SÉRIE 2

Exercice 1 S **Intégrale impropre comme somme de série 1.**

Q1. Montrer que la fonction $g : x \to \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ est prolongeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer, en utilisant des inégalités classiques que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$ converge.

Q3. p est dans $\mathbb{N}$. Montrer l'existence et calculer $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} \sin t \,\mathrm{d}t$... $\frac{1}{1+(p+1)^2}$

Q4. Prouver que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (donner une forme intégrale aux sommes partielles et passer à la limite en utilisant Q1.).

Exercice 2 S **Intégrale impropre comme somme de série 2.**

Q1. x est un réel strictement positif et p un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer l'existence et calculer $I_p(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t^{p-1}\, \mathrm{d}t$.

Q2. p est un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

a) Montrer que pour tout réel $t : e^t - 1 \geqslant t$.

b) Montrer que, pour tout élément q de $\mathbb{N}^*$, $u_q = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-qt} t^{p-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

Montrer que la suite de terme général u_q converge vers zéro.

c) Déduire de ce qui précède que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$.

On trouve cela dans LYON 1983, ESCP MI 1995, oral ESCP 2006 1.7. On trouve le cas $p = 2$ dans ECRICOME 2000 Ex 2, dans l'oral ESCP 1994 1.13

Exercice 3 PC **Intégrale impropre comme somme de série 3.**

Q1. Trouver le domaine de définition des trois fonctions suivantes :

$$\boxed{f : x \to \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t} \quad \boxed{g : x \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}} \quad \boxed{h : x \to \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t}$$

Q2. x est un réel strictement positif. Pour tout réel t strictement positif $\varphi(t) = \dfrac{t^x}{e^t - 1}$.

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout rél t strictement positif :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t} t^x e^{-kt} + \varphi(t) e^{-nt}$$

.

Q3. On se propose de montrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt}\, \mathrm{d}t$ converge vers zéro en utilisant la définition. Soit ε un réel strictement positif.

a) Montrer que l'on peut trouver un réel α strictement positif tel que : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon/2$.

b) Montrer que φ est bornée sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ (utiliser sa limite en $+\infty$).

En déduire que la suite de terme général $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \varphi(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ converge vers zéro. Conclure proprement.

Q4. Montrer en utilisant ce qui précède que, pour tout réel x strictement positif : $f(x) = g(x+1)h(x+1)$.
C'est à dire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t = \zeta(x+1)\,\Gamma(x+1)$ où $\zeta = g$...

On trouve cela dans l'oral ESCP 2007 1.17

Exercice 4 **S** **Intégrale impropre comme somme de série 4.**

Q1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-\alpha\, t}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ (on se ramènera à Γ).

Q2. Montrer que pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k(\ln t)^k\,\mathrm{d}t$ converge et vaut : $\dfrac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$ (on pourra penser à poser $u = -\ln t$).

Q3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}\cdot$

On trouve cela dans ECRICOME 1997 Ex 2. Dans ECRICOME 1994 Ex 2 on trouve $\displaystyle\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k}$ *ainsi que dans l'oral ESCP 1998 1.16*

En plus Pour mettre tout le monde d'accord, montrer que pour tout réel α strictement positif :

$$\int_0^1 t^{\alpha\, t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\,\alpha^{k-1}}{k^k}\ !$$

Exercice 5 **PC** **Intégrale impropre comme somme de série 5. D'après ESCP 1994 1.4.**

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n\, \sin(\pi\, t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 6 **PC** **Intégrale impropre comme somme de série 6. ESCP 2000 1-7.**

Q1. Pour $x \in [0,1[$, on pose $h(x) = \ln(1-x)$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée $p^{\text{ème}}$ de h.

b) Soit x un élément de $]0,1[$. On pose $\forall t \in [0,x],\ \varphi_x(t) = \dfrac{t-x}{t-1}\cdot$ Étudier les variations de φ_x.

c) Montrer que, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[0,1[$: $\left| h(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant x^p\,|\ln(1-x)|$.

