PARTIE I

Q1 a) $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $0\leq(|a|-|b|)^2=|a|^2+|b|^2-2|a||b|=a^2+b^2-2|ab|$

donc $\underline{2|ab|\leq a^2+b^2}$.

b) f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$ donc $t\mapsto f(t)g(t)e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable sur cet intervalle.

$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $0\leq|f(t)g(t)|e^{-t}\leq\frac{1}{2}[(f(t))^2+(g(t))^2]e^{-t}=\frac{1}{2}(f(t))^2e^{-t}+\frac{1}{2}(g(t))^2e^{-t}$

$\int_0^{+\infty}(f(t))^2e^{-t}dt$ et $\int_0^{+\infty}(g(t))^2e^{-t}dt$ convergent donc $\int_0^{+\infty}[\frac{1}{2}(f(t))^2e^{-t}+\frac{1}{2}(g(t))^2e^{-t}]dt$ converge

les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives montrent la convergence de $\int_0^{+\infty}|f(t)\times g(t)|e^{-t}dt$.

$\underline{\int_0^{+\infty}f(t)g(t)e^{-t}dt \text{ est alors convergente}}$ car absolument convergente.

c) Montrons que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

- F n'est pas vide car F contient l'application nulle de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $(f,g)\in F^2$.
  - → $\lambda f+g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car f et g le sont.
  - → $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $(\lambda f+g)^2(t)e^{-t}=\lambda^2f^2(t)e^{-t}+2\lambda f(t)g(t)e^{-t}+g^2(t)e^{-t}$.

Comme $\int_0^{+\infty}f^2(t)e^{-t}dt$, $\int_0^{+\infty}g^2(t)e^{-t}dt$ et $\int_0^{+\infty}f(t)g(t)e^{-t}dt$ convergent alors $\int_0^{+\infty}(\lambda f+g)^2(t)e^{-t}dt$ converge. Ceci achève de prouver que $\lambda f+g\in F$.

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ donc $\underline{F \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{R}}$.

d) - Les éléments de E sont continues sur $\mathbb{R}_+$.

- Soit $P\in E$. $\lim_{t\to+\infty}t^2P^2(t)e^{-t}=0$ (croissance comparée), $\exists A\in]0,+\infty[$, $\forall t\in[A,+\infty[$, $t^2P^2(t)e^{-t}\leq1$

$\forall t\in[A,+\infty[$, $0\leq P^2(t)e^{-t}\leq\frac{1}{t^2}$. $\int_A^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge donc $\int_A^{+\infty}P^2(t)e^{-t}dt$ converge

Finalement $\int_0^{+\infty}P^2(t)e^{-t}dt$ converge, ceci achève de prouver que $P\in F$

Par conséquent : $\underline{E\subset F}$. En particulier $\underline{E_r\subset F}$ pour tout $r\in\mathbb{N}$.

(Q2) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g,h) \in F^3$.

$$\langle \lambda f+g , h\rangle = \int_0^{+\infty} (\lambda f+g)(t)h(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} (\lambda f(t)h(t)e^{-t} + g(t)h(t)e^{-t})dt \ .$$

$$\langle \lambda f+g , h\rangle = \lambda \int_0^{+\infty} f(t)h(t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} g(t)h(t)e^{-t}dt$$ car les deux intégrales convergent.

$\underline{\langle \lambda f+g, h\rangle = \lambda \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle}$.

$\langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)e^{-t}dt = \langle g,f\rangle$. $\underline{\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle}$.

$\langle f,f\rangle = \int_0^{+\infty} \underbrace{(f(t))^2 e^{-t}}_{\geq 0} dt \geq 0$; $\underline{\langle f,f\rangle \geq 0}$. $\forall t \in \mathbb{R}_+, (f(t))^2 e^{-t} \geq 0$.

Supposons $\langle f,f\rangle = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \int_0^x (f(t))^2 e^{-t}dt \leq \int_0^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t}dt = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x (f(t))^2 e^{-t}dt = 0$; par dérivation : $\forall x \in \mathbb{R}_+, (f(x))^2 e^{-x} = 0$; $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = 0$.

Donc $\underline{\langle f,f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0_F}$

$\underline{\langle\ ,\ \rangle \text{ est bien un produit scalaire sur } F.}$

(Q3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u_n : x \mapsto x^n$; $h_n = u_n h_0$; $h_0 : x \mapsto e^{-x}$.

