Sujet 9

Partie I

$E = \mathbb{R}[X]$. Si r est un élément de $\mathbb{N}$, $E_r = \mathbb{R}_r[X]$. On pourra identifier E à l'ensemble des applications polynômiales de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Q0 P est un élément de E. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \big(P(x)\ e^{-x}\big) = 0$.

Q1 F est l'ensemble des applications f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[0, +\infty[$, et telles que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big[f(t)\big]^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

a) a et b sont deux réels. Comparer $2|ab|$ et $a^2 + b^2$!

b) Montrer que si f et g sont deux éléments de F, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

c) En déduire que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que E est contenu dans F.

Q2 Montrer que l'application $<\ ,\ >$ définie sur F par :

$$\forall (f,g) \in F^2,\ < f, g >= \int_0^{+\infty} f(t)\,g(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur F.

Q3 Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on considère les fonctions $h_n : x \to x^n e^{-x}$ et $L_n : x \to \dfrac{e^x}{n!}\ h_n^{(n)}(x)$

(ou $L_n : x \to \dfrac{e^x}{n!}\ \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$)

a) n est élément de $\mathbb{N}$ et x est dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\ \frac{(-1)^k}{k!}\ x^k.$$

(on pourra utiliser Leïbniz).

En déduire que L_n est un élément de E de degré n ; préciser le coefficient de X^n dans L_n.

b) n est élément de $\mathbb{N}$ et g appartient à E. Montrer que pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$:

$$n!\ < g, L_n >= (-1)^k \int_0^{+\infty} g^{(k)}(t)\,h_n^{(n-k)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exprimer $< g, L_n >$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)\,t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

c) Déduire de ce qui précède que $(L_n)_{n \geqslant 0}$ est une famille orthogonale de E et que $(L_0, L_1, \ldots, L_N)$ est une base orthogonale de E_N pour tout élément N de $\mathbb{N}$.

d) n appartient à $\mathbb{N}$. Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et en déduire $< L_n, L_n >$. Que dire alors ? !

Q4 Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout élément x de $\mathbb{R}^+$:

$$\Big((n+2)L_{n+2} - (2n+3)L_{n+1} + (n+1)L_n\Big)(x) = \frac{1}{(n+1)!}\, e^x \, \frac{d^n}{dx^n}\Big(x^{n+2}e^{-x} - x^{n+1}e^{-x}\Big).$$

b) Montrer que pour tout élément x de $\mathbb{R}^+$: $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+2}\,e^{-x}) = x\,\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+1}\,e^{-x}) + (n+1)\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{n+1}\,e^{-x})$

(on pourra utiliser Leïbniz en remarquant que $x^{n+2}e^{-x} = (x^{n+1}e^{-x})\ x$).

c) Déduire de ce qui précède que :

$$(n+2)L_{n+2} - (2n+3)L_{n+1} + XL_{n+1} + (n+1)L_n = 0.$$

Q5 Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. Montrer que :

$$XL_n'' + (1-X)L_n' + nL_n = 0.$$

(on pourra utiliser Q3.a)).

PARTIE II

Q1 f est un élément de F et n un élément de $\mathbb{N}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} < f, L_k > L_k$.

Montrer que si $Q = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\ L_i$ est un élément de E_n : $< f - S_n, Q >= 0$.

Montrer alors que : $\forall P \in E_n - \{S_n\},\ \|f - S_n\| < \|f - P\|$ (on pourra écrire : $f - P = (f - S_n) + (S_n - P)$).

Commenter ce résultat.

Montrer que $\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - < f, S_n >$ et que $< f, S_n >= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (< f, L_k >)^2$.

Q2 <u>Algorithme de Clenshaw</u>.

f est un élément de F, N un élément de $\mathbb{N}$ et x est un réel positif.

