TD-COURS 12 - FNPV L'OPUS 4 + (L'OPUS 5)/2 : FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^2$

- Dérivées partielles d'ordre 2. Fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Opérations.
- Théorème de Schwarz.
- Dérivée directionnelle seconde.
- Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.
- Développement limité d'ordre 2. Le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
- La condition suffisante d'extremum local.

Exercice 1 **Calcul de dérivées partielles d'ordre 2**.

f est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Q0. Faire un rapide rappel sur les premiers éléments de "l'ordre 2".

Q1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω constitué de $\mathbb{R}^2$ privé de $O = (0,0)$.

Q2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q3. Montrer l'existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(O)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(O)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(O)$.

Exercice 2 **Démonstration du théorème de Schwarz pour $n = 2$.** **Facultatif**.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ et $A = (a,b)$ un point de Ω.

On suppose que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ sont définies sur une boule de centre A et $\boxed{\text{continues}}$ en A.

On se propose de montrer que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(A) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(A)$ en montrant que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, $\left| \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(A) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(A) \right| < \varepsilon$!

Soit ε un réel strictement positif.

Q1. Montrer que il existe un réel r strictement positif tel que

$$\forall X \in B(A,r),\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(X) - \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(A) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(X) - \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(A) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Q2. Soient α et β deux éléments de $]0, \frac{r}{2\sqrt{2}}[$.

a) Montrer que $[a, a+\alpha] \times [b, b+\beta] \subset B(A,r)$.

b) Montrer que $\varphi : x \to f(x, b+\beta) - f(x,b)$ est dérivable sur $[a, a+\alpha]$ et calculer φ'.

En déduire l'existence d'un élément c de $]a, a+\alpha[$ tel que :

$$f(a+\alpha, b+\beta) - f(a+\alpha, b) - f(a, b+\beta) + f(a,b) = \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c, b+\beta) - \frac{\partial f}{\partial x}(c,b) \right).$$

c) En considérant la fonction $\psi : y \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(c,y)$ sur $[b, b+\beta]$, montrer que l'on peut trouver d dans $]b, b+\beta[$ tel que :

$$f(a+\alpha, b+\beta) - f(a+\alpha, b) - f(a, b+\beta) + f(a,b) = \alpha\, \beta\, \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(c,d).$$

De la même manière on peut trouver c' dans $]a, a+\alpha[$ et d' dans $]b, b+\beta[$ tels que

$$f(a+\alpha, b+\beta) - f(a+\alpha, b) - f(a, b+\beta) + f(a, b) = \alpha\,\beta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(c', d').$$

d) Achever de prouver le résultat proposé.

Exercice 3 **Calcul des dérivées partielles seconde.**

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = x^3 + 2xy + y^3 - z^3 + 2xz$

a)

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ et calculer ses dérivées partielles secondes.

Écrire la Hessienne de f en $A = (1, 1, 1)$. Calculer $q_A(H)$ pour tout élément $H = (\alpha, \beta, \gamma)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 **La première composition pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.**

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une application de I dans $\mathbb{R}$.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $f(\Omega) \subset I$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

Montrer que $g = \varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et calculer ses dérivées partielles seconde.

► **Contrôle 1**. A est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On note $\mathcal{S}_A$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) + A(x, y).$$

Q1. Montrer que si f est un élément de $\mathcal{S}_A$ alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x+y) = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}(x, y)$$

Q2. Montrer que si A est l'application $(x, y) \to x^3\,y^3$, alors $\mathcal{S}_A$ est vide ($x = x + 0$!).

Q3. Désormais A est l'application $(x, y) \to 4x^3y + 6x^2\,y^2 + 4xy^3$.

Soit f un élément de $\mathcal{S}_A$. Montrer que : $f(0) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) = 12t^2$. En déduire f.

Achever proprement la détermination de $\mathcal{S}_A$.

► **Contrôle 2**. u et v sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Montrer que $f : (x, y) \to u(x + v(y))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Exercice 5 **La seconde composition pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.**

u_1, u_2, ..., u_n sont n applications de I dans $\mathbb{R}$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

On suppose que : $\forall t \in I,\ \big(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\big) \in \Omega$.