Q2. Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = \ln(x^2)\,\ln(1-x^2)$ est bornée sur l'intervalle $]0,1[$.

Q3. a) Justifier la convergence de l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(x^2\right)\,\ln\left(1-x^2\right)}{x^2} dx$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, après en avoir justifié la convergence, calculer : $I_n = -\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}\,\ln\left(x^2\right)}{n+1} dx$.

c) Montrer que : $J = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)\,(2n+1)^2}\cdot$

Q4. A-t-on : $(\forall x \in [0,1[) \quad \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$?

On trouve encore :

$\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ dans oral ESCP 1996 2.12 et ECRICOME 1996 Pb ;

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k\,\alpha}$ dans oral ESCP 1996 2.28 ;

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x}$ dans oral ESCP 1997 1.5 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ dans oral ESCP 1998 1.19 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^k}$ dans oral ESCP 1999 1-11 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t\,(t+\sin t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^k \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 2001 2.24 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\,k!}{x^k}$ dans oral ESCP 2002 1.28 ;

$\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\,u_k$ avec $\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ dans oral ESCP 2003 1.3 ;

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t\,\ln t = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2k+2)^2}$ dans oral ESCP 2003 1.6 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t - e^{-t}}{e^{nt}-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2\,n^2-1}$ dans oral ESCP 2003 1.11 ;

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2\,\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ dans oral ESCP 2004 1.17 ;

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{xt}-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k\,(k+1)^k}$ dans oral ESCP 2005 1.4 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t = (2n)! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}$ dans oral ESCP 2005 1.10 ;

$\displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1-x}$ avec $a_0 = 1$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall k \in [\![2,+\infty[\![$, $(-1)^{k-1}\,\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2k-3)}{2^k\,k!}$, dans oral ESCP 2006 1.6 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-2t})\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k^2}$ dans oral ESCP 2006 1.19 ;

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k\,\alpha}$ dans oral ESCP 2009 1.6 et dans LYON 2000 Pb 2 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3\, e^{-t}}{(1-e^{-t})\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} \int_0^{+\infty} \frac{t^3\, e^{-t}}{\sqrt{k^4+t^4}}\,\mathrm{d}t \right)$ dans oral ESCP 2009 1.8 ;

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ dans ESSEC 1986 MI.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\, t}\, \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,\alpha^{2k+1}}$ dans EDHEC 1994 ex 2 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left((-1)^{k-1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^k} \right)$ dans LYON 1991 Pb 2 et dans oral ESCP 2004 1.6 ;

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ dans ECRICOME 1996 Pb et dans lyon 2007 Pb 1 ;

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ dans LYON 2010 Pb 2.

Exercice 7 **S** **Le continu n'est pas toujours discret... (version 1).**

f est une fonction continue sur $[a,+\infty[$. On suppose que $\boxed{f \textbf{ est positive}}$ sur $[a,+\infty[$.

Q1. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. Montrer que ceci vaut encore si f est négative sur $[a,+\infty[$.

Q3. Illustrer l'importance de l'hypothèse : f garde un signe constant sur $[a,+\infty[$, dans les résultats précédents.

Exercice 7 **PC** **Le continu n'est pas toujours discret ... (version 2).**

f est une fonction continue sur $[a,+\infty[$.

$(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite croissante d'éléments de $[a,+\infty[$ qui tend vers $+\infty$.

Q1. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et à pour limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_{n_0}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q2. Montrer que la réciproque des résultats précédents n'est pas vraie.

Q3. On suppose que f garde un signe constant sur $[a,+\infty[$.

a) Montrer que si la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que si la série de terme général $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 8 **S** **ESCP 1995 2.6**

Q1. g est une application continue et positive de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que la série de terme général $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Q2. f est une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la série de terme général $f(n)$ est de même nature que la suite de terme général $w_n = \displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q3. Déterminer la nature de la série de terme génral $s_n = \dfrac{\sin\sqrt{n+1}}{n+1}$.

