# I Exercices basiques de convergence

**Exercice 1** **Combinaison linéaire de séries convergentes** **F1 ou F1$^+$**

Q1. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}\cdot$ Montrer que cette série est convergente et calculer sa somme.

Q2. Même chose avec $u_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{3^n}\cdot$

Q3. $r$ est dans $\mathbb{N}^*$ et $q$ est dans $]0,1[$. Même chose avec : $u_n = 1-(1-q^n)^r$.

**Exercice 2** **Combinaison linéaire de séries convergentes** **F1$^+$**

$r$ est dans $\mathbb{N}^*$ et $q$ est dans $]0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\big((1-q^n)^r-(1-q^{n-1})^r\big)$.

Montrer que cette série est convergente et calculer sa somme.

**Exercice 3** **Séries classiques. Produit de deux séries....** **F1**

Pour tout couple $(n,p)$ d'éléments de $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_{n,p} = \dfrac{1}{p}\Big(\dfrac{p-1}{p}\Big)^n - \dfrac{1}{p+1}\Big(\dfrac{p}{p+1}\Big)^n$.

Montrer que, pour tout élément $p$ de $\mathbb{N}^*$, $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$ existe et vaut $\dfrac{p-1}{p} - \dfrac{p}{p+1}\cdot$

Montrer que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,p}$ existe et vaut $-1$. Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p}$.

*Le trois exercices qui suivent traitent des dérivées des séries géométrique. Le résultat général a été supprimé du nouveau programme (concours 2015 et suivants). Il est sans doute bon de savoir de démontrer ce résultat. Je rédige 1' et 2.*

**Exercice 4** **Séries géométriques dérivées version 1** **F2**

$r$ est un élément de $\mathbb{N}^{(*)}$ et $x$ est un réel.

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = n(n-1)\cdots(n-r+1)\,x^{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}\,x^{n-r}$ et calculer sa somme s'il y a lieu.

**Exercice 5** **Séries géométriques dérivées version 1'. Application aux lois de Pascal** **F2**

Q1. $r$ est un élément de $\mathbb{N}^{(*)}$ et $x$ est un réel.

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = n(n-1)\cdots(n-r+1)\,x^{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}\,x^{n-r}$ et calculer sa somme s'il y a lieu.

Q2. $r\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$. Une urne contient des boules blanches en proportion $p$ et des boules noire en proportion $q=1-p$. On fait des tirages successifs avec remise d'une boule dans l'urne. $X$ est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois $r$ boules blanches et 0 sinon.

a) Trouver $P(X=k)$ pour $k$ dans $[\![r,+\infty[\![$. En déduire $P(X=0)$.

b) Montrer l'existence et donner la valeur de $E(X)$.

► **En plus ?** Vérifier que $V(X)$ existe et vaut $r\,\dfrac{q}{p^2}\cdot$

► **En plus ?** Etudier la loi d'une somme de $r$ variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p$. Retrouver $E(X)$ et $V(X)$.

---

**Exercice 6** **Séries géométriques dérivées version 2** **F2**

$I = ]-1,1[$, $r$ appartient à $\mathbb{N}$ et $\forall x \in I,\ f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

Q1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$ et calculer $f^{(n)}$ pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

Q2. a) Soit $x$ un élément de $I$. $I_x$ est le segment d'extrémités 0 et $x$. Déterminer $\underset{t \in I_x}{\operatorname{Max}} \left| \dfrac{x-t}{1-t} \right|$.

b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que : $\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$.

En déduire que si $x$ est dans $I$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k}{r} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

---

**Exercice 7** **Critères usuels sur les séries à termes positifs 1** **F1 et F1⁺ pour le 4**

Étudier la nature de la série de terme général $u_n$.

1. $u_n = \ln\left(\dfrac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1}\right)$. 2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 \ln n + (-1)^n}\cdot$ 3. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n + (-1)^n \sqrt{n}}}\cdot$ 4. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

---

**Exercice 8** **Critères usuels sur les séries à termes positifs 2** **F1 et F1⁺ pour le 8**

Étudier la nature de la série de terme général $u_n$.

5. $u_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\cdot$ 6. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)\sqrt{n}}\cdot$ 7. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}\cdot$ 8. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ (avec $\alpha \neq 1$).

---

**Exercice 9** **Critères usuels sur les séries à termes positifs 3** **F1⁺**

Étudier la nature de la série de terme général $u_n$.

9. $u_n = \sin\left(\dfrac{n+2}{n+1}\,\pi\right)$. 10. $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$. 11. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}\cdot$ 12. $u_n = \dfrac{n}{a^n + \ln n}\cdot$

---

**Exercice 10** **Critères usuels sur les séries à termes positifs 4** **F1⁺**

Q1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n$.

13. $u_n = \ln(1 + a^n)$ $(a > 0)$. 14. $u_n = \dfrac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}\cdot$

---

**Exercice 11** **Critères usuels sur les séries à termes positifs 5** **F1⁺**

$(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de réels et $x$ est un réel.

Montrer que si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} x^n$, les séries de terme géneraux $u_n$ et $x^n$ sont de même nature (attention piège).

15. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{1 + y^{2n}}\cdot$

---

**Exercice 12** **Critères usuels sur les séries à termes positifs 6** **F1**

Étudier la nature de la série de terme général $u_n$.

16. $u_n = \dfrac{1}{\ln n}\cdot$ 17. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}\cdot$ 18. $u_n = \left(1 - \cos\dfrac{\pi}{n}\right)(\ln n)^\alpha$. 19. $u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^\alpha}\cdot$

20. $u_n = a\,\sin\dfrac{1}{n} + \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}$. 21. $\dfrac{1}{1+t^n+t^{n+1}}$ $(t>0)$.

---

**Exercice 13** **Critères usuels sur les séries à termes positifs 7** $\boxed{\mathbf{F1^+}}$

Étudier la nature de la série de terme général $u_n$.

22. $u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{n}} - 1$. 23. $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. 24. $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi\, n^2}{2\,n^2 - a\,n+1}\right)$.

25. $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\,\sin(\pi\, t)\,\mathrm{d}t$.

---

**Exercice 14** **Une série classique** $\boxed{\mathbf{F2}}$

$a$ et $b$ sont deux éléments éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a+kb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

(donner une forme intégrale aux sommes partielles).

*Thème abordé dans oral ESCP 1996*

---

**Exercice 15** $\boxed{\mathbf{F1}}$

Donner la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}^*,\, j\in\mathbb{N}^*\\ i+j=n}} \frac{1}{i\,j}$

Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$

---

**Exercice 16** **Constante d'Euler. Application** $\boxed{\mathbf{F1^+}}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n.$

a) Trouver un équivalent de la suite de terme général $u_{n+1}-u_n$.

b) Montrer que la suite de terme général $u_n$ converge (sa limite est la constante d'Euler, nous la noterons $\gamma$).

c) Retrouver un équivalent classique de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

d) Nature de la série de terme génétrl $a^{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}$ $(a>0)$.

---

**Exercice 17** **Bertrand** $\boxed{\mathbf{F1^+}}$

Q1. a) Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,\ln n}$ diverge (on pourra utiliser $\int_k^{k+1}\frac{1}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t$).

b) En déduire que si $\beta$ est un élément de $]-\infty, 1]$, la série de terme général $\dfrac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$ diverge.

Q2. Etudier la nature de la série de terme général $v_n = \sqrt{\ln(3n+1)} - \sqrt{\ln(3n)}$.

---

**Exercice 18** **BertrandBertrand** $\boxed{\mathbf{F1}}$

Q1. Trouver un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_1^n (\ln t)^2\,\mathrm{d}t$ .

Q2. $\alpha$ est un réel. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k \qquad (\int_k^{k+1} \cdots \mathrm{d}t)$.

---

**Exercice 19** **F1**

$(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de réels positifs ou nuls.

Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ est de même que la série de terme général $u_n$.

---

**Exercice 20** **F1** **F1**

Étudier la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+1}}$.

---

**Exercice 21** **F1**

Q1. Étudier la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$a_0 \in \mathbb{R}^{+*} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \ln(1+a_n)$$

Q2. Trouver la limite de la suite de terme général $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$.

Trouver la nature de la série de terme général $a_n$ (chercher un équivalent en utilisant ce qui précède et Cesaro).

---

**Exercice 22** **Deux séries classiques** **F1**

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n \,\mathrm{d}t$.

Q1. Calculer $I_0$ et $I_1$.

Q2. Calculer $I_{n+2} + I_n$ pour $n$ dans $\mathbb{N}$.

Q3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers 0.

Q4. Pour tout $p$ dans $\mathbb{N}$ on pose : $v_p = (-1)^p I_{2p}$. Calculer $v_{k+1} - v_k$ pour $k$ dans $\mathbb{N}$ et en déduire $v_p$ pour $p$ dans $\mathbb{N}$.

Montrer alors que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Q5. En utlisant $w_p = (-1)^p I_{2p+1}$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

---

**Exercice 23** **Permutation de $\int$ et $\sum$. Une série classique** **F1$^+$**

$x$ est un réel de l'intervalle $[-1, 1[$.

Q1. Montrer que pour $n$ dans $\mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} \,\mathrm{d}t = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} \,\mathrm{d}t$

Q2. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

---

**Exercice 24** **Comparaison des sommes (resp. des restes) de deux séries à termes positifs équivalents divergentes (resp. convergentes)** **F2**

$(a_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n \geqslant n_0}$ sont deux suites de réels positifs telles que $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$.

Q1. On suppose que la série de terme général $a_n$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_n$.

Q2. On suppose que la série de terme général $a_n$ diverge. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n_0}^{n} b_n$.

---

**Exercice 25** **QSP ESCP 2006 Q5** **F1$^+$**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $v_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Montrer que les séries de termes généraux $u_n$ et $v_n$ sont de même nature.

---

**Exercice 26** **QSP ESCP 2007 Q4** **F1**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1}n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, e^{t/2} dt$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n\, n!}$.