On suppose encore que u_1, u_2, ..., u_n sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

Montrer que $g : t \to f\big(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et calculer g''.

Exercice 6 **Dérivée directionnelle seconde.**

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \Omega}$.

A est un point de Ω et $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que le domaine de définition $D_g = \{t \in \mathbb{R} \mid A + t\,U \in \Omega\}$ de la fonction $g : t \to f(A + t\,U)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_g et que :

$$\forall t \in D_g,\ g'(t) = < \nabla f(A + t\,U), U > = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A + tU)\,u_i.$$

Q1. Montrer que $g : t \to f(A + t\,U)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine et que :

$$\forall t \in D_g,\ g''(t) = q_{A+t\,U}(U) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A + t\,U)\,u_i\,u_j$$

Q2. En déduire, lorsque U n'est pas nul, que f admet une dérivée partielle seconde en A dans la direction de U qui vaut :

$$f''_U(A) = q_A(U) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)\,u_i\,u_j.$$

Exercice 7 **Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.**

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^2}$ sur Ω.

Q0. Rappeler les trois formules de Taylor à l'odre n pour les fonction numérique de la variable réelle.

Q1. A et $H = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que le segment $[A, A + H]$ soit contenu dans Ω.

Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $]0, 1[$ tel que :

$$f(A + H) = f(A) + < \nabla f(A), H > + \frac{1}{2}\,q_{A+\theta H}(H)$$

$$\text{ou} \quad f(A + H) = f(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\,h_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial h_j \partial x_i}(A + \theta H)\,h_i\,h_j.$$

Q2. A et B sont deux éléments distincts de $\mathbb{R}^n$ tels que le segment $[A, B]$ soit contenu dans Ω. Adapter le résultat précédent à cette nouvelle situation.

► **Contrôle. Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1.**

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^2}$ sur Ω.

A est un point de Ω et r un réel strictement positif tel que : $B(A, r) \subset \Omega$.

$$\forall H = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in B(O, r),\ f(A + H) = f(A) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\,h_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i\,h_j \int_0^1 (1 - t)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A + t\,H)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 8 **Dl 2 donne dl 1**

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. A est un point de Ω.

Montrer que si f possède un développement limité d'ordre 2 au voisinage de A alors f possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de A.

Exercice 9 **Développement limité d'ordre 2 pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

1. f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de tout point de Ω.
2. Si A est un point de Ω le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de A est :

$$\boxed{f(A+H) = f(A) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(A)\, h_i + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A)\, h_i h_j\right) + o(\|H\|^2).}$$

$$\text{ou} \quad \boxed{f(A+H) = f(A) + < \nabla f(A), H > + \frac{1}{2}\, q_A(H) + \mathrm{o}(\|H\|^2)}.$$

Exercice 10 **Pratique d'un dl 2.**

Q1. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^3 + 2xy + y^3 - z^3 + 2xz$

a) Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en tout point de $\mathbb{R}^3$.

b) Ecrire la Hessienne de f en $A = (1,1,1)$. Ecrire le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de A.

Q2. Même chose avec $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^4 - y^3 + z^2 + xy - yz + x - 3y + 2z - 4$ et $A = (0,0,0)$.

Exercice 11 **L'existence des dérivées partielles secondes n'est ni nécessaire ni suffisante pour avoir un dl 2.** **Facultatif**

Q1. On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^2 \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Montrer que f possède un dl2 au vosinage de $0 = (0,0)$ mais que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(O)$ n'existe pas.