Exercice 9 **PC**

f est une application continue et décroissante, de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Q1. Montrer que f est positive sur $]0,+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.

Q2. h un réel strictement positif.

a) Montrer que la série de terme général $f(nh)$ est convergente.

b) Montrer que : $hf(h) \leqslant \displaystyle\int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $hf\big((n+1)h\big) \leqslant \displaystyle\int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant hf(nh)$.

c) En déduire que : $\displaystyle\int_h^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Prouver que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q3. Application.

a) Soit α un réel appartenant à $]-1,0]$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((h)^{\alpha+1}e^{-nh}(n)^{\alpha}\Big) = \Gamma(\alpha+1)$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-t}}$.

Généralise un peu oral ESCP 2001 1.9

Exercice 10 **PC** **ESCP 2002 1.18.**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, continue et périodique de période $T > 0$. On note :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\quad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

Q1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_k = \displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{|f(t)|}{t}\,dt \quad (k \geqslant 1)$.

Q2. On suppose $M \neq 0$.

a) Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} Mx$.

b) L'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est-elle convergente ?

Q3. On suppose $M = 0$. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ est convergente mais non absolument convergente.

Exercice 11 **S**

Étudier la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+1}}$.

Exercice 12 **S** **ESCP 2002 1.9.**

Classique. À savoir faire.

Soit α un réel strictement supérieur à 1.

Q1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^{\alpha})^n}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^{\alpha})^n}$.

Q2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n(\alpha) = \alpha n(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)).$$

Donner alors une expression de $u_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.

Q3. a) Étudier la monotonie de la suite $(u_n(\alpha))$. En déduire sa convergence.

b) En partageant l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en trois intervalles, à l'aide des points b et 1, démontrer que, pour tout réel b de $]0, 1[$, on a :

$$u_n(\alpha) \leqslant b + \frac{1}{(1 + b^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}$$

c) Donner alors la valeur de la limite de la suite $(u_n(\alpha))$.

Q4. On pose, pour tout entier n non nul : $w_n(\alpha) = \ln(u_n(\alpha)) + \dfrac{\ln(n)}{\alpha}$.

a) Démontrer que la série de terme général $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha)$ est convergente (utiliser un développement limité).

b) En déduire l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que $u_n(\alpha)$ soit équivalent à $\dfrac{K(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$, lorsque n tend vers l'infini.

IV D'autres exercices

Exercice 13 **Critères de comparaison. Séries alternées** **D'après Ecricome 2007** **F1$^+$**

Q1. Trouver la nature des séries de termes généraux $x_n = \ln(2 - e^{\frac{1}{n}})$ et $y_n = \ln(2 - e^{\frac{1}{n}}) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

Q2. On pose $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} x_k$ et $u_n = e^{V_n}$.

a) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

b) Montrer que $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \ln(n\,u_n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} y_k$.

c) En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Q3. Montrer que la série de terme général $(-1)^n\, u_n$ converge.

Exercice 14 ☐

α est un réel strictement positif. On se propose d'étudier la série de terme général

$$v_n(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 + n^2 \sin t)^\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que pour tout élément t de $[0, \dfrac{\pi}{2}]$: $\dfrac{2}{\pi}\, t \leqslant \sin t$.

En déduire que la série de terme général $v_n = v_n(1)$ converge (majorer et intégrer).

Q2. Montrer que si α est supérieur ou égal à 1, la série de terme général $v_n(\alpha)$ converge (on pourra utiliser la conclusion de Q1).

Q3. Dans cette question α est un élément de $]0, 1[$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin t)^\alpha}\, \mathrm{d}t$ converge.

b) Trouver deux <u>constantes</u> strictement positives A et B telles que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, on ait :

$$A \leqslant n^{2\alpha} v_n(\alpha) \leqslant B$$

(on pourra partir d'un encadrement simple de $\frac{1}{n^2} + \sin t$).

c) En déduire alors la nature de la série de terme général $v_n(\alpha)$.