Leibniz donne : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (u_n^{(k)} h_0^{(n-k)})(x)$ (u_n et h_0 sont C^∞)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ h_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} x^{n-k} \underset{k \to n-k}{=} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{k!} x^k .$$

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+, L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^k}{k!} x^k}$; $\underline{L_n \in E \text{ ; } \deg L_n = n \text{ ; le coefficient}}$

$\underline{\text{du terme de plus haut degré est } \frac{(-1)^n}{n!}}$.

b) Soit $n \in E$ et $g \in E$. Notons que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons que : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $n! \langle g, L_n \rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} g^{(k)}(t)\, h_n^{(n-k)}(t)\,dt$

Une récurrence s'impose.

→ C'est clair pour $k=0$

→ Supposons la propriété vraie pour $k \in [\![0,n-1]\!]$ et montrons-la pour $k+1$.

Il s'agit de prouver que : $(-1)^k \int_0^{+\infty} g^{(k)}(t)\, h_n^{(n-k)}(t)\,dt = (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} g^{(k+1)}(t)\, h_n^{(n-k-1)}(t)\,dt$;

ou encore que : $\int_0^{+\infty} g^{(k)}(t)\, h_n^{(n-k)}(t)\,dt = -\int_0^{+\infty} g^{(k+1)}(t)\, h_n^{(n-k-1)}(t)\,dt$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\int_0^A \underbrace{g^{(k)}(t)}_{u} \underbrace{h_n^{(n-k)}(t)}_{v'}\,dt = \left[g^{(k)}(t)\, h_n^{(n-k-1)}(t)\right]_0^A - \int_0^A g^{(k+1)}(t)\, h_n^{(n-k-1)}(t)\,dt$$

Pour obtenir le résultat voulu il suffit de prouver que $g^{(k)}(0)\, h_n^{(n-k-1)}(0) = 0$ et que :

$\lim_{A \to +\infty} \left(g^{(k)}(A)\, h_n^{(n-k-1)}(A)\right) = 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ h_n^{(n-k-1)}(t) = (u_n h_0)^{(n-k-1)}(t) \underset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{i=0}^{n-k-1} C_{n-k-1}^i\, u_n^{(i)}(t)\, h_0^{(n-k-1-i)}(t).$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ h_n^{(n-k-1)}(t) = \sum_{i=0}^{n-k-1} C_{n-k-1}^i \frac{n!}{(n-i)!} t^{n-i} (-1)^{n-k-1-i} e^{-t}.$$

Si $i \in [\![0,n-k-1]\!]$, $n-i \in [\![k+1,n]\!]$; $\forall i \in [\![0,n-k-1]\!]$, $n-i>0$

Donc $h_n^{(n-k-1)}(0) = 0$; ceci donne encore $g^{(k)}(0)\, h_n^{(n-k-1)}(0) = 0$.

Notons encore que : $h_n^{(n-k-1)}(t) = H_{n-k-1}(t)\, e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ avec

$H_{n-k-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-k-1} C_{n-k-1}^i \frac{n!}{(n-i)!} t^{n-i} (-1)^{n-k-1-i}$. Par conséquent :

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g^{(k)}(t)\, h_n^{(n-k-1)}(t) = (g^{(k)} H_{n-k-1})(t)\, e^{-t}$; or $g^{(k)} H_{n-k-1} \in E$

Par croissance comparée : $\lim_{A \to +\infty} \left(g^{(k)}(A)\, h_n^{(n-k-1)}(A)\right) = 0$ ce qui achève la récurrence.

En particulier la propriété est vraie pour $k=n$

Ceci donne alors : $n! \langle g, L_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)\, h_n^{(0)}(t)\,dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)\, t^n e^{-t}\,dt$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\quad \langle g,L_n\rangle=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} g^{(n)}(t)\,t^n e^{-t}\,dt.$

c) Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ tel que : $m<n$. $L_m\in E$ et $\deg L_m=m$; $L_m^{(n)}=0_E$.

$\langle L_m,L_n\rangle=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} L_m^{(n)}(t)\,t^n e^{-t}\,dt=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} 0\times t^n e^{-t}\,dt=0.$

$\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\ m<n\Rightarrow\langle L_m,L_n\rangle=0.$

Comme $\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\ \langle L_m,L_n\rangle=\langle L_n,L_m\rangle$:

$\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2,\ m\neq n\Rightarrow\langle L_m,L_n\rangle=0$; la famille $(L_n)_{n\geqslant0}$ est orthogonale.

$(L_0,L_1,\dots,L_N)$ est une famille orthogonale de E_N et $\forall \ell\in[\![0,N]\!],\ L_\ell\neq0$.

Par conséquent $(L_0,L_1,\dots,L_N)$ est une famille libre de $N+1$ éléments de E_N.