Q2. On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Montrer que f possède des dérivées partielles d'ordre 2 en $O = (0,0)$ mais n'admet pas de développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 12 **La condition suffisante d'extremum. Facultatif.**

Q1. Soit S une une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit α (resp. β) sa plus petite (resp. plus grande) valeur propre. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à S.

a) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \alpha\,\|X\|^2 \leqslant q(X) \leqslant \beta\,\|X\|^2$ ou $\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \alpha\,\|U\|^2 \leqslant {}^tUSU \leqslant \beta\,\|U\|^2$.

b) Montrer que les valeurs propres de S sont positives ou nulles si et seulement si :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ q(X) \geqslant 0 \quad \text{ou} \quad \forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tUSU \geqslant 0.$$

c) Montrer que les valeurs propres de S sont strictement positives si et seulement si :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow q(X) > 0 \quad \text{ou} \quad \forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tUSU > 0.$$

d) Enoncer une CNS pour que les valeurs propres de S soient négatives (resp. strictement négatives).

Dans la suite Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et A est un point de Ω.

f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^2}$.

On suppose que A est un point critique de f. $\mathbf{q_A}$ est toujours la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ associée à la hessienne de f en A.

Q2. On suppose que $\forall H \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\},\ q_A(H) > 0$; ce qui revient également à dire que les valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$ sont strictement positives.

On se propose de montrer que f possède en A un minimum local stricte.

C'est à dire qu'il existe un réel strictement positif r tel que $\forall X \in B(A,r) - \{A\}, f(X) > f(A)$

ou $\forall H \in B(O,r) - \{O\}, f(A+H) > f(A)$.

a) Justifier l'existence d'un réel r_1 strictement positif et d'une application ε de $B(O,r_1)$ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall H \in B(O,r_1),\ f(A+H) - f(A) = \frac{1}{2}\, q_A(H) + \|H\|^2\, \varepsilon(H) \quad \text{avec} \quad \lim_{H \to O} \varepsilon(H) = 0.$$

b) On note α la plus petite valeur propre de $\nabla^2 f(A)$.

Montrer que l'on peut trouver un élément r de $\mathbb{R}^{+\,*}$ tel que : $\forall H \in B(O,r),\ \varepsilon(H) > -\dfrac{\alpha}{2}\cdot$

Conclure.

c) Et si $\forall H \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\},\ q_A(H) < 0$?

Q3. On suppose qu'il existe deux éléments H_1 et H_2 de $\mathbb{R}^n$ tels que $q_A(H_1) > 0$ et $q_A(H_2) < 0$. Montrer par l'absurde que f ne possède pas d'extremum local en A.

Q4. Concluons !

▶ **Contrôle**. Une seconde version pour Q3. On suppose qu'il existe deux éléments H_1 et H_2 de $\mathbb{R}^n$ tels que $q_A(H_1) > 0$ et $q_A(H_2) < 0$. On se propose de montrer que f ne possède pas d'extremum local en A.

Soit r' un élément quelconque de $\mathbb{R}^{+\,*}$. On veut alors montrer qu'il existe deux éléments H'_1 et H'_2 de $B(O,r')$ tels que $f(A+H'_1) > f(A)$ et $f(A+H'_2) < f(A)$.

On pose $\forall t \in [0, \frac{\mathrm{Inf}(r_1,r')}{\|H_1\|}[,\ \varphi(t) = \frac{1}{2}\, q_A(H_1) + \|H_1\|^2 \varepsilon(tH_1)$

Montrer que cette fonction a une limite strictement positive en 0 et en déduire que l'on peut trouver H'_1 dans $B(O,r')$ tel que $f(A+H'_1) > f(A)$. Conclure.

Exercice 13 **Utilisation de la condition suffisante**.

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^3 + y^2 - xy + z^2$. Etudier les extremums de f.

Exercice 14 **Utilisation de la condition suffisante encore**.

On pose $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2xyz^2$.

Q1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ et trouver l'ensemble des points critiques de f

Q2. f possède-elle un extremum local en $A = (0,0,0)$? En $B = (0,0,2)$?

▶ **Contrôle** $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + xyz + y - z$. Etudier les extremums de f.

Exercice 15 **Le cas $n = 2$.**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et A un point de cet ouvert.

On suppose que A est un point critique de f et on pose :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)$$

Q1. Montrer que :

- si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (resp. $r < 0$), f admet un minimum (resp. maximum) local strict en A ;
- si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas d'extremum local en A ;

Examiner le cas $rt - s^2 = 0$.