Q4. *Facultatif* A l'aide du changement de variable $u = \tan(t/2)$ et d'une décomposition en éléments simples, montrer que pour tout élément n de $[\![2, +\infty[\![$:

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n^4 - 1}} \ln(n^2 + \sqrt{n^4 - 1}\,)$$

Retrouver le résultat de Q1.

Exercice 15 ESCP 1999 1.3

a est un réel positif ou nul. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (k + a)}$.

Q1. On suppose que a est élément de $[0,1]$. Montrer que la série de terme général u_n est divergente (minorer simplement).

Q2. On suppose que a est élément de $]1,+\infty[$.

a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1}\, u_n$.

b) Montrer que la série de terme général u_n converge.

En déduire que la suite de terme général $n\,u_n$ converge et, en raisonnant par l'absurde, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n\,u_n) = 0$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 16 **Séries et intégrales généralisées** ESCP + HEC 99

Q1. a est strictement positif et n est un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que : $I_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}(1-e^{-t})^n\, \mathrm{d}t$ converge.

b) Montrer que : $(n+1)\Big(I_n(a) - I_{n+1}(a)\Big) = aI_{n+1}(a)$. Calculer $I_n(a)$ en fonction de n et a.

a est un réel positif. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k+a)}$

Q2. On suppose que a est élément de $[0,1]$. Montrer que la série de terme général u_n est divergente (minorer simplement).

Q3. On suppose que a est élément de $]1,+\infty[$.

a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \frac{1}{a-1} - \frac{n+a}{a-1}\, u_n$.

b) Montrer que la série de terme général u_n converge.

En déduire que la suite de terme général $n\,u_n$ converge et, en raisonnant par l'absurde, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n\,u_n) = 0$.

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 17 ESCP 1999 1.10

$\mathcal{L}$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\exists K_f \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leqslant K_f|x-y| \quad (1)$$

g est un élément de $\mathcal{L}$. a est un réel. λ est un réel de l'intervalle $]-1,1[$.

Q1. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |g(x)| \leqslant |g(y)| + K_g|x-y|$.

Montrer que $F : x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n\, g(x+na)$ est un élément de $\mathcal{L}$.

Q2. Montrer que F est l'unique fonction de $\mathcal{L}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \lambda F(x+a) = g(x)$.

Exercice 18 20'-11h05

a est un réel strictement positif et distinct de 1.

$u_0 = a$ et pour tout n dans $\mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}\cdot$

Q1. Montrer que la suite de terme général u_n converge vers 1.

Q2. Montrer que la série de terme général $u_n - 1$ converge (on pourra étudier la limite de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}-1}{u_n-1}$).

Exercice 19 ☐

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = \sin\Big(\dfrac{2n^2+n+1}{2n}\pi\Big)$ et $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$.

Q1. La suite de terme général u_n est-elle convergente ?

Q2. Trouver un équivalent de v_n et endéduire que la série de terme général v_n est convergente.

Q3. a) Montrer que pour tout réel x, $|\sin x| \leqslant |x|$.

b) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^* : 0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{8n(2n-1)^2}$.

c) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^* : 0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \leqslant \frac{\pi^2}{8}\int_n^{+\infty} \frac{1}{t(2t-1)^2}\,\mathrm{d}t$.

Calculer cette dernière intégrale ($\dfrac{1}{t(2t-1)^2} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{2t-1} + \dfrac{c}{(2t-1)^2}$...)

Q3. Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \leqslant \frac{\pi^2}{8}\Big(\frac{1}{2n-1} - \ln\big(1+\frac{1}{2n-1}\big)\Big) \leqslant \frac{\pi^2}{16}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Q4. Trouver une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} v_k$ à 10^{-3} près.

Exercice 20 ESCP 96

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

f est un élément de E. Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on pose : $I_n(f) = \displaystyle\int_0^1 t^n\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que la suite de terme général $I_n(f)$ converge ver 0.