Comme : $\dim E_N=N+1$: $(L_0,L_1,\dots,L_N)$ est une base orthogonale de E_N.

d) $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt=\Gamma(n+1)=n!$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \langle L_n,L_n\rangle=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} L_n^{(n)}(t)\,t^n e^{-t}\,dt.$ Fixons n dans $\mathbb{N}$;

$\deg L_n=n$ et le coefficient de X^n dans L_n est $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ donc $L_n^{(n)}=\dfrac{(-1)^n}{n!}\times n!=(-1)^n$

Alors : $\langle L_n,L_n\rangle=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty}(-1)^n t^n e^{-t}\,dt=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt=\dfrac{1}{n!}\,n!=1.$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \langle L_n,L_n\rangle=1.$

Finalement : $(L_n)_{n\geqslant0}$ est une famille orthonormale de E.

$(L_0,L_1,\dots,L_N)$ est une base orthonormale de E_N pour tout $N\in\mathbb{N}$.

Q4 $n\in\mathbb{N}$. a) Soit $x\in\mathbb{R}_+$

$\big((n+2)L_{n+2}-(2n+3)L_{n+1}+(n+1)L_n\big)(x)=\dfrac{e^x}{(n+1)!}\left[\dfrac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(x^{n+2}e^{-x})-(2n+3)\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+1}e^{-x})+(n+1)^2\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\right]$

on dérive 2 fois — on dérive 1 fois.

$=\dfrac{e^x}{(n+1)!}\dfrac{d^n}{dx^n}\Big[(n+2)(n+1)x^n e^{-x}-2(n+2)x^{n+1}e^{-x}+x^{n+2}e^{-x}$
$-(2n+3)\big((n+1)x^n e^{-x}-x^{n+1}e^{-x}\big)+(n+1)^2x^n e^{-x}\Big]$

$$\left((n+2)L_{n+2}(x)-(2n+3)L_{n+1}(x)+(n+1)L_n(x)\right)=\frac{e^x}{(n+1)!}\frac{d}{dx^n}\Big[x^ne^{-x}\big((n+2)(n+1)-(2n+3)(n+1)+(n+1)^2\big)$$
$$+x^{n+1}e^{-x}\left(-2(n+2)+(2n+3)\right)+x^{n+2}e^{-x}\Big]$$

$$\underline{\underline{\left((n+2)L_{n+2}-(2n+3)L_{n+1}+(n+1)L_n\right)(x)=\frac{e^x}{(n+1)!}\frac{d}{dx^n}\left(x^{n+2}e^{-x}-x^{n+1}e^{-x}\right)}}$$

b) Soit $x\in\mathbb{R}_+$.

$h_{n+2}(x)=h_{n+1}(x)\,x$; Leibniz donne : $h_{n+2}^{(n+1)}(x)=\sum_{\ell=0}^{n+1}C_{n+1}^{\ell}\,h_{n+1}^{(n+1-\ell)}(x)\underbrace{(x)^{(\ell)}}_{\uparrow}$ à écrire !

$h_{n+2}^{(n+1)}(x)=C_{n+1}^0\,h_{n+1}^{(n+1)}(x)\times x+C_{n+1}^1\,h_{n+1}^{(n)}(x)\times 1$

donc $\underline{\underline{\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+2}e^{-x})=\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+1}e^{-x})\times x+(n+1)\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{n+1}e^{-x})}}$.

c) Soit $x\in\mathbb{R}_+$

Par conséquent : $xL_{n+1}(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}e^x\,x\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+1}e^{-x})$; b) donne alors :

$$xL_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^x\left(\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+2}e^{-x})-(n+1)\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+1}e^{-x})\right).$$

$$xL_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left[(n+2)x^{n+1}e^{-x}-x^{n+2}e^{-x}-(n+1)x^{n+1}e^{-x}\right]$$

$$xL_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+1}e^{-x}-x^{n+2}e^{-x}\right]=-\left((n+2)L_{n+2}-(2n+3)L_{n+1}+(n+1)L_n\right)(x).$$

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $(n+2)L_{n+2}(x)-(2n+3)L_{n+1}(x)+xL_{n+1}(x)+(n+1)L_n(x)=0$

donc $\underline{\underline{(n+2)L_{n+2}-(2n+3)L_{n+1}+XL_{n+1}+(n+1)L_n=0}}$ (polynôme ayant une infinité de zéros...)