Q2. a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Etudier les extremums de f.

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$. Etudier les extremums de f.

Exercice 16 **Complément 1 : une condition suffisante intéressante (mais de mammouth).**

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On suppose que $\forall B \in \Omega,\ \forall H \in \mathbb{R}^n,\ q_B(H) \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$).

Montrer que si A est un point critique de f alors f possède un minimum (resp. maximum) local en A.

Et si l'ouvert Ω est convexe ?

Exercice 17 **Extremums again..**

a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = x^3 + 3xy + 2xz + z^2$. Etudier les extremums éventuels de f.

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R},\ f(x, y) = x\big((\ln x)^2 + y^2\big)$. Etudier les extremums éventuels de f.

c) $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = x^2 z + y^2 z + 2x - z$. Etudier les extremums éventuels de f.

Exercice 18 **Complément 2 : Position du graphe par rapport à l'hyperplan tangent.**

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1) Si : $\forall H \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\},\ q_A(H) > 0$, alors au voisinage de A le graphe de f est au-dessus de son hyperplan tangent en A.

2) Si : $\forall H \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\},\ q_A(H) < 0$, alors au voisinage de A le graphe de f est au-dessous de son hyperplan tangent en A.

EN PLUS

Exercice 19 Fonction convexes.

Q1. Faire un rappel sur les fonctions numériques convexes.

D est un convexe de $\mathbb{R}^n$ et f est une application de D dans $\mathbb{R}$.

On dit que **f est convexe sur D** si : $\forall \lambda \in [0,1],\ \forall (A,B) \in D^2,\ f\big(\lambda A + (1-\lambda) B\big) \leqslant \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$.

On dit que f est **concave sur D** si $-f$ est convexe sur D.

► Dans tout l'exercice, Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall (A,B) \in \Omega^2,\ \forall t \in [0,1],\ \varphi_{AB}(t) = f\big(t\,A + (1-t)\,B\big) = f\big(B + t(A-B)\big)$.

Q2. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout couple (A,B) d'éléments de Ω, φ_{AB} est convexe.

Q3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

a) A et B sont deux éléments de Ω. Montrer que φ_{AB} est dérivable sur $[0,1]$ et que pour tout élément t de $[0,1]$,

$$\varphi'_{AB}(t) = < \nabla f\big(B + t(A-B)\big), A - B > = < \nabla f\big(t\,A + (1-t)\,B\big), A - B > .$$

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est convexe sur Ω.

ii) $\forall (A,X) \in \Omega^2,\ f(X) \geqslant f(A) + < \nabla f(A), X - A >$.

iii) $\forall (X,Y) \in \Omega^2,\ < \nabla f(Y), Y - X > \geqslant < \nabla f(X), Y - X >$ ou $< \nabla f(Y) - \nabla f(X), Y - X > \geqslant 0$.

c) A est un point de Ω. On suppose que f est convexe sur Ω. Montrer que si A est un point critique de f alors f admet un minimum global en A.

Q4. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

a) A et B sont deux éléments de Ω. Calculer φ''_{AB}

b) Montrer que f est convexe (resp. concave) sur Ω si et seulement si $\forall B \in \Omega,\ \forall H \in \mathbb{R}^n,\ q_B(H) \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$).

Exercice 20 n est un élément de $[\![2, +\infty [\![$. $F = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\}$.

$$\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F,\ f(X) = \sum_{i \neq j} x_i\, x_j$$

Q1. Repréciser la fonction f. Soit $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un élément de F. Exprimer $f(X)$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Q2. Montrer que f possède un maximum M et un minimum m.

Q3. Montrer que M et m ne sont pas atteint en un point de $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$.

Q4. Montrer que $m = -1$.

Q5. Utiliser Cauchy-Schwarz pour prouver que $M = n - 1$.

Exercice 21 **Encore des extremums.**

a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$. Etudier les extremums éventuels de f.

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Etudier les extremums éventuels de f.

