

# SÉRIES

## I GÉNÉRALITÉS

1. Définition et vocabulaire
2. Une condition nécessaire importante de convergence
3. Une broutille !
4. Opérations sur les séries convergentes
5. Les séries du programme
6. Un lien utile entre la nature de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et la nature de la série de terme général  $u_n - u_{n-1}$

## II SÉRIES À TERMES POSITIFS

1. Le théorème fondamental
2. Critère de comparaison 1 : majoration ou minoration
3. Critère de comparaison 2 : les équivalents
4. Séries absolument convergentes
5. Critère de comparaison 3 : la négligeabilité
6. Des pratiques plus qu'usuelles

## III SAVOIR FAIRE

## IV RÉSUMÉ DE FAUTES À NE PAS FAIRE

## V ENCORE QUELQUES CONSEILS POUR ÉTUDIER UNE SÉRIE

## VI COMPLÉMENTS

1. Un conseil
2. Séries de Bertrand
3. Séries alternées
4. Quelques pratiques usuelles
5. Comparaison avec une série géométrique, again
6. Produit de Cauchy de deux séries
7. Séries et intégrales généralisées
8. Séries géométriques dérivées
9. Quelques sommes classiques
10. Série et formule de Taylor
11. Produits infinis
12. Comparaison et sommation
13. Série commutativement convergente
14. Sommation par paquets

► Si vous trouvez quelques "coquilles" dans ces feuilles merci de me les signaler (jean-francois.cossutta@wanadoo.fr).

**P** Mentionne des résultats particulièrement utiles dans la pratique des séries, souvent oubliés...

★ Mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

**SD** Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

**!** Notions ou résultats qui ne semblent pas toujours très importants mais qui figurent explicitement dans le programme donc qui sont exigibles.

Dans ce résumé les suites et les séries considérées sont des suites et des séries de réels.

Il est essentiel de se souvenir que ce chapitre n'est pas une fin en soi mais est au service du cours de probabilités.

## I GÉNÉRALITÉS

### ► 1. Définition et vocabulaire

**Déf. 1**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels. Pour simplifier, nous dirons que la **série de terme général**  $u_n$  est la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  où  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$  pour tout  $n$  dans  $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ .

Pour tout  $n$  dans  $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ ,  $S_n$  est alors la **somme partielle d'indice**  $n$  ou d'ordre  $n$  de la série de terme général  $u_n$ .

$(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels. Les gens biens disent que la série de terme général  $u_n$  est la suite d'éléments de  $\mathbb{R}^2$  égale à  $\left( \left( u_n, \sum_{k=n_0}^n u_k \right) \right)_{n \geq n_0}$ .

★★ J'éviterai le plus possible de parler de la série  $\sum u_n$  ou de la série  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ .

**Déf. 2**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels. On pose  $\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ ,  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ .

La série de terme général  $u_n$  est **convergente** (resp. **divergente**) si la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  est convergente (resp. divergente).

Si la série de terme général  $u_n$  est convergente, sa **somme** est la limite de la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$ .

On la note  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  ou  $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$  ou  $\sum_{\lambda=n_0}^{+\infty} u_\lambda$  ou ...

**Déf. 3**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels. On pose  $\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ ,  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ .

On suppose que la série de terme général  $u_n$  est convergente et on note  $S$  sa somme.

Pour tout  $n$  dans  $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$  le **reste d'indice**  $n$  ou d'ordre  $n$  de cette série est  $R_n = S - S_n$ .

Si  $n$  est dans  $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ ,  $S = S_n + R_n$  et  $R_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^p u_k$ , ce qui conduit à écrire

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

**PP** Les notations sont celles des définitions précédentes.

- $\forall n \in \llbracket n_0 + 1, +\infty \llbracket$ ,  $u_n = S_n - S_{n-1}$  (ce qui ne suppose pas la convergence de la série...).
- Si la série de terme général  $u_n$  converge :  $\forall n \in \llbracket n_0 + 1, +\infty \llbracket$ ,  $u_n = R_{n-1} - R_n$ .