Q5 Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$ et $x\in\mathbb{R}_+$. $L_n(x)=\sum_{\ell=0}^{n}C_n^{\ell}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}x^\ell$; $L_n'(x)=\sum_{\ell=1}^{n}C_n^\ell\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\ell x^{\ell-1}$ et $L_n''(x)=\sum_{\ell=2}^{n}C_n^\ell\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\ell(\ell-1)x^{\ell-2}$

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=\sum_{\ell=2}^{n}C_n^\ell\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\ell(\ell-1)x^{\ell-1}+\sum_{\ell=1}^{n}C_n^\ell\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\ell x^{\ell-1}-\sum_{\ell=1}^{n}C_n^\ell\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\ell x^\ell+\sum_{\ell=0}^{n}C_n^\ell\frac{(-1)^\ell}{\ell!}nx^\ell=$$

$$=\sum_{\ell=1\text{ ou }0}^{n-1}C_n^{\ell+1}\frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}(\ell+1)\ell x^\ell+\sum_{\ell=0}^{n-1}C_n^{\ell+1}\frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!}(\ell+1)x^\ell-\sum_{\ell=0}^{n}C_n^\ell\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\ell x^\ell+\sum_{\ell=0}^{n}C_n^\ell\frac{(-1)^\ell}{\ell!}nx^\ell$$

$$=\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{x^\ell}{\ell!}(-1)^\ell\left[-C_n^{\ell+1}\times\ell-C_n^{\ell+1}-\ell C_n^\ell+nC_n^\ell\right]-\underbrace{C_n^n\frac{(-1)^n}{n!}nx^n+C_n^n\frac{(-1)^n}{n!}nx^n}_{=0}=\sum_{\ell=0}^{n-1}\alpha_{n,\ell}x^\ell\text{ avec}$$

$$\alpha_{n,\ell}=(n-\ell)C_n^\ell-(\ell+1)C_n^{\ell+1}=(n-\ell)\frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}-(\ell+1)\frac{n!}{(\ell+1)!(n-\ell-1)!}=\frac{n!}{\ell!(n-\ell-1)!}-\frac{n!}{\ell!(n-\ell-1)!}=0,\ \dots\ \underline{\underline{xL_n''+(1-X)L_n'+nL_n=0}}$$

PARTIE II

(Q1) Soit $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$ un élément de E_n.

$$\langle f - S_n, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle - \langle S_n, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, L_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle f, L_i \rangle \times \lambda_i = 0.$$

$(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormale de E_n

$\forall \varphi \in E_n, \langle f - S_n, \varphi \rangle = 0.$

Soit $P \in E_n - \{S_n\}$. Notons que $S_n - P \in E_n$ donc $f - S_n$ et $S_n - P$ sont orthogonaux.

$S_n - P \in E_n$. Alors Pythagore donne : $\|(f - S_n) + (S_n - P)\|^2 = \|f - S_n\|^2 + \|S_n - P\|^2$

Comme $\|S_n - P\|^2 > 0$ $(P \neq S_n)$, $\|f - P\|^2 = \|(f - S_n) + (S_n - P)\|^2 = \|f - S_n\|^2 + \|S_n - P\|^2 > \|f - S_n\|^2$.

$\forall P \in E_n - \{S_n\}$, $\|f - P\|^2 > \|f - S_n\|^2$; $\forall P \in E_n - \{S_n\}$, $\|f - P\| > \|f - S_n\|$.

Alors S_n est l'unique élément de E_n tel que $\|f - S_n\| = \min_{P \in E_n} \|f - P\|$.

Ce n'est pas une grosse surprise car S_n est la projection orthogonale de f sur E_n.

$$\|f - S_n\|^2 = \langle f - S_n, f - S_n \rangle = \langle f - S_n, f \rangle + \underbrace{\langle f - S_n, S_n \rangle}_{=0 \text{ car } S_n \in E_n} = \langle f - S_n, f \rangle = \langle f, f \rangle - \langle S_n, f \rangle.$$

$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \langle f, S_n \rangle$. $\quad \langle f, S_n \rangle = \langle f, \sum_{k=0}^{n} \langle f, L_k \rangle L_k \rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle f, L_k \rangle \langle f, L_k \rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle f, L_k \rangle^2$.

(Q2) a) $(N+1) C_{N+2} + (x - 2N - 1) C_{N+1} + N C_N = \alpha_N$; $\quad C_N = \dfrac{\alpha_N}{N}$.

$$(N-1+1)\underbrace{C_{N-1+2}}_{=0} + (x - 2(N-1) - 1) C_{N-1+1} + (N-1) C_{N-1} = \alpha_{N-1}.$$

Ainsi $\quad C_{N-1} = \dfrac{1}{N-1}\left(\alpha_{N-1} - (x - 2N + 1) C_N\right) = \dfrac{1}{N-1}\left(\alpha_{N-1} - (x - 2N + 1)\dfrac{\alpha_N}{N}\right)$.

$$C_{N-1} = \frac{1}{N-1}\left(\alpha_{N-1} - (x - 2N + 1)\frac{\alpha_N}{N}\right).$$

clairement les termes de la suite $(C_N, C_{N-1}, \dots, C_1)$ se calculent par une récurrence descendante.

b) Soit $k \in [\![1,N]\!]$. $(k+1)C_{k+2} + (x-2k-1)C_{k+1} + kC_k = \alpha_k$.

