TD-COURS 12 - FNPV L'OPUS 1 et 2 : PREMIERS ÉLEMENTS 2011-2012

- Introduction
- Norme euclidienne. Distance euclidienne.
- Boules, ouverts, fermés.
- Quelques propiétés des ouverts et des fermés.
- Droites affines, sous-espaces affines, hyperplans affines.
- Segments. Partie convexe.
- Partie bornée.
- Adhérence d'une partie
- Limite, continuité, prolongement par continuité.
- Opérations de base. Fonctions continues usuelles.
- Le théorème d'encadrement.
- Les compositions.
- Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une fonction continue.

Exercice 1 Quelques propiétés des ouverts et des fermés

Q1. Décrire une boule ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^n$.

Q2. Montrer que dans $\mathbb{R}^n$:

a) Toute boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. fermé).

b) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

c) Toute intersection <u>finie</u> d'ouverts est un ouvert.

d) Toute réunion <u>finie</u> de fermés est un fermé.

e) Toute intersection de fermés est un fermé.

Q3. Si A est un élément de $\mathbb{R}^n$ et r un réel strictement positif, la sphère $S(A,r) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X - A\| = r\}$ est un fermé.

► Contrôle Intervalles ouverts (resp. fermés) de $\mathbb{R}$...

Soit a et b deux réels. Dire si les parties suivantes de $\mathbb{R}$ sont ouvertes, fermées ou ni l'un ni l'autre : $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $[a,b]$.

Exercice 2 Produit de n ouverts (resp. fermés) de $\mathbb{R}$

Q1. **Une inégalité utile proposée par le programme**.

Montrer que si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$: $\boxed{\underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\text{Max}} |x_k| \leqslant \|X\| \leqslant \sqrt{n} \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\text{Max}} |x_k|}$.

Q2. a) Soit $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ et r un réel strictement positif.

Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left]a_k - r, a_k + r\right[= \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \underset{1 \leqslant k \leqslant n}{\text{Max}} |x_k - a_k| < r\}$.

Dans la suite nous noterons $P(A,r)$ cet ensemble. Comparer $B(A,r)$, $P(A,r)$ et $B(A, \sqrt{n}\, r)$.

b) Montrer que si Ω_1, Ω_2,..., Ω_n sont des ouverts de $\mathbb{R}$, $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

c) Montrer que si F_1, F_2,..., F_n sont des fermés de $\mathbb{R}$, $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Q3. **Une caractérisation importante des ouverts de $\mathbb{R}^n$.**

Montrer qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert si et seulement si pour tout élément $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de Ω, il existe un réel strictement positif r tel que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}]a_k - r, a_k + r[\subset \Omega$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ **Les sous-espaces vectoriels et les sous-espaces affines sont des fermés**

Q1. Montrer que le translaté d'un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$.

Q2. Montrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

Q3. Montrer qu'un sous-espace affine (translaté d'un sous-espace vectoriel) est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

► **Contrôle 1** D est une partie de $\mathbb{R}^n$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $D + \Omega = \{X + Y, \ (X, Y) \in D \times \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

► **Contrôle 2** Montrer qu'un segment de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ **Un résultat utile pour les dérivées directionnelles**

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. A est un point de Ω et U un élément non nul de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que le domaine de définition de la fonction $g : t \to f(A + t\,U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient 0.

Et si U est nul ?

► **Contrôle Une caractérisation importante des fermés**.

Définir la notion de suite convergente dans $\mathbb{R}^n$.

Soit F une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est un fermé si et seulement si toute suite de F qui converge a sa limite dans F.

► **Contrôle Une petite révision sur les convexes**.

Q-1. A et B sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Définir et caractériser le segment $[A, B]$. Montrer que $[A, B]$ est un fermé.

Q0. Définir et caractériser la notion de convexe de $\mathbb{R}^n$.

Q1. Montrer que les boules de $\mathbb{R}^n$, les segments de $\mathbb{R}^n$, les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$ sont des convexes.

Q2. Montrer qu'une intersection d'une famille de convexes de $\mathbb{R}^n$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$.

Q3. $\mathcal{C}$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$. A_1, A_2, ..., A_p sont p points de $\mathcal{C}$.

Montrer que si λ_1, λ_2, ..., λ_p sont p réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\, A_k \in \mathcal{C}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ **Un "générateur" important d'ouverts et de fermés. Image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) par une fonction continue. Application**.