★ Donner la nature d'une série c'est dire si elle est convergente ou divergente.

★ Deux séries sont de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

**Th. 1**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels. On suppose que la série de terme général  $u_n$  est convergente et on pose :

$$\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0.$$

Donc la suite des restes d'une série convergente tend vers 0.

## ► 2. Une condition nécessaire importante de convergence

**Th. 2** **SD** **SI** la série de terme général  $u_n$  converge **ALORS** :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

★★ Cette condition n'est pas suffisante. Considérer par exemple la série de terme général  $1/n$ .

**Th. 3** **SI** la suite de terme général  $u_n$  ne converge pas vers 0 **ALORS** la série de terme général  $u_n$  diverge !

**PP** Cette condition peut être utile pour montrer qu'une série est divergente surtout si elle dépend d'un ou plusieurs paramètres ( $u_n = \frac{x^n}{n}$ ,  $u_n = \frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$ ...).

## ► 3. Une broutille !

**Prop. 1** Deux séries de réels qui diffèrent d'un nombre fini de termes sont de même nature.

## ► 4. Opérations sur les séries convergentes

**Th. 4**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  sont deux suites de réels.

Si les séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  sont convergentes (★) alors :

- les séries de termes généraux  $u_n + v_n$  et  $\lambda u_n$  sont convergentes ;

$$\bullet \sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n.$$

★★ L'égalité  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n)$  est en général une évidence.

L'égalité  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$  est loin d'en être une.

Le premier membre peut avoir un sens sans que le second en ait un. En clair la série de terme général  $u_n + v_n$  peut être convergente sans que les séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  soient convergentes.

Elle est même source de nombreuses erreurs qu'on se le dise.

On ne s'autorisera donc à "scinder une somme infinie en deux" qu'après avoir vérifié la convergence des deux "morceaux". Observons que :

**Prop. 2**  $(u_n)_{n \geq n_0}$ ,  $(v_n)_{n \geq n_0}$  et  $(w_n)_{n \geq n_0}$  sont trois suites de réels telles que :  $\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket, w_n = u_n + v_n$ .

- Si deux des séries sont convergentes la troisième l'est aussi.
- Si une série est convergente, les deux autres sont de même nature.
- Si deux séries sont divergentes on ne peut à priori rien dire de la troisième.

**Th. 5** Toute série combinaison linéaire de séries convergentes est convergente et sa somme est la combinaison linéaire des sommes.

Plus précisément, soient  $(u_n^{(1)})_{n \geq n_0}$ ,  $(u_n^{(2)})_{n \geq n_0}, \dots, (u_n^{(p)})_{n \geq n_0}$   $p$  suites réelles et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$   $p$  réels.

On suppose que les séries de termes généraux  $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \dots, u_n^{(p)}$  sont convergentes.

Alors la série de terme général  $\lambda_1 u_n^{(1)} + \lambda_2 u_n^{(2)} + \dots + \lambda_p u_n^{(p)}$  est convergente et :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda_1 u_n^{(1)} + \lambda_2 u_n^{(2)} + \dots + \lambda_p u_n^{(p)}) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^p \lambda_k u_n^{(k)} \right) = \sum_{k=1}^p \left( \lambda_k \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n^{(k)} \right).$$

★★ Il convient d'avoir une idée très claire de ce résultat. Il indique qu'une combinaison linéaire de  $p$  séries convergentes est une série convergente dont la somme est la combinaison linéaire des sommes...

Ce théorème permet de justifier proprement la commutation d'une somme finie et d'une somme infinie.

Il est explicitement mentionné dans le programme à partir des concours 2015.

## ► 5. Les séries du programme

**Th. 6** La série exponentielle.

Pour tout réel  $x$ , la série de terme général  $\frac{x^n}{n!}$  est convergente et :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ .

**P** Ceci donne un moyen pour justifier rapidement que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ .

**Th. 7** Les séries de Riemann.

$\alpha$  est un réel. La série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$  est convergente si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Th. 8** **SD** Les séries géométriques et leurs dérivées.  $x$  est un réel.

1. Les séries de termes généraux  $x^n$ ,  $n x^{n-1}$ ,  $n x^n$ ,  $n(n-1)x^{n-2}$  et  $n^2 x^n$  convergent si et seulement si :  $|x| < 1$ .

2. On suppose que  $|x| < 1$ .

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\bullet \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

★★ La généralisation des résultats précédents a été supprimée dans le programme à partir des concours 2015. Mais sachons, avant les compléments, que :

**SD** Soit  $x$  un réel et soit  $r$  un élément de  $\mathbb{N}$  (ou de  $\mathbb{N}^* \dots$ ).

1. La série de terme général  $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)x^{n-r}$  converge si et seulement si  $|x| < 1$ .

$$2. \text{ Si } |x| < 1 : \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$

**SD** Soit  $x$  un réel et soit  $r$  un élément de  $\mathbb{N}$  (ou de  $\mathbb{N}^* \dots$ ).

1. La série de terme général  $\binom{n}{r} x^{n-r} = C_n^r x^{n-r}$  converge si et seulement si  $|x| < 1$ .

$$2. \text{ Si } |x| < 1 : \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \sum_{n=r}^{+\infty} C_n^r x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

► **6. Un lien utile entre la nature de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et la nature de la série de terme général  $u_n - u_{n-1}$**

**Prop. 3**

**P**

**SD**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels.

$$\forall n \in \llbracket n_0 + 1, +\infty \llbracket, u_n = u_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

**Th. 9**

**P**

**SD**

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite de réels.

**La suite  $u_n$**

est de même nature que

**la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$ .**

## II SÉRIES À TERMES POSITIFS

★ Les résultats qui suivent concernent certes les séries à termes positifs mais ils permettent également de traiter le cas des séries à termes négatifs ; changer la série en son opposé... ! Il permettent aussi de traiter les séries ayant un signe constant à partir d'un certain rang.

### ► 1. Le théorème fondamental

**Th. 10**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels **positifs** (★). Pour tout  $n$  dans  $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ ,  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ .

1. La suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  est croissante.
2. La série de terme général  $u_n$  est convergente si et seulement si la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  est majorée.
3. Si la série de terme général  $u_n$  est divergente :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k = +\infty$ .

★★ Le point deux de ce théorème est essentiel.

**Cor. 1**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels positifs. Pour tout  $n$  dans  $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ ,  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ .

Si la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  est majorée par  $M$ , la série de terme général  $u_n$  est convergente et  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq M$

**Cor. 2** **P** La suite des sommes partielles d'une série **divergente à termes positifs** tend vers  $+\infty$ .

**P** La suite des sommes partielles d'une série **divergente à termes négatifs** tend vers  $-\infty$ .

Par exemple  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln \left( \frac{2k-1}{2k} \right) = -\infty$ .

### ► 2. Critère de comparaison 1 : majoration ou minoration

**Th. 11**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  sont deux suites de réels.

On suppose qu'il existe un élément  $p$  de  $\mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket$ ,  $0 \leq u_n \leq v_n$  (★). Alors :

- si la série de terme général  $v_n$  converge, la série de terme général  $u_n$  converge ;
- si la série de terme général  $u_n$  diverge, la série de terme général  $v_n$  diverge.

★★ On ne confondra pas ce résultat avec le théorème fondamental. Ici on travaille sur les termes généraux pas sur les sommes partielles.

**Cor.**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  sont deux suites de réels tel que  $\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ ,  $0 \leq u_n \leq v_n$ .

Si la série de terme général  $v_n$  converge, la série de terme général  $u_n$  converge et  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ .

### ► 3. Critère de comparaison 2 : les équivalents

**Th. 12**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  sont deux suites de réels. On suppose que :

1. **L'une** des suites est positive à partir d'un certain rang (★) ;
2.  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ .

Alors les séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  sont de même nature.

★ Supposer pour ce résultat que les deux suites sont positives rend plus difficile sa pratique. Notons cependant que si les suites sont équivalentes elles ont même signe à partir d'un certain rang...

### ► 4. Séries absolument convergentes

**Déf. 4** Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite de réels.

La série de terme général  $u_n$  est **absolument convergente** si la série de terme général  $|u_n|$  est convergente.

La série de terme général  $u_n$  est **semi-convergente** si la série de terme général  $u_n$  est convergente sans être absolument convergente.

**Th. 13** **SD** Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite de réels.

- Si la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente :

1. La série de terme général  $u_n$  est convergente.

2.  $\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$ . (★)

- Une série convergente n'est pas nécessairement absolument convergente.

La série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n}$  est convergente mais n'est pas absolument convergente.

★★ Pour écrire l'inégalité  $\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$  il est indispensable de vérifier que la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente.

**Prop. 4** **!** Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite de réels. On suppose que la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente.

Alors la série de terme général  $u_n$  est la différence de deux séries à termes positifs convergentes.

**Prop. 5** Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite de réels. On suppose que la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente.

On pose  $\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ ,  $u_n^+ = \text{Max}(u_n, 0)$  et  $u_n^- = \text{Max}(-u_n, 0)$ .

$\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ ,  $u_n = u_n^+ - u_n^-$ , et les séries de termes généraux  $u_n^+$  et  $u_n^-$  sont positives et convergentes.

De plus  $\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ ,  $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ .

**Prop. 6** Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite de réels. On suppose que la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente

$\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket$ ,  $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$ , et les séries de termes généraux  $u_n + |u_n|$  et  $|u_n|$  sont positives et convergentes.

### ► 5. Critère de comparaison 3 : la négligeabilité

**P** Il est encore bon de se souvenir que  $|u_n| = o(v_n)$ ,  $u_n = o(|v_n|)$ ,  $|u_n| = o(|v_n|)$  et  $u_n = o(v_n)$  sont des propriétés équivalentes.

**Th. 14**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  sont deux suites de réels. On suppose que :

1.  $u_n = o(v_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ;
2. il existe un élément  $p$  de  $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$  tel que  $v_n \geq 0$  (★).

Alors :

- si la série de terme général  $v_n$  converge, la série de terme général  $u_n$  converge ;
- si la série de terme général  $u_n$  diverge, la série de terme général  $v_n$  diverge.

★ L'énoncé de ce résultat a été modifié dans le programme à partir des concours 2015.

★ Je rappelle l'ancien résultat et je vous invite à faire la différence. Il est clair que le nouveau résultat est plus généreux que le précédent.

$(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  sont deux suites de réels. On suppose que :

1.  $u_n = o(v_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ;
2. il existe un élément  $p$  de  $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$  tel que  $\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, u_n \geq 0$  et  $v_n \geq 0$  (★).

Alors :

- si la série de terme général  $v_n$  converge, la série de terme général  $u_n$  converge ;
- si la série de terme général  $u_n$  diverge, la série de terme général  $v_n$  diverge.

★★ Il est absolument indispensable pour utiliser les trois théorèmes de comparaison d'évoquer l'hypothèse de signe.

### ► 6. Des pratiques plus qu'usuelles

**Prop. 7** **P** **SD**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels.

On suppose qu'il existe un réel  $\alpha$  **strictement supérieur à 1** tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^\alpha u_n) = 0$ .

Alors  $|u_n| = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , et la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente.

**Prop. 8** **P** **SD**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels.

On suppose qu'il existe un réel  $\alpha$  **inférieur ou égal à 1** tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^\alpha u_n) = +\infty$ .

Alors  $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, u_n \geq \frac{1}{n^\alpha} \geq 0$  et la série de terme général  $u_n$  diverge.