$(k+1)C_{k+2}L_k(x) + (x-2k-1)C_{k+1}L_k(x) + kC_kL_k(x) = \alpha_k L_k(x)$.

Sommons de 1 à N et ajoutons α_0 ; nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k L_k(x) = \sum_{k=1}^{N}(k+1)C_{k+2}L_k(x) + \sum_{k=1}^{N}(x-2k-1)C_{k+1}L_k(x) + \sum_{k=1}^{N} kC_kL_k(x) + \alpha_0$$

$$\sum_{k=0}^{N}\alpha_k L_k(x) = \sum_{k=3}^{N+2 \text{ ou } \boxed{N}\ \leftarrow C_{N+1}=C_{N+2}=0}(k-1)C_kL_{k-2}(x) + \sum_{k=2}^{N+1 \text{ ou } \boxed{N}\ \leftarrow C_{N+1}=0}(x-2(k-1)-1)C_kL_{k-1}(x) + \sum_{k=1}^{N}kC_kL_k(x) + \alpha_0.$$

$$\sum_{k=0}^{N}\alpha_kL_k(x) = \sum_{k=2}^{N}\Big((k-1)L_{k-2}(x) + (x-2k+1)L_{k-1}(x) + kL_k(x)\Big)C_k - (2-1)C_2L_0(x) + 1C_1L_1(x) + \alpha_0$$

Nous avons vu que : $(n+2)L_{n+2} - (2n+3)L_{n+1} + XL_{n+1} + (n+1)L_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors : $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $kL_k - (2k-1)L_{k-1} + XL_{k-1} + (k-1)L_{k-2} = 0$

ou : $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $(k-1)L_{k-2} + (X-2k+1)L_{k-1} + kL_k = 0$.

Ainsi $\sum_{k=0}^{N}\alpha_kL_k(x) = 0 - C_2L_0(x) + C_1L_1(x) + \alpha_0 = \alpha_0 + C_1L_1(x) - C_2L_0(x)$.

Notons $L_0(x) = 1$ et $L_1(x) = 1 - x$.

Alors $\sum_{k=0}^{N}\alpha_kL_k(x) = \alpha_0 + C_1L_1(x) - C_2L_0(x) = \alpha_0 + C_1(1-x) - C_2$.

c) Dans le programme qui suit j'ai pris $f : x \mapsto e^{-ax}$.

Alors $\sum_{k=0}^{N}\alpha_kL_k(x)$ est une valeur approchée de $f(x) = e^{-ax}$.

Les coefficients α_k sont obtenus dans Q3. J'ai fait tourner le programme pour $a = 1$, le résultat est honnête.

```
program Clenschaw;

const N_max=100;
type tableau=array[0..N_Max] of real;

var n:integer;x,v:real;alpha:tableau;

procedure coeff(n:integer;var alpha:tableau);

var k:integer;a,r:real;

begin
a:=1;
alpha[0]:=1/(a+1);r:=a/(a+1);
for k:=1 to n do alpha[k]:=alpha[k-1]*r;

end;

function Clen(N:integer;x:real;T:tableau):real;

var k:integer;c,d,e:real;

begin
d:=T[N]/N;c:=(T[n-1]+d*(2*N-1-x))/(N-1);

for k:=N-2 downto 1 do
begin
      e:=(T[k]-(k+1)*d+(2*k+1-x)*c)/k;
      d:=c;c:=e;
      end;

clen:=alpha[0]+(1-x)*c-d;
end;

begin
write('Donnez N. N=');readln(N);
write('Donnez x. x=');readln(x);

coeff(N,alpha);

v:=clen(N,x,alpha);

writeln('La valeur cherchée est : ',v,'  Le delta vaut : ',exp(-x)-v);

end.
```

```
Donnez N. N=10
Donnez x. x=2
La valeur cherchée est :  1.3561470045E-01  Le delta vaut : -2.7941721555E-04

Donnez N. N=20
Donnez x. x=2
La valeur cherchée est :  1.3533502026E-01  Le delta vaut :  2.6297971090E-07

Donnez N. N=50
Donnez x. x=2
La valeur cherchée est :  1.3533528324E-01  Le delta vaut :  0.0000000000E+00
```

Q3 a) $\|f\|^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$.