On se propose de donner un moyen pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \Big(< f, L_k >\ L_k(x)\Big)$ connaissant $\alpha_k =< f, L_k >$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

On considère la suite $(C_{N+2}, C_{N+1}, C_N, \ldots, C_1)$ définie par :

$$C_{N+2} = C_{N+1} = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, N]\!],\ (k+1)\,C_{k+2} + (x - 2k - 1)\,C_{k+1} + k\,C_k = \alpha_k.$$

a) Calculer C_N et C_{N-1}. Indiquer le principe de calcul des éléments de la suite précédente.

b) En partant de $\forall k \in [\![1, N]\!],\ (k+1)\,C_{k+2}\,L_k(x) + (x - 2k - 1)\,C_{k+1}\,L_k(x) + k\,C_k\,L_k(x) = \alpha_k\,L_k(x)$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k L_k(x) = \alpha_0 + C_1\,L_1(x) - C_2\,L_0(x) = \alpha_0 + C_1(1-x) - C_2$$

(on pourra utiliser I Q4 c))

c) Ecrire une fonction en TP4 qui à partir de N, x et des α_k (déjà calculés) stockés dans une variable de type tableau donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \Big(< f, L_k >\ L_k(x)\Big)$.

Q3 Ici pour tout élément t de $[0,+\infty[$, $f(t)=e^{-\alpha t}$ où α est un réel positif.

a) Montrer que f est élément de F et calculer $\|f\|^2$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^i\, f(t)\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout i dans $\mathbb{N}$ (utiliser un changement de variable et la fonction Gamma).

En déduire que $< f, L_k >= \dfrac{\alpha^k}{(\alpha+1)^{k+1}}$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. Calculer $\|f-S_n\|^2$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f-S_n\|=0$.

En déduire que :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*},\ \exists P\in E,\ \|f-P\|<\varepsilon\quad(1).$$

On se propose d'étendre le dernier résultat de Q2 à tous les éléments de F... en admettant que :

si g est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, pour tout réel γ strictement positif il existe un élément Q de E tel que :

$$\underset{t\in[0,1]}{\mathrm{Max}}\,|g(t)-Q(t)|<\gamma$$

(théorème de Stone-Weierstrass).

Q4 **Un cas particulier**. Soit f un élément de F admettant une limite finie L en $+\infty$.

a) Trouver le domaine de définition de $t\to f(-\ln t)$ et montrer que cette fonction est prolongeable en une fonction continue g sur $[0,1]$.

b) Soit ε un réel strictement positif. En utilisant Stone-Weirstrass montrer que l'on peut trouver un élément Q de E tel que :

$$\int_0^1 \left(g(t)-Q(t)\right)^2\mathrm{d}t<\frac{\varepsilon^2}{4}$$

En déduire qu'il existe n dans $\mathbb{N}$ et des réels a_0, a_1, ..., a_n tels que la fonction R, définie par $\forall x\in[0,+\infty[,\ R(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, e^{-kx}$, soit un élément de F qui vérifie : $\|f-R\|<\varepsilon/2$.

Utiliser alors Q3 pour montrer que f vérifie (1).

Q5 Soit f un élément quelconque de F. On se propose de montrer que f vérifie également (1). Soit ε un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe B dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall A\in[B,+\infty[,\ \displaystyle\int_A^{+\infty}(f(t))^2e^{-t}\,\mathrm{d}t<(\varepsilon/4)^2$.

b) En déduire que $\forall A\in[B,+\infty[,\ \displaystyle\int_A^{+\infty}(f(t)-f(A))^2e^{-t}\,\mathrm{d}t<(\varepsilon^2/8)+2\left(f(A)\right)^2\,e^{-A}$ $((a-b)^2\leqslant 2a^2+2b^2)$.

c) Montrer enfin que l'on peut trouver un élément A de $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty}(f(t)-f(A))^2e^{-t}\,\mathrm{d}t<(\varepsilon/2)^2$.

d) Conclure en utilisant la fonction f_1 telle que $f_1(t)=f(t)$ si $t\in[0,A]$ et $f_1(t)=f(A)$ si $t\in[A,+\infty[$.

Q6 Montrer que si f est un élément de F, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f-S_n\|=0$ et que $\|f\|^2=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(< f, L_k >\right)^2$ (on pourra utiliser (1) et Q1).