Q1. Soit f une application $\boxed{\text{continue}}$ de $\boxed{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que l'image réciproque d'un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$ est un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$.

Q2. Soit f une application $\boxed{\text{continue}}$ de $\boxed{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\{X \in \mathbb{R}^n \mid f(X) > c\}$ et $\{X \in \mathbb{R}^n \mid f(X) < c\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $\{X \in \mathbb{R}^n \mid f(X) \geqslant c\}$ et $\{X \in \mathbb{R}^n \mid f(X) \leqslant c\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^n$.

c) Montrer que les ensembles de niveau de f sont des fermés de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6 **Des fonctions continues usuelles.**

Montrer les propriétés suivantes :

1. $X \to \|X\|$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.
2. i est un élément de $[\![1,n]\!]$. On pose : $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ p_i(X) = x_i$. p_i est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.
3. Si $(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ et si c appartient à $\mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \to c\, x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_n^{q_n}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.
4. Toute fonction polynôme de n variables est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.
5. Toute fonction rationnelle de n variables est continue en tout point de son domaine.

Exercice 7 **Encore des ouverts et des fermés.**

a_1, a_2, ..., a_n et c sont $n+1$ réels.

Q1. Montrer que les ensembles suivants sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$: $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n < c\}$ et $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n > c\}$

Q2. Montrer que les ensembles suivants sont des fermés de $\mathbb{R}^n$: $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n \leqslant c\}$, $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n \geqslant c\}$ et $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = c\}$.

Q3. Montrer que $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 > 1 \text{ et } x - y + 2z < 2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 **Fonction continue sur un fermé borné.**

Q1. Rappeler ce qu'est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

Q2. Rappeler le théorème fondamental.

Q3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0,\ y \leqslant 0 \text{ et } x + y \geqslant -3\}$ et $\forall (x, y) \in F,\ f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

a) Dessiner F.

b) Montrer que f possède un maximum et un minimum absolus sur F.

Exercice 9 **Utilisation du théorème d'encadrement.**

Etudier la continuité de la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Exercice 10 **La version 1 de la composition.** $\boxed{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

Q1. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une application de I dans $\mathbb{R}$. D est une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $f(D) \subset I$.

Montrer que si f est continue sur D et φ continue sur I, alors $\varphi \circ f$ est continue sur D.

Q2. Etudier la continuité de la fonction f définie par :

a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \sin(x)\, e^{2x - 3y + 1}$ b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ \cos x & \text{si } x = y \end{cases}$

Exercice 11 **La version 2 de la composition.** $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

Q1. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et u_1, u_2,..., u_n sont n applications de I dans $\mathbb{R}$.

D est une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application de D dans $\mathbb{R}$.

On suppose de plus, que pour tout élément t de I, $(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) \in D$.

On suppose encore que :

1. Pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, u_k est continue en un point b de I ;
2. f est continue en $A = (u_1(b), u_2(b), \dots, u_n(b))$.

Montrer que $t \to f\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big)$ est continue en b.

Q2. **Application** Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. A est un point de Ω et U un élément non nul de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que le domaine de définition de la fonction $g : t \to f(A + t\,U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient 0.

Montrer que si f est continue en tout point de Ω alors g est continue en tout point de son domaine.

Exercice 12 **Quelques limites.**

Etudier l'existence d'une limite pour f en $(0, 0)$ dans les cas suivants.

a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ b) $f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{3x^2 + y^2}$ c) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ d) $f(x, y) = \dfrac{\sin x \sin y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}$

Exercice 13 **Un exemple pathologique mais presque.**

Q1. Montrer que $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Q2. Etudier la continuité de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

EN PLUS

Exercice 14 Montrer que $f : (x, y) \to 1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15 Etudier l'existence d'une limite pour f en $(0, 0)$ dans les cas suivants.

a) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ b) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + xy^3}{x^3 + y^3}$ c) $f(x, y) = \dfrac{xy^6}{x^6 + y^8}$.

Exercice 16 f est l'application de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(1 - x)(1 - y)}{1 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (1, 1) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 1) \end{cases}$

Q1. Montrer que f est continue sur $[0, 1]^2$ (si nécessaire on pourra remarquer que $1 - x \leqslant 1 - xy$ pour...).

Q2. En déduire que f possède un maximum M et un minimum m sur $[0, 1]^2$.

Q3. Préciser m et les points où f prend cette valeur.

Exercice 17 Montrer que $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seules parties de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouvertes et fermées.