
SUJET 8

Dans toute la suite $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout n dans \mathbb{N} , $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE I

Q1 Montrer que pour toute application continue f de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , $\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}} dt$ est absolument convergente.

Q2 On pose pour tout élément n de \mathbb{N} : $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} dt$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ converge (on pourra étudier sa monotonie).

Q3 Montrer que pour n dans \mathbb{N}^* :

$$(2n + 1) I_n = (2n) I_{n-1}$$

(on pourra faire une intégration par parties... $u(t) = t^n \dots$)

Etudier la nature de la série de terme général $v_n = \ln I_n - \ln I_{n-1}$ et en déduire que la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est 0.

Q4 Pour tout élément n de \mathbb{N} , on pose : $J_n = \sqrt{n} I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1} I_n$. Montrer que les suites $(J_n)_{n \geq 0}$ et $(K_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes. En déduire qu'il existe un réel strictement positif α tel que : $I_n \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$

Q5 Pour n dans \mathbb{N} exprimer I_n à l'aide de factorielles (le texte permet de vérifier le résultat... j'exige ici une récurrence).

Calculer α en utilisant la formule de Stirling ($n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$). Le monde à l'envers non ? Commenter cette dernière assertion en deux lignes pleines d'humour (ou en un mot... de trois lettres).

Q6 Pour p et q dans \mathbb{N} on pose $u_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^p(1-t)^q}{\sqrt{1-t}} dt$.

Calculer $u_{0,r}$ pour r dans \mathbb{N} (question qui n'est pas dans la correction).

Exprimer $u_{p,q}$ en fonction de $u_{p-1,q+1}$ pour p dans \mathbb{N}^* et q dans \mathbb{N} ($u_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^{q-1/2} dt$).

En déduire que si p et q sont dans \mathbb{N} : $u_{p,q} = \frac{2^{2p+1} p! (p+q)! (2q)!}{q! (2p+2q+1)!}$

(prendre son temps ; je n'exige pas de récurrence mais je veux une justification assez explicite).

PARTIE II

Q7 On pose pour tout couple (P, Q) d'éléments de $E = \mathbb{R}[X] : \langle P, Q \rangle = \int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}} dt$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E . On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

Q8 Montrer que pour tout élément A de E l'application φ_A qui à tout élément P de E associe AP est un endomorphisme symétrique de E .

Q9 Soit A un élément non nul de E . a est le degré de A . On note r_A l'application qui à un élément P de E associe le reste dans la division de P par A .

-a) Rappeler le théorème de la division euclidienne. Préciser l'image par r_A d'un élément P de E dont le degré est strictement inférieur à celui de A (cette question n'est pas dans la correction).

a) Montrer que r_A est un endomorphisme de E . Montrer que r_A est une projection de E . Caractériser les éléments de $\text{Ker } r_A$. Montrer que si a n'est pas nul : $\text{Im } r_A = \mathbb{R}_{a-1}[X]$; et si $a = 0$?

b) Montrer (en raisonnant par l'absurde) que si le degré de A n'est pas nul, r_A n'est pas une projection orthogonale (établir et exploiter l'égalité : $\langle 1, A^2 \rangle = \langle A, A \rangle$).

Q10 n appartient à \mathbb{N} et A est un élément non nul de E_n . Soit a son degré. On note r'_A la restriction de r_A à E_n .

a) Montrer que r'_A peut être considérée comme une projection de E_n . Montrer que r'_A est la projection sur $\text{Vect}(1, X, \dots, X^{a-1})$ parallèlement à $\text{Vect}(A, AX, \dots, AX^{n-a})$.

b) Montrer que si $0 < a < n$ cette projection n'est pas orthogonale (raisonner par l'absurde et montrer que $\langle A, A \rangle = 0$ en passant par $\langle X^k, AX^i \rangle = 0$ pour ...).

c) Ici $a = n > 0$. Repréciser le noyau et l'image de r'_A . En déduire que r'_A est une projection orthogonale si et seulement si A appartient à l'orthogonal D_n de E_{n-1} dans E_n . Préciser la dimension de D_n .

Montrer alors qu'il existe un unique polynôme A_n de degré n , de norme 1, dont le coefficient du terme de plus haut degré est positif et tel que r'_{A_n} soit une projection orthogonale de E_n .

Q11 a) En déduire l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E vérifiant

i) $(P_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthonormale d'éléments de E .

ii) Pour tout élément n de \mathbb{N} , P_n est de degré n et le coefficient de X^n dans P_n est positif.

b) Calculer P_0 et P_1 .