---

**Exercice 27** **QSP ESCP 2007** **F 1**

Montrer que la série de terme général $\dfrac{n^p}{2^n}$ converge.

---

**Exercice 28** **QSP ESCP 2008** **F 1**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n} - \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n}$.

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n$.

---

**Exercice 29** **QSP ESCP 2012** **F 1**

$f$ est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(1)=0$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q1. Nature de la suite de terme général $u_n$.

Q2. Nature de la série de terme général $u_n$.

---

**Exercice 30** **QSP HEC 2005-6** **F1**

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels positifs ou nuls. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \dfrac{u_n}{1+n^2\,u_n}$.

Y a-t-il un lien entre la nature de la série de terme général $u_n$ et celle des autres ?

---

**Exercice 31** **QSP HEC 2008 S10** **F1**

Représenter dans un plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ l'ensemble des point de coordonnées $(a,b)$ telles que $a>0$, $b>0$ et la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{1+b^n}$ converge.

---

# II Quelques classiques

*Le premier exercice généralise le second...*

**Exercice 32** **Utilisation de la C.N.S. de convergence d'une série à termes positifs. Espérance d'une variable aléatoire discrète** **F2**

$(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs telle que la série de terme général $a_n$ soit convergente.

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, on pose : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $b_n = na_n$.

On se propose de montrer que les séries de termes généraux $b_n$ et $R_n$ sont de même nature et ont même somme.

Q1. Montrer que, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=0}^{n} ka_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n.$$

Q2. Montrer que si la série de terme général $R_n$ converge alors la série de terme général $b_n$ converge.

Q3. On suppose que la série de terme général $b_n$ converge.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ nR_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

En déduire que la série de terme général $R_n$ converge et a même somme que la série de terme général $b_n$.

Q4. Conclure.

Q5. **Application.** Soit $X$ une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $X$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > n)$ converge. En cas d'existence montrer que $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

**Exercice 33** **Utilisation de la C.N.S. de convergence d'une série à termes positifs. Espérance d'une variable aléatoire discrète** **F2**

$X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que si $n$ est dans $\mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=0}^{n} k\,P(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

Q2. Montrer que $X$ possède une espérance $E(X)$ si et seulement si la série de terme général $p(X > k)$ converge.

Montrer en cas d'existence que :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X > k)}$$

Q3. Application On considère $n$ nénuphars (ou nénufars) non fleuris dans un étang. La probabilité pour qu'un nénuphar fleurisse une année est $p$ $(0 < p < 1)$. Si un nénuphar fleurit une année il fleurit l'année suivante. De plus les nénuphars fleurissent de manière indépendante.

$X$ est la variable aléatoire égale au nombre d'années nécessaires pour que tous les nénuphars soient fleuris.

Montrer l'existence et donner la valeur de $E(X)$.

▶ **En plus ?** Trouver la loi de $X$ et retrouver $E(X)$.

---

▶ **Contrôle** $X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une variance et prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que $E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)p(X > k)$.

---

*Le premier exercice est contenu dans le second.*

---

**Exercice 34** **Série à termes positifs (resp. négatifs) divergente** **F1$^+$**

Une urne contient $b$ boule blanches et $b$ boules noires. On tire une boule. Si elle est noire on s'arrête. Si elle est blanche on la remet dans l'urne en ajoutant $a$ boules blanches et on recommence à tirer en respectant le même protocole.

Montrer que la probabilité de ne jamais obtenir une boule noire est nulle.

---

**Exercice 35** **Série à termes positifs (resp. négatifs) divergente. Produit infini** **F1$^+$**

Q1. $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de $[0, 1[$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - u_k)$.

a) Montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

b) Montrer que les séries de termes généraux $u_n$ et $\ln(1 - u_n)$ ont même nature (deux implications).

c) Montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 si et seulement si la série de terme général $u_n$ diverge.

Q2. Une urne contient $b$ boule blanches et $b$ boules noires. On tire une boule. Si elle est noire on s'arrête. Si elle est blanche on la remet dans l'urne en ajoutant $a$ boules blanches et on recommence à tirer en respectant le même protocole.

Montrer que la probabilité de ne jamais obtenir une boule noire est nulle.

---

**Exercice 36** **Série à termes négatifs divergente** **F1$^+$**

Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$.

Q1. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sqrt{n}\, u_n$.

Montrer que la série de terme général $w_n = \ln v_n - \ln v_{n-1}$ diverge et en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Q2. Montrer que $\forall k \in [\![2, +\infty[\![,\ u_k = v_{k-1} - v_k$. En déduire que la série de terme général $u_n$ converge et a pour somme 1.

---

**Exercice 37** **Série à termes négatifs divergente** **F2**

$a$ et $b$ sont deux réels strictement positifs. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite réelle définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b}\, u_n.$$

Q1. Trouver un élément $\alpha$ de $\mathbb{R}$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers un réel $\ell$ strictement positif (on pourra s'intéresser à la convergence de la série de terme général $\ln v_{n+1} - \ln v_n$ où $v_n = n^\alpha u_n$...chercher un équivalent de ce terme général).

Q2. Utiliser ce qui précède pour étudier la nature de la série de terme général $u_n$.