★ Voir un peu plus dans les compléments.

---

### III SAVOIR FAIRE

---

- Calculer des sommes de séries simples.
- Utiliser la C.N. de convergence (particulièrement pour les séries paramétrées).
- Utiliser la C.N.S. de convergence d'une série à termes positifs.
- Utiliser les critères de comparaison des séries à termes positifs.
- Utiliser une intégrale ou une intégrale impropre pour étudier une série (ou bien parfois le contraire).
- Étudier une série de Bertrand.
- Faire du "pilotage riemannien".
- Utiliser les formules de Taylor ou l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour montrer la convergence d'une série ou pour trouver la somme d'une série.
- Encadrer ou trouver un équivalent des sommes partielles d'une série en utilisant des intégrales ou une formule de Taylor ou l'inégalité de Taylor-Lagrange ou...
- Encadrer ou trouver un équivalent du reste d'une série convergente en utilisant des intégrales ou une formule de Taylor ou l'inégalité de Taylor-Lagrange ou...
- Étudier une fonction définie par une série.
- Justifier la permutation d'une somme infinie avec une somme finie.
- Permuter une somme infinie et une intégrale (ou une intégrale impropre).
- Écrire une fonction ou une intégrale ou une intégrale impropre comme somme d'une série.
- Traiter des séries alternées.
- Traiter du produit de Cauchy.
- Étudier un produit infini.

---

### IV RÉSUMÉ DE FAUTES À NE PAS FAIRE

---

- ★ Dire que la suite de terme général  $u_n$  converge vers zéro donc la série de terme général  $u_n$  est convergente.
- ★ Écrire la somme d'une série sans avoir parlé de la convergence de la série.
- ★ Utiliser les critères de comparaison des séries à termes positifs sans vérifier l'hypothèse de positivité.
- ★ Écrire  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$  sans avoir vérifié au moins deux convergences.
- ★ Écrire  $\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$  sans avoir vérifié l'absolue convergence de la série de terme général  $u_n$ .
- ★ Passer de  $\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket u_n \leq v_n$  à  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$  sans vérifier la convergence des deux séries.
- ★ Écrire la séquence :  $\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, 0 \leq u_n \leq v_n$  donc  $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=p}^{+\infty} v_n$  ; comme la série de terme général  $v_n$  converge, la série de terme général  $u_n$  converge.

★ Écrire :  $\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket$ ,  $u_n \leq v_n$  et  $\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket$ ,  $v_n \geq 0$  donc la convergence de la série de terme général  $v_n$  donne la convergence de la série de terme général  $u_n$ .

★ Écrire :  $\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket$ ,  $0 \leq u_n \leq v_n$ , donc la série de terme général  $u_n$  converge si et seulement si la série de terme général  $v_n$  converge.

★ Écrire “sous réserve de convergence” au niveau des séries.

★ Écrire  $\sum_{k=1}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ .

★ Écrire  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) \right)$  avec  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

★ Écrire  $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1} dt$  sans vérification (ou plus généralement  $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(t) dt = \int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t) dt$ ).

★ Permuter une somme infinie et une somme finie sans justifier.

★ Permuter deux sommes infinies sans justifier.

## V ENCORE QUELQUES CONSEILS POUR ÉTUDIER UNE SÉRIE

• Il faut, avant tout, très bien savoir les quelques résultats proposés par le programme !

• Bien observer le terme général et regarder si ce n'est pas un vague clone d'une série de cours.

Exemples :  $(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ,  $\frac{(3n+5)4^n}{n!}$ , ...

• Si la question est “montrer que la série converge et trouver sa somme” il convient de former la suite des sommes partielles et de montrer qu'elle converge en utilisant les méthodes vues sur les suites.

• “Peser” le terme général et dégager les dominantes. Si possible en donner un équivalent simple. Puis faire un pronostic... si le résultat n'est pas donné.

