TD-COURS 12 - FNPV L'OPUS 6

EXTREMUM SOUS CONTRAINTE D'ÉGALITÉS LINÉAIRES

- Détermination d'extremums sous contraintes d'égalités linéaires.

Exercice 1 **Un premier exemple**.

U, V et W sont trois variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, ayant même loi, d'espérance m et de variance σ^2. On suppose que m et σ ne sont pas nuls.

Trouver x, y et z dans $\mathbb{R}$ pour que $T = xU + yV + zW$ ait pour espérance m et une variance minimum.

Exercice 2 **Un deuxième exemple concret... hors programme**.

Trouver les dimensions d'un parallélépipède rectangle de surface S fixée et de volume maximum (on rappelle que $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leqslant \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$).

Exercice 3 **Le résultat du programme. Une condition nécessaire**

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

p est un élément de $\mathbb{N}^*$, g_1, g_2, ..., g_p sont p formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ et b_1, b_2, ..., b_p sont p réels.

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des éléments $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\begin{cases} g_1(X) = b_1 \\ g_2(X) = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_p(X) = b_p \end{cases}$.

On pose : $\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g_1(X) = g_2(X) = \cdots = g_p(X) = 0\} = \operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} g_2 \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} g_p$. Montrer que :

1. $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. Si $\mathcal{C}$ n'est pas vide alors $\mathcal{C}$ est un sous-espace affine de direction $\mathcal{H}$.

3. Si f possède un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}$ en point A de $\Omega \cap \mathcal{C}$ alors le gradient $\nabla f(A)$ de f en A est orthogonal à $\mathcal{H}$.

Un point A de $\Omega \cap \mathcal{C}$ tel que $\nabla f(A)$ soit orthogonal à $\mathcal{H}$ est appelé **point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.**

4. L'orthogonal de $\mathcal{H}$ est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\big(\nabla g_1(X), \nabla g_2(X), \ldots, \nabla g_p(X)\big)$ où X est un élément quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4 **Pratiquement 1** $\boxed{\text{C}}$

Traiter le problème $\quad \text{Extr.}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right]$

$$\text{S.c.} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k = 1 \right.$$

Exercice 5 **Pratiquement 2** $\boxed{\text{C}}$

$$\text{Extr.}\,[x^2 + y^2 + z^2 + t^2]$$

$$\text{S.c.} \left| \begin{array}{l} x + y = 2 \\ z + t = 0 \end{array} \right.$$

Contrôle : $\boxed{\text{C}}$ Extr. $[x^2 - 2xy + yz + y - z]$ $(4/5, 3/5, 1/5)$ max

$$\text{S.c.} \left| \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + z = 1 \end{array} \right.$$

Exercice 6 **Une condition suffisante molle**

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

p est un élément de $\mathbb{N}^*$, g_1, g_2, ..., g_p sont p formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ et b_1, b_2, ..., b_p sont p réels.

$\mathcal{C}$ est l'ensemble des éléments $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $\begin{cases} g_1(X) = b_1 \\ g_2(X) = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_p(X) = b_p \end{cases}$.

On pose : $\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g_1(X) = g_2(X) = \cdots = g_p(X) = 0\} = \operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} g_2 \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} g_p$.

On suppose que A est un point de $\mathcal{C} \cap \Omega$ tel que $\nabla f(A)$ soit orthogonal à $\mathcal{H}$, c'est à dire que A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte $\mathcal{C}$.

On suppose encore que $\forall B \in \mathcal{C} \cap \Omega,\ \forall H \in \mathcal{H},\ q_B(H) \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$).

Montrer f possède en A un minimum (resp. maximum) local sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Exercice 7 **Pratiquement 3** $\boxed{\text{C}}$

p est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ une famille de réels strictement positifs. β est un réel strictement positif.

Etudier le problème $\quad \text{Extr.} \left[\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k^2}{x_k} \right]$

$$\text{S.c.} \left| \sum_{k=1}^{p} x_k = \beta \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_k > 0 \right.$$

(on pourra utiliser dans une deuxième phase Cauchy-Schwarz ; $\sum_{k=1}^{p} \sqrt{x_k}\, \frac{\alpha_k}{\sqrt{x_k}}$)

Exercice 8 **Pratiquement 4** $\boxed{\text{C}}$

Etudier le problème $\quad \text{Extr.} [\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k)^4]$

$$\text{S.c.} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k = n \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k > 0 \right.$$

Exercice 9 **Pratiquement 5**

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $2x - y + z = 3$. R. (12/11,-6/11,3/11) mini

---

Exercice 10 **Pratiquement 6**

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = x\,y + y\,z + z\,x$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x + y + z = 1$. R. (1/3,1/3,1/3) max

---

Exercice 11 **Pratiquement 7** $\boxed{\text{C}}$

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x + y + z = 0$. R. (0,0,0) mini

EN PLUS

Exercice 12 **Pratiquement 8** C

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = \dfrac{1}{1+2x^2+y^2+z^2}$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x - y + z = 5$. R. (1,-2,2) max

Exercice 13 **Pratiquement 9**

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^2 - 2xy + yz + y - z$.