Q3. Désormais on suppose que cette série est convergente. Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

Déterminer $S=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ (sommer la relation $(n+b)u_{n+1}=(n+a)u_n$).

---

**Exercice 38** **Utilisation de la C.N.S. de convergence d'une série à termes positifs.**

**Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète.** **F1$^+$**

$X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que le domaine de définition de $f: x\to \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p(X=k)\,x^k$ contient $[-1,1]$.

Q2. a) On pose : $x\in[0,1[$, $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Montrer que $\varphi$ est croissante sur $[0,1[$. Conséquence en 1 ?

b) Montrer que $X$ possède une espérance si et seulement si $f$ est dérivable à gauche en 1 et qu'en cas d'existence : $E(X)=f'_g(1)$.

---

**Exercice 39** **Utilisation de la C.N.S. de convergence d'une série a termes positifs.**

**Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète.** **F2**

$X$ est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que pour tout réel $x$ de $[-1,1]$, la série de terme général $P(X=n)\,x^n$ est absolument convergente.

On considère alors la fonction $G_X: x\to \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,x^n$. $G_X$ est au moins définie sur $[-1,1]$.

Q2. a) Donner la valeur de $G_X(1)$.

b) Montrer que si $X$ prend un nombre fini de valeurs :

$$E(X)=G'_X(1) \text{ et } V(X)=G''_X(1)+G'_X(1)-\big(G'_X(1)\big)^2.$$

Q3. a) On pose : $\forall x\in[0,1[$, $\varphi(x)=\dfrac{G_X(x)-G_X(1)}{x-1}$. Montrer que $\varphi$ est croissante sur $[0,1[$. Conséquence en 1 ?

b) Montrer que $X$ possède une espérance si et seulement si $G_X$ est dérivable à gauche en 1 et qu'en cas d'existence : $E(X)=(G_X)'_g(1)$.

► **En plus ?**

Q4. a) Montrer que si $n$ est dans $\mathbb{N}$, $G_X(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} P(X=k)\,x^k+\mathrm{o}(x^n)$ au voisinage de 0. Qu'en déduire ?

b) $Y$ est une seconde variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que $X$ et $Y$ ont même loi si et seulement si $G_X=G_Y$.

---

**Exercice 40** **Séries alternées** **F1$^+$**

$(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels **qui est décroissante et qui converge vers zéro**. $\varepsilon$ vaut 1 ou $-1$.

Q1. Montrer que la série de terme général $u_n=\varepsilon(-1)^n\,a_n$ est convergente.

Q2. Montrer que, pour tout élément $n$ de $[\![n_0,+\infty[\![$ : $\big|R_n\big|=\Big|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k\Big|\leqslant|u_{n+1}|$.

Q3. $\alpha$ est un réel. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

Q4. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $u_n \sim v_n$ mais que les deux séries ne sont pas de même nature.

---

**Exercice 41** **Série alternée. Intégrales généralise** **F2**

"Rappel" Si $(a_n)$ est une suite décroissante qui converge vers 0 (qui est donc nécessairement positive...), les séries de termes généraux $(-1)^n\, a_n$ et $(-1)^{n+1}\, a_n$ convergent.

$f$ est une fonction continue, décroissante et positive sur $[0, +\infty[$.

On suppose en outre que $f$ admet une limite nulle en $+\infty$ et on se propose de prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ converge en utilisant des considérations de séries alternées.

Q1. Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t+n\pi)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ est décroissante positive et converge vers zéro.

En déduire que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Q3. a) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} f(t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{(k+1)\,\pi}^{(k+2)\,\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

---

**Exercice 42** **Comparaison de la nature de la série de terme général $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$ et la nature de la suite de terme général $\mathbf{u_n}$** **F1**

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels.

Montrer que la suite de terme général $u_n$ est de même nature que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ et qu'en cas de convergence : $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \big(\lim_{n\to+\infty} u_n\big) - u_{n_0}$.

Application. Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

---

**Exercice 43** **Comparaison de la nature de la suite de terme général $\mathbf{u_n}$ et de la série de terme général $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$** **F1**

Q1. $(t_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels. Montrer que la suite de terme général $t_n$ est de même nature que la série de terme général $t_{n+1} - t_n$.

Q2. Montrer que la suite de terme général $t_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ converge.

En déduire un équivalent de : $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

---

*Deux textes pour un même résultat. Je corrige le premier qui est plus guider.*

---

**Exercice 44** **Comparaison de la nature de la série de terme général $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$ et la nature de la suite de terme général $\mathbf{u_n}$. Formule de Stirling** **F2**

Q1. Soit $(t_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels. Montrer que la suite de terme général $t_n$ converge si et seulement si la série de terme général $t_{n+1} - t_n$ converge.

Q2. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = n!\left(\dfrac{e}{n}\right)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$.

a) Montrer que : $v_n \sim -\dfrac{1}{12n^2}$

b) Utiliser Q1 pour prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel $L$ strictement positif. En déduire un équivalent de $n!$.

Q3. On rappelle que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n}\, dt = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\ \frac{\pi}{2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ (Wallis).