• Penser à utiliser la condition nécessaire de convergence. Si la suite de terme général  $u_n$  ne converge pas vers 0, la série de terme général  $u_n$  diverge.

C'est particulièrement utile pour les séries à paramètre(s). Exemples :  $\frac{x^n}{1+y^{2n}}$ ,  $\frac{n^\alpha}{1+n^\beta}$ , ...

• Si la série est à termes positifs, penser à majorer les sommes partielles, à utiliser les trois critères de comparaison, à faire du pilotage Riemannien, à comparer avec une intégrale généralisée...

• Si la série est à termes négatifs on se ramène au cas précédent en multipliant par  $-1$ .

• Si la série n'a pas un signe défini, on essaiera de montrer qu'elle est absolument convergente.

• Soit  $(a_n)_{n \geq n_0}$  une suite décroissante qui converge vers 0. Dans les cas où le terme général est du type  $(-1)^n a_n$  (ou  $(-1)^{n-1} a_n$ ) penser aux séries alternées et aux suites adjacentes définies à partir des sommes partielles d'indice pair et impair.

• Pour étudier la vitesse de convergence on étudie le reste.

• Pour calculer la somme d'une série on forme les sommes partielles et on passe à la limite.

## VI COMPLÉMENTS

### ► 1. Un conseil

Pour majorer la somme d'une série convergente (ou la valeur absolue de cette somme) il est fortement conseillé de revenir à une somme finie pour s'éviter d'avoir à justifier trop de convergence. Même chose pour un reste.

### ► 2. Séries de Bertrand

**Prop. 9** SD  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux éléments de  $\mathbb{R}$ .

La série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  est convergente si et seulement si :  $\alpha > 1$  ou ( $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ ).

### ► 3. Séries alternées

**Th. 15** SD  $(a_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels **qui est décroissante et qui converge vers zéro**.  $\varepsilon$  vaut 1 ou -1.

1. La série de terme général  $u_n = \varepsilon(-1)^n a_n$  est convergente.

2.  $\forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$ .

P Il est important de se souvenir que le résultat précédent s'obtient en montrant que les suites  $(S_{2p})$  et  $(S_{2p+1})$  sont adjacentes ( $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ ).

**Prop. 10** Pour tout réel  $\alpha$  strictement positif la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  est convergente.

★ Si  $\alpha \leq 0$ , la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  est divergente.

### ► 4. Quelques pratiques usuelles

**Prop. 11** SD “Pilotage Riemannien”.  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels.

1. On suppose qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que :

→  $\alpha > 1$  ;

→ La suite  $(u_n n^\alpha)$  soit convergente (ou bornée).

Alors la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente.

2. On suppose qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que :

→  $\alpha \leq 1$  ;

→ La suite  $(u_n n^\alpha)$  admette une limite (éventuellement infinie) non nulle.

Alors la série de terme général  $u_n$  est divergente.

**Prop. 12** “Pilotage géométrique”.  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels non nuls.

1. On suppose qu’il existe un réel  $c$  appartenant à l’intervalle  $[0, 1[$  et un élément  $p$  de  $\mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq c.$$

Alors la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente.

2. On suppose qu’il existe un réel  $c$  appartenant à l’intervalle  $[1, +\infty[$  et un élément  $p$  de  $\mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq c.$$

Alors la série de terme général  $u_n$  est divergente (son terme général ne tend pas vers 0).

**Prop. 13** “Pilotage géométrique again”. Critère de d’Alembert.  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels non nuls.

On suppose que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$  ( $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ).

Si  $\ell < 1$  la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente.

Si  $\ell > 1$  la série de terme général  $u_n$  est divergente.

Si  $\ell = 1$  la conclusion n’est pas “immédiate”.

★ Ces résultats ne sont pas utilisables en l’état. Il faut à chaque fois se servir des hypothèses pour se ramener à l’utilisation de l’un des théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.