$\forall A\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^A (f^2(t))e^{-t}dt = \int_0^A e^{-2\alpha t}e^{-t}dt = \int_0^A e^{-(2\alpha+1)t}dt = \left[-\frac{e^{-(2\alpha+1)t}}{2\alpha+1}\right]_0^A$

$\forall A\in\mathbb{R}_+$, $\int_0^A f^2(t)e^{-t}dt = \frac{1}{2\alpha+1}\left[1-e^{-(2\alpha+1)A}\right]$. Alors $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f^2(t)e^{-t}dt = \frac{1}{2\alpha+1}$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}dt$ converge et vaut $\frac{1}{2\alpha+1}$.

Finalement f est un élément de F et $\|f\|^2 = \frac{1}{2\alpha+1}$.

b) Soit $i\in\mathbb{N}$. Soit $A\in\mathbb{R}_+^*$. $\int_0^A t^i f(t)e^{-t}dt = \int_0^A t^i e^{-(\alpha+1)t}dt \underset{u=(\alpha+1)t}{=} \int_0^{(\alpha+1)A} \frac{u^i}{(\alpha+1)^i}e^{-u}\frac{1}{\alpha+1}du$

$\int_0^A t^i f(t)e^{-t}dt = \frac{1}{(\alpha+1)^{i+1}}\int_0^{(\alpha+1)A} e^{-u}u^{(i+1)-1}du$.

Ainsi $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A t^i f(t)e^{-t}dt = \frac{1}{(\alpha+1)^{i+1}}\Gamma(i+1) = \frac{i!}{(\alpha+1)^{i+1}}$.

$\forall i\in\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^i f(t)e^{-t}dt = \frac{i!}{(\alpha+1)^{i+1}}$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. $\langle f, L_k\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)L_k(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} f(t)\sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{(-1)^i}{i!}t^i e^{-t}dt$

$\langle f, L_k\rangle \underset{\text{toutes les intégrales convergent}}{=} \sum_{i=0}^{k} C_k^i\frac{(-1)^i}{i!}\int_0^{+\infty} t^i f(t)e^{-t}dt = \sum_{i=0}^{k} C_k^i\frac{(-1)^i}{i!}\frac{i!}{(\alpha+1)^{i+1}} = \frac{1}{\alpha+1}\sum_{i=0}^{k} C_k^i\left(-\frac{1}{\alpha+1}\right)^i$

$\langle f, L_k\rangle = \frac{1}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{\alpha+1}\right)^k = \frac{\alpha^k}{(\alpha+1)^{k+1}}$. $\forall k\in\mathbb{N}$, $\langle f, L_k\rangle = \frac{\alpha^k}{(\alpha+1)^{k+1}}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$\|f-S_n\|^2 = \|f\|^2 - \langle f, S_n\rangle = \|f\|^2 - \langle f, \sum_{k=0}^{n}\langle f, L_k\rangle L_k\rangle = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n}\langle f, L_k\rangle^2$

$\|f-S_n\|^2 = \frac{1}{2\alpha+1} - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha^k}{(\alpha+1)^{k+1}}\right)^2 = \frac{1}{2\alpha+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(\alpha+1)^2}\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^2\right)^k$

$$\|f-S_n\|^2 = \frac{1}{2\alpha+1} - \frac{1}{(\alpha+1)^2} \times \frac{1-\left(\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^2}$$

$$\|f-S_n\|^2 = \frac{1}{2\alpha+1} - \frac{1-\left(\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\right)^{n+1}}{(\alpha+1)^2-\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha+1}\left(1-1+\left(\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\right)^{n+1}\right)$$

$$\|f-S_n\|^2 = \frac{1}{2\alpha+1}\left(\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\right)^{n+1}.$$

c) $\left|\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2\alpha+1}\left(\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}\right)^{n+1} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (\|f-S_n\|^2) = 0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-S_n\| = 0$.

Remarque : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|f-S_n\|^2 = \|f\|^2 - \langle f, S_n\rangle = \|f\|^2 - \sum\limits_{k=0}^{n} \langle f, L_k\rangle^2$.

Ainsi $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \langle f, L_k\rangle^2 = \|f\|^2$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0 \Rightarrow \|f-S_n\|<\varepsilon$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}(\|f-S_n\|)=0$.

Pour $P=S_{n_0}$. $P\in E$ et $\|f-P\|<\varepsilon$.

Ainsi $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists P\in E$, $\|f-P\|<\varepsilon$.

Q5 a) $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $-\ln t\geq 0 \Leftrightarrow t\in]0,1]$. Ainsi $t\mapsto f(-\ln t)$ est définie sur $]0,1]$. $t\mapsto -\ln t$ est continue et positive sur $]0,1]$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, par composition, $t\mapsto f(-\ln t)$ est définie continue sur $]0,1]$. De plus $\lim\limits_{t\to 0} f(-\ln t) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Pour $\forall t\in[0,1]$, $g(t) = \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t\in]0,1] \\ L & \text{si } t=0 \end{cases}$; g est continue sur $[0,1]$.