Q2. a) Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{n+1}}{1+t}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire que la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$ converge et écrire sa somme sous forme intégrale.

b) Qu'obtient-on si : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = 1$?

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ en posant : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sqrt{x}$

Q3. Ici on s'intéresse à la convergence de la suite de terme général $nI_n(f)$.

a) Soit α un élément de $]0,1[$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^\alpha t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

b) Ici $f(1) = 0$. On se donne un réel ε strictement positif. Montrer que l'on peut trouver α dans $]0,1[$ tel que :

$$\Big|n\int_\alpha^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En déduire $\lim_{n\to+\infty} nI_n(f)$

c) Etudier le cas général en se ramenant au cas particulier précédent.

Q4. Ici $\forall x \in [0,1],\ f(x) = e^{-x}$.

Calculer $I_n(f)$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$. Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Exercice 21 **ESCP 2004 1.19. Rien que du bonheur**

On se donne une suite $(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{N}^*$ et on pose $\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha(k)$.

On appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.

Q1. Montrer que φ est une injection croissante de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

On pose dans toute la suite et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha(n)u_{\varphi(n)}$, $w_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} u_k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k$

Q2. Montrer que les séries de terme généraux u_n et w_n sont de même nature.

Q3. Montrer que si la série de terme général u_n converge, il en est de même pour la série de terme général v_n.

Q4. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le rapport $\dfrac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)}$ soit inférieur ou égal à M.

Montrer que si la série de terme général v_n converge, il en est de même pour la série de terme général u_n.

Q5. On pose $\alpha(n) = 2^n$ et $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\beta > 1$.

Q6. On pose $\alpha(n) = (n!)^n$ et $u_n = \dfrac{1}{n\ \ln n}\cdot$

a) Montrer que $((\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$

b) Montrer que $\big(\ln(\alpha(n))\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équivalente à $(n^2 \ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Étudier la convergence de la série de terme général v_n. Conclusion ?

Exercice 22 **Théorème de Fubuni. Application**. ESSEC MII 1998 20'-11h40

On considère une famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ de réels **<u>positifs</u>**.

Si i appartient à $\mathbb{N}$, on notera S_i la somme $\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$ lorsqu'elle existe. On notera S la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ lorsqu'elle existe.

Q-1. Dire ce que signifie l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$.

Q0. Rappeler la CNS de convergence d'une série à termes positifs.

Q1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe si et seulement si il existe un réel M tel que : $\forall (r,s) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} u_{ij} \leqslant M$ (deux implications).

Q2. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$ existe.

En cas d'existence, montrer que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{ij} = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$.

Exercice 23 **Exponentielle d'une matrice.** **F**

p appartient à $\mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et si M appartient à E, pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient de M situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de E. $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge si, pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$, la suite de terme général $[M_n]_{i,j}$ converge. En cas de convergence la limite de la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est la matrice de E, $M = \big(\lim\limits_{n\to+\infty}[M_n]_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$; on dit encore que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers M.

On admet que si $(M_n)_{n\geqslant 0}$ et $(N_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites déléments de E qui convergent vers M et N et si T est une matrice de E, les suites $(M_n+N_n)_{n\geqslant 0}$, $(M_n\,N_n)_{n\geqslant 0}$, $(T\,M_n)_{n\geqslant 0}$ et $(M_n\,T)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement vers $M+N$, $M\,N$, $T\,M$ et $M\,T$.

Q1. A est un élément de E. m_A est le maximum de la valeur absolue des coefficients de A.

a) Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}^*, \forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2\ \big|[A^k]_{i,j}\big| \leqslant p^{k-1}\,m_A^k$.

b) En déduire que la suite de terme général $S_n(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,A^k$ converge. Nous noterons e^A sa limite.

Q2. On suppose que A et B sont deux matrices de E qui commutent.

a) Montrer que B et e^A commutent. Montrer que e^A et e^B commutent

b) Utiliser le produit de Cauchy pour montrer que $e^{A+B} = e^A\,e^B$