## ► 5. Comparaison avec une série géométrique, again

**Prop. 14**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de réels et  $x$  est un réel.  $\lambda$  est un réel non nul.

Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda x^n$ , les séries de termes généraux  $u_n$  et  $x^n$  sont de même nature.

★ Ce résultat n’est pas aussi banal que cela dans la mesure où la suite de terme général  $x^n$  n’a pas toujours un signe constant. La condition nécessaire de convergence fait... le nécessaire !

## ► 6. Produit de Cauchy de deux séries

**Prop. 15** **SD**  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  sont deux suites de réels positifs.

Pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$  on pose  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ .

$$1. \sum_{k=0}^n c_k \leq \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) \left( \sum_{k=0}^n b_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} c_k.$$

2. Si les séries de termes généraux  $a_n$  et  $b_n$  sont convergentes, il en est de même de la série de terme général  $c_n$  et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

**Th. 16** SD  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  sont deux suites de réels.

Pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$  on pose  $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ .

Si les séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  sont absolument convergentes, il en est de même de la série de terme général  $w_n$  et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

**Prop. 16** **Théorème de Carl Joseph MERTENS**  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  sont deux suites de réels.

Pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$  on pose  $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ .

Si la série de terme général  $u_n$  est absolument convergente et si la série de terme général  $v_n$  est convergente alors la série de terme général  $w_n$  est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

## ► 7. Séries et intégrales généralisées

**Th. 17** SD  $a$  est un entier et  $f$  est une application de  $[a, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que  $f$  est **continue**, **décroissante** et **positive** sur  $[a, +\infty[$ .

La série de terme général  $u_n = f(n)$  et l'intégrale généralisée  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature.

P Ce résultat est par exemple utile pour étudier la nature de la série de terme général  $\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ .

**Th. 18**  $a$  est un élément de  $\mathbb{N}$  et  $f$  est une application de  $[a, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que  $f$  est **continue**, **décroissante** et **positive** sur  $[a, +\infty[$ .

Pour tout  $n$  dans  $[a, +\infty[$ ,  $S_n = \sum_{k=a}^n u_k$  et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  (si la série converge).

1. La suite de terme général  $S_n - \int_a^n f(t) dt$  est convergente.

2. Si l'intégrale (ou la série) est divergente :  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^n f(t) dt$ .

3. Si l'intégrale (ou la série) est convergente :  $\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$ .

Avec cela on peut, par exemple, montrer que :

Si  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ .

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$ .

Si  $\alpha \in ]1, +\infty[$ ,  $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ .

► 8. Séries géométriques dérivées

**Prop. 17**

**SD** Soit  $x$  un réel et soit  $r$  un élément de  $\mathbb{N}$  (ou de  $\mathbb{N}^*$ ...).

1. La série de terme général  $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)x^{n-r}$  converge si et seulement si  $|x| < 1$ .

2. Si  $|x| < 1$  : 
$$\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}.$$

**Prop. 18**

**SD** Soit  $x$  un réel et soit  $r$  un élément de  $\mathbb{N}$  (ou de  $\mathbb{N}^*$ ...).

1. La série de terme général  $\binom{n}{r}x^{n-r} = C_n^r x^{n-r}$  converge si et seulement si  $|x| < 1$ .

2. Si  $|x| < 1$  : 
$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \sum_{n=r}^{+\infty} C_n^r x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

► 9. Quelques sommes classiques

**Prop. 19**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=r}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{r}$$

**Prop. 20**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

**Prop. 21**

Soit  $p$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ .

La série de terme général  $\frac{1}{n^{2p}}$  est convergente et il existe un réel strictement positif  $\gamma_p$  tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \gamma_p \pi^{2p}$$

En particulier

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450} \quad \dots$$

► 10. Série et formule de Taylor

**PP**

La formule de Taylor-Lagrange ou la formule de Taylor avec reste intégral ou l'inégalité de Taylor-Lagrange sont souvent utilisées dans les problèmes pour obtenir des convergences de séries, des sommes de séries, des développements de fonctions en série entière et des majorations de restes de séries convergentes. Qu'on se le dise. Illustrons

**Prop. 22**

$I$  est un intervalle qui contient 0 et  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Ainsi si  $x$  appartient à  $I$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = 0$  alors la série de terme général  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  converge et a pour somme  $f(x)$ .