Etudier les extremums de f sous les contraintes $2x - y = 1$ et $x + z = 1$. R. $(4/5, 3/5, 1/5)$ max

Exercice 14 **Pratiquement 10** C

$\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}^{+*})^3,\ f(x,y,z) = x\ln x + y \ln y + z \ln z$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x + y + z = 3a$ ($a \in \mathbb{R}^{+*}$). R. (a,a,a) mini

Exercice 15 **Pratiquement 11** C

Extr. $[x^2 + y^2 + z^2 + t^2]$
S.c. $|\ x + y + z - t = 3$
$|\ 2x - y + z + t = -6$

Exercice 16 **Pour finir... le travail de Sylvain !** EDHEC 2001

On désigne par n et r deux entiers naturels vérifiant $n \geqslant 2$ et $r \geqslant 3$.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents R_1, R_2, ..., R_r de probabilités respectives x_1, x_2, ..., x_r. On supppose que, pour tout i de $[\![1, r]\!]$, $0 < x_i < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.

Pour tout i de $[\![1, r]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

Q1 a. Exprimer la variable X en fonction de X_1, X_2, ..., X_r.

b. Donner la loi de X_i pour tout i de $\{1, 2, ..., r\}$.

c. En déduire que l'espérance de X est $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n$.

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels x_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum.

En clair on cherche un minimum pour $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} (1 - x_i)^n$ sous les contraintes $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, ..., $x_r > 0$ et $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = 1$.

Q2 a. Écrire $E(X)$ comme une fonction, que l'on notera h, des $(r-1)$ variables x_1, ..., x_{r-1}.

La fonction h est alors définie sur un ouvert Ω' que l'on précisera.

Mettre en place tous les acteurs d'une optimisation sous contrainte.

b. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω'.

Q3 a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de h.

b. Montrer que le seul point de $\mathbb{R}^{r-1}$ en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de h s'annulent simultanément est le point $B = \left(\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}, \cdots, \dfrac{1}{r}\right)$.

c. Conclure cette première phase.

d. Complément (uniquement pour faire voir à Sylvain comment on fait) : montrer que h possède un minimum locale en B.

Q4 a. Montrer que $\varphi : t \to t^n$ est convexe sur $]0,1[$.

Alors si z_1, z_2, ..., z_r sont r éléments de $]0,1[$ et α_1, α_2, ..., α_r sont réels positifs tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = 1$ on a :

$\varphi\left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k\, z_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{r} \alpha_k\, \varphi(z_k).$

b. Montrer alors $E(X)$ est minimum si et seulement si $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = \dfrac{1}{r}\cdot$

Exercice 17 **C** Dans toute la suite n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

Q0. α_1, α_2, ..., α_n sont n réels. On suppose que l'un au moins de ces réels est strictement positif et que l'un au moins est strictement négatif.

Montrer que la fonction numérique de la variable réelle $h : t \to \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e^{-\alpha_k\, t}$ admet un zéro et un seul dans $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que $\Omega = \left(\mathbb{R}^{+\,*}\right)^n$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$.

Q2. On pose $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega,\ f(X) = -\sum_{k=1}^{n} (x_k\, \ln x_k)$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

b) Soit $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un point de Ω. Étudier le signe de la forme quadratique q_A associée à la hessienne de f en A.

Q3. u_1, u_2, ..., u_n sont n réels tels que $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$. v est un réel.

a) Montrer que f possède un point critique sous la contrainte $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\, x_i = v$ si et seulement si $v \in]u_1, u_n[$ et qu'en cas d'existence ce point critique est unique.

b) En supposant que $v \in]u_1, u_n[$, montrer que ce point critique correspond à un maximum.

Exercice 18 a, b et c sont trois réels tels que $0 < a \leqslant b \leqslant c$. $\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(X) = a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2$.

Trouver le maximum et le minimum de f sur $D = \{(x, y, z) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^3 \mid x + y + z = 1\}$.

Exercice 19 Etudier Extr. $[x - y + z^2]$
S.c. $\mid x - e^y - z = 0$

Exercice 20 **D'après Ecricome 2008** **C**

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[^3$ par :

$$\forall(x_1,x_2,x_3)\in]0,+\infty[^3,\quad f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{4x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{9x_3}\cdot$$

Q1 Justifier que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Q2 On note : $\nabla^2 f(A)=\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(A)\right]_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ la matrice hessienne de f en $A=(a_1,a_2,a_3)$.

Justifier que, pour tout $A\in]0,+\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :

$${}^tH\nabla^2 f(A)H>0$$

Q3 f admet-elle des extremums sur $]0,+\infty[^3$?

Q4 On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1+x_2+x_3=110$.

a) Mettre en place tous les éléments pour traiter ce problème.

b) Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte : $A=(30,60,20)$

c) Rappeler le théorème du programme concernant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.

d) Montrer que f admet en A minimum global sous la contrainte proposée.