Montrer que $L = \sqrt{2\pi}$ et donc que : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

---

**Exercice 45** **Comparaison de la nature de la série de terme général $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$ et la nature de la suite de terme général $\mathbf{u_n}$. Formule de Stirling** **F2**

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels . Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est de même nature que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Application. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}\,(n/e)^n}$.

Montrer que cette suite converge vers un réel $L$ différent de 0 (on pourra considérer $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$).

En déduire un équivalent de $n!$ (en fonction de $L$).

Utiliser ce que vous savez sur Wallis pour calculer $L$.

---

► **Contrôle**

♡ 1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est convergente. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

2. $\alpha$ est un réel. Donner un équivalent des suites de terme généraux $\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ (pour $\alpha \neq 1$) et $\ln(n+1) - \ln n$.

Retrouver la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$.

---

**Exercice 46** **Produit de Cauchy de deux séries 1** **F1**

$(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels positifs.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=0}^{2n} c_k.$$

Montrer que si les séries de terme généraux $a_n$ et $b_n$ convergent, la série de terme général $c_n$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{+\infty} b_n.$$

---

**Exercice 47** ♡ **Produit de Cauchy de deux séries 2** **F2**

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels positifs. On suppose que les séries de termes généraux $u_n$ et $v_n$ convergent et on pose, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ : $w_n=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}$, $U_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$, $V_n=\sum_{k=0}^{n}v_k$ et $W_n=\sum_{k=0}^{n}w_k$.

Q1. Prouver que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ : $W_n\leqslant U_nV_n\leqslant W_{2n}$.

Q2. En déduire que la série de terme général $w_n$ converge et que : $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$.

Q3. $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux séries absolument convergentes.

Montrer que le résultat précédent vaut encore en remarquant que :

$\left|\sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{j=0}^{n}b_j-\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n}|a_i|\sum_{j=0}^{n}|b_j|-\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}|a_i||b_{k-i}|.$

Q4. $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires **indépendantes** sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer, en utilisant le produit de Cauchy, que :

$$\forall x\in[-1,1],\ G_{X+Y}(x)=G_X(x)\,G_Y(x).$$

T'as mieux coco ?

► **En plus ?** $x$ est un réel tel que $|x|<1$. Retrouver par récurrence que, pour tout élément $r$ de $\mathbb{N}$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+r}{r}x^n=\frac{1}{(1-x)^{r+1}}\quad\text{ou}\quad\sum_{n=r}^{+\infty}n(n-1)\cdots(n-r+1)\,x^{n-r}=\frac{r!}{(1-x)^{r+1}}\cdot$$

► **En plus ?** Si $n$ appartient à $\mathbb{N}^*$, on note $D_n$ le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$, c'est à dire le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ sans point fixe. Par convention On pose $D_0=1$.

Q1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ n!=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$.

Q2. Montrer que $f:x\to\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{D_n}{n!}x^n$ est au moins définie sur $]-1,1[$ et que $\forall x\in]-1,1[,\ e^x f(x)=\frac{1}{1-x}\cdot$

Q3. En déduire que $\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}x^n$. Par des considération de développements limités, en déduire $D_n$ pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.

---

**Exercice 48** **Produit de convolution ou de Cauchy de deux séries 3. Théorème de Mertens** **F2$^+$**

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels. On suppose que la série de terme général $u_n$ est absolument convergente et que celle de terme général $v_n$ converge et on pose, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$ : $w_n=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}$, $U_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$, $V_n=\sum_{k=0}^{n}v_k$ et $W_n=\sum_{k=0}^{n}w_k$.

Q1. Montrer que pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}$ : $U_nV_n-W_n=\sum_{k=0}^{n}\Big(u_k(V_n-V_{n-k})\Big)$.

Q2. a) $M$ est un majorant strictement positif de la suite $(|V_n|)_{n\geqslant 0}$. Soit $p$ un élément de $\mathbb{N}^*$.

Montrer que pour tout élément $n$ de $[\![p,+\infty[\![$ :

$$\big|U_nV_n-W_n\big|\leqslant\sum_{k=0}^{n-p}\Big(|u_k|\big|V_n-V_{n-k}\big|\Big)+2M\sum_{k=n-p+1}^{+\infty}|u_k|.$$

b) Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_nV_n - W_n) = 0$. En déduire que la série de terme général $w_n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

---

**Exercice 49** **Autour du produit de Cauchy** **F2**

Q0. a) Rappeler les résultats obtenus dans le cours sur le produit de Cauchy.

b) Rappeler les résultats obtenus dans le cours sur les séries alternées.

Q1. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$.

a) Justifier rapidement que les séries de terme généraux $u_n$ et $v_n$ convergent

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ (k+1)(n-k+1) \leqslant \left(\dfrac{n+2}{2}\right)^2$.

c) Montrer alors que la suite de terme général $|w_n|$ ne converge pas vers 0. Conclure.

