{(2n)} - A(2n)!}}$

b) $x \in [a,b] - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

$h(x) = 0 \iff f(x) - Q_f(x) - AP_n^2(x) \iff A = \dfrac{f(x) - Q_f(x)}{P_n^2(x)}$. dans la suite $A = \dfrac{f(x) - Q_f(x)}{P_n^2(x)}$.

et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $h(x_k) = f(x_k) - Q_f(x_k) - AP_n^2(x_k) = f(x_k) - f(x_k) - 0 = 0$.

$x, x_1, \dots, x_n$ sont $n+1$ zéros distincts de h. $\{x, x_1, \dots, x_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_{n+1}\}$ avec $a \leq u_1 < u_2 < \dots < u_{n+1} \leq b$.

soit $i \in [\![1,n]\!]$. h est dérivable sur $[u_i, u_{i+1}]$ et $h(u_i) = h(u_{i+1}) = 0$; $\exists v_i \in]u_i, u_{i+1}[$, $h'(v_i) = 0$

$v_1, v_2, \dots, v_n$ sont n zéros distincts de h' n'appartenant pas à $\{a, b, x_1, x_2, \dots, x_n, x\}$

Or $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $h'(x_k) = f'(x_k) - Q_f'(x_k) - 2A\, P_n'(x_k) P_n(x_k) = f'(x_k) - f'(x_k) - 0 = 0$.

Ainsi h' s'annule au moins $2n$ fois sur $]a,b[$ (en $v_1, v_2, \dots, v_n, x_1, x_2, \dots, x_n$)

Une récurrence analogue à celle de I Q3 c) montre que pour tout $k \in [\![1,2n]\!]$, $h^{(k)}$ s'annule au moins $2n-k+1$ fois dans $]a,b[$.

Ainsi $h^{(2n)}$ s'annule au moins une fois dans $]a,b[$.

$\exists \beta_x \in]a,b[$, $h^{(2n)}(\beta_x) = 0$. $f^{(2n)}(\beta_x) = A \times (2n)!$

$$\frac{f(x) - Q_f(x)}{P_n^2(x)} = A = \frac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!} \; ; \quad f(x) - Q_f(x) = \frac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!} P_n^2(x).$$

$\forall x \in [a,b] - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\exists \beta_x \in]a,b[$, $f(x) - Q_f(x) = \dfrac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!} P_n^2(x)$

ceci est clairement vrai pour $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ car dans ce cas : $f(x) - Q_f(x) = 0$ et $P_n^2(x) = 0$.

$$\underline{\underline{\forall x \in [a,b], \exists \beta_x \in]a,b[, \; f(x) - Q_f(x) = \frac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!} P_n^2(x).}}$$

c) Soit $x \in [a,b]$. $\exists \beta_x \in]a,b[$, $f(x) - \varphi_f(x) = \dfrac{f^{(2n)}(\beta_x)}{(2n)!} P_n^2(x)$

$$|f(x) - \varphi_f(x)| = \frac{|f^{(2n)}(\beta_x)|}{(2n)!} |P_n^2(x)| \leq \frac{M_{2n}}{(2n)!} P_n^2(x).$$

$\forall x \in]a,b[$, $|f(x) \times p(x) - \varphi_f(x) \times p(x)| \leq \dfrac{M_{2n}}{(2n)!} P_n^2(x)\, p(x)$.

$\displaystyle\int_a^b \frac{M_{2n} P_n^2(x)}{(2n)!} p(x)\,dx$ converge car $\dfrac{M_{2n} P_n^2}{(2n)!}$ est continue sur $[a,b]$, ainsi :

$\displaystyle\int_a^b |f(x) \times p(x) - \varphi_f(x) p(x)|\,dx$ converge. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \times p(x) - \varphi_f(x)\, p(x))\,dx$ est donc absolument convergente ce qui permet d'écrire :

$$\left|\int_a^b (f(x) \times p(x) - \varphi_f(x) \times p(x))\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x) \times p(x) - \varphi_f(x) \times p(x)|\,dx \leq \int_a^b \frac{M_{2n}}{(2n)!} P_n^2(x)\, p(x)\,dx = \frac{M_{2n} \|P_n\|^2}{(2n)!}$$

$$\left|\int_a^b f(x) p(x)\,dx - \int_a^b \varphi_f(x)\, p(x)\,dx\right| \leq \frac{M_{2n} \|P_n\|^2}{(2n)!}$$ (les deux intégrales convergent).

$$\left|\int_a^b f(x) p(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)\right| \leq \frac{M_{2n} \|P_n\|^2}{(2n)!}.$$

Ceci achève ce petit problème sur la méthode de Gauss.

Reste des pistes à explorer. En particulier si f est continue sur $[a,b]$ on peut s'intéresser à la convergence de la méthode. En clair si l'on pose $I_n = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$ a-t-on $\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_a^b f(t) p(t)\,dt$? La réponse est oui, ... grâce à Weierstrass (toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes).

On pourra profiter de l'occasion pour revoir les "polynômes orthogonaux classiques".

$a = -1$ $b = 1$ $p(x) = 1$: Polynômes de Legendre.

$a = -1$ $b = 1$ $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$: Polynômes de Tchebychev.

$a = 0$, $b = +\infty$ $p(x) = e^{-x}$: Polynômes de Laguerre

$a = -\infty$, $b = +\infty$ $p(x) = e^{-x^2}$: Polynômes de Hermite

...

J.F.C.