Exercice 22 **Encore des extremums (plus délicats)**.

a) ESCP98 $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (y-z)^2 + y^3x^2$. Etudier les extremums éventuels de f.

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-2x+4}{x^2+y^2+2x+4}\cdot$ Etudier les extremums éventuels de f.

c) ESCP 99 Etudier les extremums de f définie par : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}\cdot$

Exercice 23 **En plus 1**

Si n est un élément de $\mathbb{N}^*$, f_n est l'application de $[0,1]^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n,\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2} + \cdots + \sqrt{1-x_n^2}\right)$$

Q1. n est élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que f_n possède un minimum m_n et un maximum M_n.

Q2. Déterminer m_n.

Q3. a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\Omega =]0,1[^n$ et que f possède un point critique et un seul A sur Ω. Calculer $f(A)$

b) a et b sont deux éléments de $[0,1]$. Montrer que $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} \leqslant 1$. En déduire que $M_n = f(A)$.

Q4. n appartient à N^* et $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-1,1]^n,\ F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\Big(\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2} + \cdots + \sqrt{1-x_n^2}\Big)$. Déterminer le maximum et le minimum de F_n.

Exercice 24 **En plus 2** ECRICOME 99

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f_n(x,y) = (x^n - y)\, e^{x-y}$.

On se propose de déterminer les extremums éventuels de cette fonction dans les deux cas particuliers $n = 2$ et $n = 1$.

Q1. a) Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. 1

b) Calculer les dérivées partielles du premier ordre de f_n. 1+1

Q2. Ici $n = 2$.

a) Montrer qu'il n'existe qu'un seul point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les conditions nécessaires d'existence d'un extremum. 1+2 (1 pour ouvert)

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f_2 et montrer que le point (x_0, y_0) est bien un extremum (? !) dont on précisera la nature. 3+3

Q3. Ici $n = 1$.

a) Montrer qu'il existe une infinité de points en lesquels le gradient de f_1 s'annule. 1

b) Montrer qu'en ces points la fonction f_1 admet un minimum. 1+1+2

Exercice 25 Dans la suite $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique et de sa structure euclidienne canonique.

On pose $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (1 + 4xy + 2yz + 2xz + 3z^2)\ e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

Q1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : ${}^tPP = I_3$ et ${}^tPAP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Q2. Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ telle que si (x', y', z') sont les coordonnées de (x, y, z) dans cette base, alors :

$$f(x, y, z) = (1 - 2x'^2 + y'^2 + 4z'^2)\ e^{-(x'^2+y'^2+z'^2)}$$

Montrer que si $r = \|(x, y, z)\|$ alors : $(1 - 2r^2)e^{-r^2} \leqslant f(x, y, z) \leqslant (1 + 4r^2)e^{-r^2}$. Préciser dans quelles cas l'une des inégalités est une égalité.

Q3. Déduire de ce qui précède que f possède un maximum et un minimum et préciser les points où ils sont atteints.

Exercice 26 Dans cet exercice on identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. A est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictements positives. B est un élément de $\mathbb{R}^n$. Pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$ on pose :

$$f(X) = \frac{1}{2}\ {}^tXAX - {}^tBX = \frac{1}{2}\ < AX, X > - < B, X >$$

et on se propose d'étudier les extremums de f.

Q1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Q2. X_1 est un élément de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\forall H \in \mathbb{R}^n,\ f(X_1 + H) = f(X_1) + < AX_1 - B, H > + \frac{1}{2} < AH, H >$.

b) Montrer que ${}^tHAH = \mathrm{o}(\|H\|)$ au voisinage de 0.

c) Déduire de ce qui précède le développement limité d'ordre 1 de f au voisinage de X_1 et l'égalité $\nabla f(X_1) = AX_1 - B$.

d) **Facultatif** Retrouver cette égalité à la main.

Q3. a) Montrer que si H est un élément non nul de $\mathbb{R}^n$: ${}^tHAH > 0$.

b) Montrer que f possède un unique point critique X_0 et qu'en ce point f possède un minimum absolu.