Q2. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$.

a) Justifier rapidement que les séries de terme généraux $u_n$ et $v_n$ convergent.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (-1)^n \dfrac{2}{n+2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}$.

c) Montrer alors que la suite $\left(\dfrac{2}{n+2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

En utilisant un équivalent classique montrer que cette suite converge vers 0. Conclure.

---

**Exercice 50** **Etude d'une fonction définie par une série** $f : x \to \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x^2}$

**D'après orale ESCP 1995 2.5** **F1⁺**

Q1. Montrer que le domaine de définition de $f$ est $\mathbb{R}^*$. Montrer que cette fonction est paire.

Q2. Montrer que $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q3. $x_0$ est élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe un réel positif $C$ tel que :

$$\forall x \in \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right],\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant C|x - x_0|$$

En déduire que $f$ est continue en $x_0$.

Q4. a) Montrer que $f$ a une limite (finie ou infinie) en $+\infty$ et en $0^+$.

b) Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Q5. **Facultatif** Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser sa dérivée sur cette intervalle.

---

**Exercice 51** **Fonction définie par une série :** $f :\ x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ **F1⁺**

On considère la fonction numérique de la variable réelle $f : x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

Q1. Montrer que le domaine de définition de $f$ est $]0,+\infty[$. Étudier les variations de $f$.

Q2. Trouver la limite de $f$ en 0 ($\sqrt{n} \leqslant n$...). Trouver la limite de $f$ en $+\infty$.

Q3. $x$ est un élément de $]0,+\infty[$. Trouver $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ (faire un changement de variable).

Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$ ( on pourra utiliser $\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$).

Q4. Montrer que $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x \in ]0,+\infty[,\ f'(x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-x\sqrt{n}}$.

---

**Exercice 52** **Fonction définie par une série :** $f :\ x \to \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x}$ **F2**

On considère la fonction numérique de la variable réelle $f :\ x \to \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x}$.

Q1. Trouver le domaine de définition de f.

Q2. Étudier la monotonie de f.

Q3. Étudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (on pourra remarquer que : $n \leqslant n^2$ !).

Q4. $x$ est un réel strictement positif. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que : $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}} - 1 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$ (on pourra encadrer $\int_k^{k+1} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$).

En déduire la limite de $f$ en 0.

Q5. $a$ est un élément du domaine de f. On se propose de montrer que f est continue en a.

Soit $h$ un réel tel que : $|h| < a/2$. Montrer que $|f(a+h) - f(a)| \leqslant |h| \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^2 a/2}$ et conclure (on rappelle que $|e^u - 1| \leqslant |u| e^{|u|}$ ; attention aux problèmes de convergence).

Q6. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

---

► **Contrôle**

Q7. S'inspirer de ce qui précède pour prouver que $f$ est dérivable et calculer $f'$.

---

*Les deux exercices qui suivent sont assez semblables. Je corrige le second. Le résultat de Q1 était au programme jusqu'au concours 2014. Il est sans doute bon de savoir le démontrer.*

---

**Exercice 53** **Séries et intégrales généralisées** **F1⁺** **IG**

$a$ est un élément de $\mathbb{N}$ et $f$ une fonction **continue**, **décroissante** et **positive** sur $[a,+\infty[$.

Q1. a) On pose, pour tout $n$ dans $[\![a,+\infty[\![$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=a}^{n} f(k)$. Montrer que si $n$ appartient à $[\![a,+\infty[\![$ :

$$\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant S_n \leqslant \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(a).$$

b) Montrer que la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Q2. Montrer que les suites de termes généraux $S_n - \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et $S_n - \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

Application. Montrer que $\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$ converge vers un réel $\gamma$ appelé la constante d'Euler.

En déduire que $1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Q3. En suppose que la série de terme général $f(n)$ diverge. Montrer : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Application. $\alpha \in ]0,1[$ Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Q4. En suppose que la série de terme général $f(n)$ converge. A-t-on $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ?

---

**Exercice 54** **Séries et intégrales généralisées** **F1$^+$**

$a$ est un entier et $f$ une fonction **continue** (ou continue par morceaux), **décroissante** et **positive** sur $[a,+\infty[$.

On se propose de montrer de manière standard que : la série de terme général $u_n = f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Q1. On pose, pour tout $n$ dans $[\![a,+\infty[\![$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=a}^n u_k$. Montrer que si $n$ appartient à $[\![a+1,+\infty[\![$ :

$$\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(n) \leqslant S_n \leqslant \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t + f(a).$$

Prouver le résultat.

Q2. Application. $\beta$ est un réel. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$.

Q3. Compléments.

a) Montrer que les suites de termes généraux $S_n - \displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ et $S_n - \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

b) Montrer que $\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$ converge vers un réel $\gamma$ appelé la constante d'Euler.

d) En suppose que la série de terme général $f(n)$ diverge. Montrer que pour tout élément $n$ de $[\![a,+\infty[\![$ :

$$S_n \sim \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

---

**Exercice 55** **Convergence normale** **F2**

$I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite d'applications continues de $I$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant n_0}$ de réels telle que :

- la série de terme général $\alpha_n$ est convergente
- $\forall x\in I,\ \forall n \in [\![n_0,+\infty[\![,\ |u_n(x)| \leqslant \alpha_n$

Q1. Montrer que pour tout élément $x$ de $I$, la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente.