Ainsi $t\mapsto f(-\ln t)$ est prolongeable en une fonction continue g sur $[0,1]$.

b) D'après Stone-Weierstrass il existe un élément φ de E tel que : $\max_{t\in[0,1]} |g(t)-\varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall t\in[0,1]$, $|g(t)-\varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\forall t\in[0,1]$, $(g(t)-\varphi(t))^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$.

Ainsi $\int_0^1 (g(t)-\varphi(t))^2\,dt < \int_0^1 \frac{\varepsilon^2}{4}\,dt = \frac{\varepsilon^2}{4}$.

$\exists \varphi\in E$, $\int_0^1 (g(t)-\varphi(t))^2\,dt < \frac{\varepsilon^2}{4}$.

$\exists n\in\mathbb{N}$, $\exists (a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$.

Soit $z\in]0,1]$.

$$\int_z^1 (g(t)-\varphi(t))^2\,dt = \int_z^1 (f(-\ln t)-\varphi(t))^2\,dt \underset{\Phi}{=} \int_{-\ln z}^{0} (f(x)-\varphi(e^{-x}))^2(-e^{-x})\,dx.$$

$x = -\ln t$; $t = e^{-x}$

$dt = -e^{-x}dx$

$$\int_z^1 (g(t)-\varphi(t))^2\,dt = \int_0^{-\ln z} (f(x)-\varphi(e^{-x}))^2 e^{-x}\,dx.$$ En faisant tendre z vers 0

on obtient $\int_0^1 (g(t)-\varphi(t))^2\,dt = \int_0^{+\infty} (f(x)-\varphi(e^{-x}))^2 e^{-x}\,dx$ (la convergence de la première donne la convergence de la seconde...)

Posons $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $R(x) = \varphi(e^{-x})$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $R(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-kx}$. R appartient à F comme combinaison linéaire d'éléments de F et $\|f-R\|^2 = \int_0^{+\infty} (f(x)-R(x))^2 e^{-x}\,dx = \int_0^1 (g(t)-\varphi(t))^2\,dt < \frac{\varepsilon^2}{4}$.

Ainsi $\|f-R\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\exists n\in\mathbb{N}$, $\exists (a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ telle que la fonction R définie par $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $R(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-kx}$

soit un élément de F qui vérifie $\|f-R\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Par conséquent : $\forall A \in [B,+\infty[, \int_A^{+\infty} (f(t)-f(A))^2 e^{-t}\,dt < \varepsilon^2/8 + 2(f(A))^2 e^{-A}$.

c) Supposons que $\forall t \in [B,+\infty[,\ 2(f(t))^2 e^{-t} \geqslant \varepsilon^2/8$

Alors $\forall \alpha \in [B,+\infty[,\ \int_B^{\alpha} (f(t))^2 e^{-t}\,dt \geqslant \int_B^{\alpha} \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{8}\,dt = \frac{\varepsilon^2}{16}(\alpha - B)$

Comme $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} (\alpha - B) = +\infty$ donc $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \int_B^{\alpha} (f(t))^2 e^{-t}\,dt = +\infty$ et : $\int_B^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t}\,dt$ diverge.

ceci contredit le fait que $f \in F$.

Alors $\exists A \in [B,+\infty[,\ 2(f(A))^2 e^{-A} < \varepsilon^2/8$

Ainsi $\exists A \in \mathbb{R}_+^*,\ \int_A^{+\infty} (f(t)-f(A))^2 e^{-t}\,dt < \varepsilon^2/8 + \varepsilon^2/8 = \varepsilon^2/4$.

d) Notons que f_1 est continue sur $[0,A]$ (f est continue sur $\mathbb{R}_+$) et sur $[A,+\infty[$ (f_1 est constante sur $[A,+\infty[$) ainsi f_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$\int_A^{+\infty} (f(A))^2 e^{-t}\,dt$ converge donc $\int_A^{+\infty} (f_1(t))^2 e^{-t}\,dt$ converge également.

Alors f_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} (f_1(t))^2 e^{-t}\,dt$ converge donc $f_1 \in F$.

de plus $\lim\limits_{t \to +\infty} f_1(t) = f(A)$.

Appliquons alors à f_1 le résultat de Q5. $\exists \varphi \in E,\ \|f_1 - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\|f - \varphi\| = \|(f - f_1) + (f_1 - \varphi)\| \leqslant \|f - f_1\| + \|f_1 - \varphi\| < \|f - f_1\| + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\|f - f_1\|^2 = \int_0^{+\infty} ((f - f_1)(t))^2 e^{-t}\,dt = \int_A^{+\infty} (f(t) - f(A))^2 e^{-t}\,dt < \frac{\varepsilon^2}{4}$; $\|f - f_1\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement $\|f - \varphi\| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \varphi \in E,\ \|f - \varphi\| < \varepsilon$.