**Prop. 23**  $I$  est un intervalle qui contient 0 et  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \text{Max}_{u \in [0,x]} |f^{(n+1)}(u)|.$$

Ainsi si  $x$  appartient à  $I$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \text{Max}_{u \in [0,x]} |f^{(n+1)}(u)| \right) = 0$  alors la série de terme général  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  converge et a pour somme  $f(x)$ .

**Th. 19** SD  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle  $I$  qui contient 0.

On suppose qu'il existe une constante  $M$  telle que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}}, \forall x \in I, |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Alors pour tout élément  $x$  de  $I$ , la série de terme général  $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  converge et  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ .

**Prop. 24**

- Pour tout réel  $x$  :  $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$        $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$        $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ .
- Pour tout élément de  $] -1, 1[$  :  $\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$
- Pour tout élément de  $[-1, 1[$  :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x)$
- Pour tout élément de  $] -1, 1[$  :  $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

► **11. Produits infinis**

**Th. 20** SD  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite de réels strictement positifs.

La suite de terme général  $\prod_{k=0}^n u_k$  converge vers un réel non nul si et seulement si la série de terme général  $\ln u_n$  converge.

**Th. 21** SD  $(a_n)_{n \geq 0}$  est une suite de réels strictement supérieurs à  $-1$  et de même signe.

La suite de terme général  $\prod_{k=0}^n (1+a_k)$  converge vers un réel non nul si et seulement si la série de terme général  $a_n$  converge.

**Prop. 25**  $(a_n)_{n \geq 0}$  est une suite de réels strictement supérieurs à  $-1$  telle que la série de terme général  $a_n$  converge.

La suite de terme général  $\prod_{k=0}^n (1+a_k)$  converge vers un réel non nul si et seulement si la série de terme général  $(a_n)^2$  converge.

## ► 12. Comparaison et sommation

**Th. 22**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  sont deux suites de réels. On suppose que :

1. L'une des suites est positive à partir d'un certain rang.
2.  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ .

Alors :

- Si l'une des deux séries converge l'autre converge et  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$  ou  $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$ .
- Si l'une des deux séries diverge l'autre diverge et  $\sum_{k=n_0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n_0}^n v_k$ .

**Th. 23**  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  sont deux suites de réels.

On suppose que :

1.  $u_n = o(v_n)$  ;
2. il existe un élément  $p$  de  $\mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in \llbracket p, +\infty \llbracket, v_n \geq 0$  (★).

Alors :

- si la série de terme général  $v_n$  converge alors la série de terme général  $u_n$  converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \text{ et } \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right).$$

- si la série de terme général  $u_n$  diverge alors la série de terme général  $v_n$  diverge et  $\sum_{k=n_0}^n u_k = o\left(\sum_{k=n_0}^n v_k\right)$ .

## ► 13. Série commutativement convergente

**Déf. 5** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de réel. La série de terme général  $u_n$  est **commutativement convergente** si pour toute permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  la série de terme général  $u_{\sigma(n)}$  converge.

**Th. 24** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de réel. Si la série de terme général  $u_n$  est commutativement convergente alors, pour toute permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

**Th. 25** Une série de réel est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente.

## ► 14. Sommation par paquets

**Th. 26**  $\varphi$  est une application strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  telle que  $\varphi(0) = 0$ .  $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite de réels.

Pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$  on pose  $v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$ .

1. Si la série de terme général  $u_n$  converge alors la série de terme général  $v_n$  converge et :  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .
2. La réciproque est fausse.
3. Si la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est à termes positifs, les séries de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  sont de même nature.