Désormais si $x$ est dans $I$ et $n$ dans $\mathbb{N}$, $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$, $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ et $S(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.

Q2. **Sans indication** Montrer que $S: x \to S(x)$ est continue en tout point de $I$.

Q2. **Avec indications** $c$ est un élément de $I$. On se propose de montrer que $S: x \to S(x)$ est continue en $c$ à l'aide de la définition.

Soit $\varepsilon$ un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que l'on peut trouver un élément $p$ de $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ |S(x)-S(c)| \leqslant |S_p(x)-S_p(c)| + 2\sum_{k=p+1}^{+\infty} \alpha_k \leqslant |S_p(x)-S_p(c)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Conclure en utilisant la continuité de $S_p$.

Q3. $a$ et $b$ sont deux éléments de $I$ tels que : $a \leqslant b$. Montrer que :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

(montrer que si $n$ est un élément de $\mathbb{N}$ : $\left|\displaystyle\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b S_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k$).

Q4. Montrer que la série de terme général $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 t^n\, e^t\,\mathrm{d}t$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n$.

**En Plus ?** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$.

---

**Exercice 56** **Critère d'Abel** **F2**

$(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite décroissante de réels positifs qui converge vers zéro. $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels. On pose pour tout $n$ dans $[\![n_0, +\infty[\![$, $V_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} v_k$ et on suppose $(V_n)_{n\geqslant n_0}$ bornée.

Q1. Montrer que la série de terme général $t_n = V_n(u_n - u_{n+1})$ est de même nature que la série de terme général $w_n = u_n v_n$ (on pourra calculer : $\sum\limits_{k=n_0}^{n} t_k$)

Q2. Montrer que la série de terme général $t_n$ est absolument convergente. Conclure pour la série de terme général $w_n$.

Q3. Application : étudier la nature de la série de terme général : $(-1)^n/n$ (resp. $\cos(\alpha n)/n$).

---

**Exercice 57** $\alpha$ est un réel de l'intervalle $]0,1[$. Trouver un équivalent de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ (encadrer $\displaystyle\int_k^{k+1} \dots \mathrm{d}t$)

► **Contrôle** $\alpha$ appartient à $]1,+\infty[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

**Exercice 58** **ESCP 2000 (1-15)**

On considère un entier naturel non nul $n$, et la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

Q1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution. On notera $a_n$ cette solution.

Q2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et convergente.

Q3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_n a_n$ ?

Q4. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_n n^\alpha \left(a_n - \frac{2}{n^2}\right)$ ?

**Exercice 59** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite **décroissante** de réels **positifs ou nuls**.

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n\, u_{2^n}$. On pose encore $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

Q1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{2}\, v_{k+1} \leqslant S_{2^{k+1}} - S_{2^k} \leqslant v_k$.

Montrer que la série de terme général $u_n$ est de même nature que la série de terme général $v_n$.

Q2. Application. $\beta$ est un réel. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

**Exercice 60** HEC 97 et ESCP 2004

Q1. Etudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{\ln(k)}{k}$.

Q2. Etudier $f : x \to \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Q3. Montrer que si $n$ est élément de $[\![3,+\infty[\![$ :

$$\int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\ln(2)}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}.$$

En déduire un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

Q4. On se propose de démontrer l'existence d'un nombre $c$ tel que $S_n = \dfrac{1}{2}\ln^2(n) + c + \epsilon(n)$ où $\epsilon(n)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln^2(n) - \ln^2(n-1) = 2\,\dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$

b) On pose, pour tout élément $n$ de $[\![2,+\infty[\![$ : $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{1}{2}[\ln^2(n) - \ln^2(n-1)]$.

Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k = S_n - \frac{1}{2}\ln^2(n)$ pour tout élément $n$ de $[\![2,+\infty[\![$.

c) Conclure.

---

**Exercice 61** ESCP 96 **Développements limités. Séries.**

Q1. $a$ et $b$ sont deux réels. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

Montrer que la série de terme général $u_n$ converge si et seulement si $a = -2$ et $b = 1$. Déterminer alors la somme de cette série.

Q2. Faire une étude analogue avec : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln n + a\ \ln(n+1) + b\ \ln(n+2)$.

---

**Exercice 62** **Développement $p-$addique d'un réel.**

$p$ est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $\mathcal{S}$ est l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telles que :

- $a_0 \in \mathbb{Z}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in [\![0, p-1]\!]$
- Il existe une infinité d'éléments de la suite distincts de $p-1$.

Q1. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de $\mathcal{S}$.

a) Montrer que la série de terme général $\dfrac{a_n}{p^n}$ converge. On pose $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}$.

b) $n$ est un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que $E(p^n x) = p^n S_n$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{p^k}$.

c) En déduire que $a_0 = E(x)$ et que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $a_n = E(p^n x) - pE(p^{n-1}x)$.

Q2. Pour tout élément $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{S}$ on pose : $\varphi((a_n)_{n\geqslant 0}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}$.