Posons : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $e_k(t) = e^{-kt}$. $R = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k$.

D'après Q3 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\exists P_k \in E$, $\|e_k - P_k\| < \varepsilon'$.

Soit M un réel strictement positif tel que : $\sum_{k=0}^{n} |a_k| < M$.

Posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$. $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\exists P_k \in E$, $\|e_k - P_k\| < \varepsilon'$.

Posons $\varphi = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$. $\varphi \in E$.

De plus $\| R - \varphi \| = \| \sum_{k=0}^{n} a_k e_k - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k \| = \| \sum_{k=0}^{n} a_k (e_k - P_k) \|$

$\|R - \varphi\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|a_k(e_k - P_k)\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \|e_k - P_k\| < \sum_{k=0}^{n} |a_k| \varepsilon' = M\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\|f - \varphi\| = \|(f-R) + (R-\varphi)\| \leq \|f - R\| + \|R - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi si $f \in F$ et si f admet une limite finie en $+\infty$: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists \varphi \in E$, $\|f - \varphi\| < \varepsilon$.

Q6 a) $\int_0^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t}\,dt$ converge donc $\lim_{A \to +\infty} \int_A^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t}\,dt = 0$.

Alors $\forall \varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists B \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall A \in [B, +\infty[$, $0 \leq \int_A^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t}\,dt < \varepsilon'$.

En particulier : $\exists B \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall A \in [B, +\infty[$, $\int_A^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t}\,dt < (\varepsilon/4)^2$.

b) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall t \in [A, +\infty[$, $0 \leq (f(t) - f(A))^2 e^{-t} \leq \left(2 (f(t))^2 + 2(f(A))^2\right) e^{-t}$

Or : $\int_A^{+\infty} (2(f(t))^2 + 2(f(A))^2) e^{-t}\,dt$ converge car $\int_A^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t}\,dt$ et $\int_A^{+\infty} e^{-t}\,dt$ convergent

Ainsi $\int_A^{+\infty} (f(t) - f(A))^2 e^{-t}\,dt$ converge et $\int_A^{+\infty} (f(t) - f(A))^2 e^{-t}\,dt \leq 2 \int_A^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t}\,dt + 2(f(A))^2 \int_A^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

Alors $\int_A^{+\infty} (f(t) - f(A))^2 e^{-t}\,dt \leq 2 \int_A^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t}\,dt + 2(f(A))^2 \lim_{d \to +\infty} \left[-e^{-d} + e^{-A} \right]$

$\int_A^{+\infty} (f(t) - f(A))^2 e^{-t}\,dt < 2 \times (\varepsilon/4)^2 + 2(f(A))^2 e^{-A}$

(Q7) Soit f un élément de F. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-S_n\|=0$.

Soit à montrer que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq r \Rightarrow \|f-S_n\|<\varepsilon$.

Soit ε un élément de $\mathbb{R}_+^*$. D'après Q6, $\exists\, \varphi \in E, \|f-\varphi\|<\varepsilon$.

Reprenons également $r \in \mathbb{N}$ tel que : $\varphi \in E_r$ (on peut prendre $r=\deg \varphi$ si φ n'est pas nul et 2000 si φ est nul).

D'après I Q1, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f-S_n\| = \min\limits_{P\in E_n} \|f-P\|$.

Supposons que n soit un élément de $\mathbb{N}$ tel que : $n \geq r$. Alors $\varphi \in E_n$ ($E_r \subset E_n$)

Par conséquent : $\|f-S_n\| \leq \|f-\varphi\| < \varepsilon$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, n\geq r \Rightarrow \|f-S_n\|<\varepsilon$.

Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq r \Rightarrow \|f-S_n\|<\varepsilon$. $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-S_n\|=0}}$.

Ceci autorise sans doute à écrire que $\underline{f=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \langle f, L_n\rangle L_n}$.

Rappelons que : $\|f-S_n\|^2 = \|f\|^2 - \langle f, S_n\rangle = \|f\|^2 - \sum\limits_{\ell=0}^{n} \langle f, L_\ell\rangle^2$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-S_n\|^2 = 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{\ell=0}^{n} \langle f, L_\ell\rangle^2\right) = \|f\|^2$.

$\rightarrow$ $\underline{\underline{\text{La série de terme général } (\langle f, L_\ell\rangle)^2 \text{ converge}}}$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{\sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} \langle f, L_\ell\rangle^2 = \|f\|^2}}$.