Q12 n est un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$.

a) Montrer qu'il existe deux réels u_n et v_n tels que : $P_{n+1} = (u_n X + v_n)P_n + r_{P_n}(P_{n+1})$.

b) Démontrer que si k appartient à $\llbracket 0, n-2 \llbracket$ alors $\langle r_{P_n}(P_{n+1}), P_k \rangle = 0$ ($\langle AX, B \rangle = \langle A, XB \rangle$).

c) En remarquant que $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ est une base orthonormale de E_{n-1} , montrer qu'il existe un réel w_n tel que :

$$P_{n+1} = (u_n X + v_n)P_n + w_n P_{n-1}$$

PARTIE III

F est ici l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Nous considérerons que E est un sous-espace de F (!).

Q13 On note Φ l'application qui à tout élément f de F associe $x \rightarrow \sqrt{1-x} \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}} dt$.

a) Soit f un élément de F . Montrer que $\Phi(f)$ est une application de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , dérivable sur $[0, 1[$ et continue sur $[0, 1]$.

b) Montrer que Φ est un endomorphisme injectif de F .

c) Soit f un élément de F ; calculer $\Phi(f)(1)$. Φ est-il Surjectif?

Q14 On rappelle que $E = \mathbb{R}[X]$ et que l'on confond E avec l'ensemble des applications polynômiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ... ou de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

a) Calculer $h_p = \Phi((X-1)^p)$ pour tout élément p de \mathbb{N} .

En déduire que $\Phi(\text{Vect}(1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^p)) = \text{Vect}(X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^{p+1})$ pour tout élément p de \mathbb{N} .

Déduire très proprement de ce qui précède que E est stable par Φ et que $\Phi(E)$ est l'ensemble des éléments de E divisible par $X-1$.

b) n est dans \mathbb{N}^* . S'inspirer de ce qui précède pour caractériser les éléments de $\Phi^n(E)$ ($\Phi^n = \Phi \circ \Phi \circ \dots \circ \Phi$). Valider le résultat obtenu pour $n = 0$.

Q15 Soit P un élément de $\Phi(E)$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément \hat{P} de E tel que $\Phi(\hat{P}) = P$.

b) On pose pour tout x dans $[0, 1[$: $g(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{1-x}}$. Montrer que $\forall x \in [0, 1[$, $\hat{P}(x) = -\sqrt{1-x} g'(x)$.

c) Montrer que si λ est une racine de P d'ordre k , λ est une racine de \hat{P} d'ordre $k-1$.

Q16 n est élément de \mathbb{N}^* et P appartient à $\Phi^n(E)$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément R_n de E tel que $\Phi^n(R_n) = P$.

b) Donner une expression simple de $R_n(x)$ en fonction de la dérivée $n^{\text{ème}}$ de g , pour tout élément x de $[0, 1[$.

Q17 a) Montrer que si P et Q sont deux éléments de E :

$$\langle P, Q \rangle = Q(0) \langle 1, P \rangle + \langle Q', \Phi(P) \rangle$$

b) En déduire que si n est dans \mathbb{N} et P dans E :

$$P \in (E_{n+1})^\perp \iff \langle 1, P \rangle = 0 \text{ et } \Phi(P) \in (E_n)^\perp$$

c) Exprimer, pour P dans $\Phi(E)$, $\langle 1, \hat{P} \rangle$ en fonction de $P(0)$.

Q18 On pose $A = X(1-X)$.

a) Montrer que pour tout élément n de \mathbb{N} il existe un unique élément H_n de E tel que: $\Phi^n(H_n) = A^n$.

b) Préciser le degré de H_n pour tout n dans \mathbb{N} .

c) n appartient à \mathbb{N}^* ; H_n appartient-il à $(E_{n-1})^\perp$?

d) Soit p et q deux éléments distincts de \mathbb{N} . Montrer que $\langle H_p, H_q \rangle = 0$.

Q19 Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ de réels positifs telle que : $H_n = \alpha_n P_n$ pour tout élément n de \mathbb{N} .

Q20 a) Montrer que pour tout élément n de \mathbb{N}^* :

$$\|H_n\|^2 = n! \prod_{k=0}^{n-1} \left(n + k + \frac{1}{2}\right) < 1, A^n >$$

b) En utilisant IQ6, montrer que pour tout élément n de \mathbb{N} :

$$\alpha_n = \frac{n!}{\sqrt{2n + \frac{1}{2}}}$$

c) Quel est, pour tout n élément de \mathbb{N} , le terme de plus haut degré de P_n ? En déduire la valeur du coefficient u_n de Q12.