Montrer que $\varphi$ définit une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}$.

---

**Exercice 63** Q1. Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$ est convergente. On note S sa somme.

Montrer qu'il existe trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ : $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

Q2. On pose pour tout $p$ dans $\mathbb{N}^*$ : $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} u_n$ et $T_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}$.

Montrer que pour $p$ dans $\mathbb{N}^*$, $S_p = 24\ (T_p - T_{2p+1}) + 18 + \dfrac{6}{p+1}$.

Soit $k$ dans $\mathbb{N}$, comparer : $1/(k+1)$, $1/k$ et $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$. En déduire que : $S = 18 - 24\ln 2$.

---

**Exercice 64** Q1. Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite de réels non nuls. On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$.

a) Montrer que si $\ell > 1$, la suite de terme général $|u_n|$ est croissante à partir d'un certain rang. En déduire que la série de terme général $u_n$ diverge.
b) Montrer que si $\ell < 1$, il existe un élément $M$ de $]0, 1[$ tel que $|u_{n+1}| \leqslant M|u_n|$ à partir d'un certain rang. En déduire que la série de terme général $u_n$ est absolument convergente.

Q2. $x$ est dans $\mathbb{R}$ et $\alpha$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ :

$$u_n = \frac{x^n}{1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}}$$

a) Montrer que la série de terme général $u_n$ converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$.
b) Montrer que la série de terme général $u_n$ diverge si $|x| = 1$ et $\alpha > 1$.
c) En utlisant des arguments de séries alternées montrer que la série de terme général $u_n$ converge pour $x = -1$ et $\alpha \leqslant 1$.
d) $x = 1$ et $\alpha \leqslant 1$. Etudier la série de terme général $u_n$ ($\frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1$).

---

**Exercice 65** Q1. Soit $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite de réels non nuls. On suppose que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$.

a) Montrer que si $\ell > 1$, la suite de terme général $|u_n|$ est croissante à partir d'un certain rang. En déduire que la série de terme général $u_n$ diverge.
b) Montrer que si $\ell < 1$, il existe un élément $M$ de $]0, 1[$ tel que $|u_{n+1}| \leqslant M|u_n|$ à partir d'un certain rang. En déduire que la série de terme général $u_n$ est absolument convergente.

Q2. $x$ est dans $\mathbb{R}$ et $\alpha$ dans $\mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$ :

$$u_n = \frac{n!\, x^n}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n)}$$

a) Montrer que la série de terme général $u_n$ converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$.
b) En utilisant des arguments de séries alternées montrer que la série de terme général $u_n$ converge pour $x = -1$.
c) Ici $x = 1$. Montrer que la suite de terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ converge (on pourra étudier la convergence de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$).
Utiliser un *dl* pour montrer que la suite de terme général $\ln(n^\alpha u_n)$ converge. Etudier la nature de la série de terme général $u_n$.

---

**Exercice 66** **ESCP 94** Pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + t^n)\,\mathrm{d}t$.

Q1. Calculer $u_1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge et trouver sa limite.

Q2. On considère l'application $f$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} & \text{si } x \in ]0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que $f$ est continue sur $[0, 1]$. On pose $M = \displaystyle\operatorname*{Max}_{x \in [0,1]} f(x)$ et $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.
b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n u_n = I$.

Q3. Montrer que pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$ et pour tout élément $u$ de $[0, 1]$ :

$$\left| \ln(1 + u) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{u^k}{k} \right| \leqslant \frac{u^{n+1}}{n + 1}.$$

En déduire que :

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

---

**Exercice 67**

Q1. Montrer que pour tout élément $n$ de $\mathbb{N}^*$ il existe un élément $u_n$ de $]0, +\infty[$ et un seul tel que : $\displaystyle\int_{u_n}^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = n$.

Q2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0.

Q3. Etudier la nature de la série de terme général $u_n$ (on pourra considérer le prolongement par continuité de $t \to \frac{e^t-1}{t}$ et chercher un équivalent de $u_n$).

---

**Exercice 68** $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est suite croissante de réels positifs qui tend vers $+\infty$.

Pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}$, $S_n : x \to \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-a_k x}$ et $R_n : x \to \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-a_k x}$. $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}$.

Q1. Trouver le domaine de $f$.

Montrer que si $x$ est un réel strictement positif et $n$ un élément de $\mathbb{N}$ :

$$|f(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant e^{-a_{n+1}x}.$$

Q2. On se propose de montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (en utilisant la définition). Soit $x_0$ un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha$ un réel strictement positif tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que si $x$ appartient à $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ :

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant e^{-a_{n+1}(x_0-\alpha)} + |S_n(x) - S_n(x_0)| + e^{-a_{n+1}x_0}.$$

b) Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif. Montrer que l'on peut trouver $p$ dans $\mathbb{N}$ tel que : $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon/2 + |S_p(x) - S_p(x_0)|$. Conclure.

Q3. a) Soit $n$ un élément de $N$. Montrer que $\int_0^{+\infty} S_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} R_n(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

Etudier les cas $a_n = n$ et $a_n = 2n + 1$.