

TD-COURS 13 - FNPV L'OPUS 6

EXTREMUM SOUS CONTRAINTE D'ÉGALITÉS LINÉAIRES

- Détermination d'extremums sous contraintes d'égalités linéaires.

Exercice 1 Un premier exemple.

U, V et W sont trois variables aléatoires sur (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes, ayant même loi, d'espérance m et de variance σ^2 . On suppose que m et σ ne sont pas nuls.

Trouver x, y et z dans \mathbb{R} pour que $T = xU + yV + zW$ ait pour espérance m et une variance minimum.

Exercice 2 Un deuxième exemple concret... hors programme.

Trouver les dimensions d'un parallélépipède rectangle de surface S fixée et de volume maximum (on rappelle que $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \leq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$).

Exercice 3 Le résultat du programme. Une condition nécessaire

Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n et f une application de Ω dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

p est un élément de \mathbb{N}^* , g_1, g_2, \dots, g_p sont p formes linéaires sur \mathbb{R}^n et b_1, b_2, \dots, b_p sont p réels.

\mathcal{C} est l'ensemble des éléments $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n tels que
$$\begin{cases} g_1(X) = b_1 \\ g_2(X) = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ g_p(X) = b_p \end{cases} .$$

On pose : $\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g_1(X) = g_2(X) = \dots = g_p(X) = 0\} = \text{Ker } g_1 \cap \text{Ker } g_2 \cap \dots \cap \text{Ker } g_p$. Montrer que :

1. \mathcal{H} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
2. Si \mathcal{C} n'est pas vide alors \mathcal{C} est un sous-espace affine de direction \mathcal{H} .
3. Si f possède un extremum local sous la contrainte \mathcal{C} en point A de $\Omega \cap \mathcal{C}$ alors le gradient $\nabla f(A)$ de f en A est orthogonal à \mathcal{H} .

Un point A de $\Omega \cap \mathcal{C}$ tel que $\nabla f(A)$ soit orthogonal à \mathcal{H} est appelé **point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte \mathcal{C}** .

4. L'orthogonal de \mathcal{H} est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(\nabla g_1(X), \nabla g_2(X), \dots, \nabla g_p(X))$ où X est un élément quelconque de \mathbb{R}^n .

Exercice 4 Pratiquement 1

Traiter le problème
$$\begin{array}{l} \text{Extr.} \left[\sum_{k=1}^n x_k^2 \right] \\ \text{S.c.} \left| \sum_{k=1}^n x_k = 1 \right. \end{array}$$

Exercice 5 Pratiquement 2

Extr. $[x^2 + y^2 + z^2 + t^2]$
 S.c. $\begin{cases} x + y = 2 \\ z + t = 0 \end{cases}$

Contrôle : Extr. $[x^2 - 2xy + yz + y - z]$ (4/5, 3/5, 1/5) max
 S.c. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

Exercice 6 Une condition suffisante molle

Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n et f une application de Ω dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^2 sur Ω .

p est un élément de \mathbb{N}^* , g_1, g_2, \dots, g_p sont p formes linéaires sur \mathbb{R}^n et b_1, b_2, \dots, b_p sont p réels.

\mathcal{C} est l'ensemble des éléments $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n tels que $\begin{cases} g_1(X) = b_1 \\ g_2(X) = b_2 \\ \dots \\ g_p(X) = b_p \end{cases}$.

On pose : $\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid g_1(X) = g_2(X) = \dots = g_p(X) = 0\} = \text{Ker } g_1 \cap \text{Ker } g_2 \cap \dots \cap \text{Ker } g_p$.

On suppose que A est un point de $\mathcal{C} \cap \Omega$ tel que $\nabla f(A)$ soit orthogonal à \mathcal{H} , c'est à dire que A est un point critique de f dans l'optimisation sous la contrainte \mathcal{C} .

On suppose encore que $\forall B \in \mathcal{C} \cap \Omega, \forall H \in \mathcal{H}, q_B(H) \geq 0$ (resp. ≤ 0).

Montrer f possède en A un minimum (resp. maximum) local sous la contrainte \mathcal{C} .

Exercice 7 Pratiquement 3

p est un élément de \mathbb{N}^* et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ une famille de réels strictement positifs. β est un réel strictement positif.

Etudier le problème Extr. $[\sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k^2}{x_k}]$

S.c. $\begin{cases} \sum_{k=1}^p x_k = \beta \\ \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_k > 0 \end{cases}$

(on pourra utiliser dans une deuxième phase Cauchy-Schwarz ; $\sum_{k=1}^p \sqrt{x_k} \frac{\alpha_k}{\sqrt{x_k}}$)

Exercice 8 Pratiquement 4

Etudier le problème Extr. $[\sum_{k=1}^n (x_k)^4]$

S.c. $\begin{cases} \sum_{k=1}^n x_k = n \\ \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k > 0 \end{cases}$

Exercice 9 Pratiquement 5

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $2x - y + z = 3$. R. (12/11, -6/11, 3/11) mini

Exercice 10 Pratiquement 6

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = xy + yz + zx$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x + y + z = 1$. R. (1/3, 1/3, 1/3) max

Exercice 11 Pratiquement 7

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z$.

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x + y + z = 0$. R. (0, 0, 0) mini

EN PLUS

Exercice 12 Pratiquement 8

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \frac{1}{1 + 2x^2 + y^2 + z^2}.$$

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x - y + z = 5$. R. (1,-2,2) max

Exercice 13 Pratiquement 9

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x^2 - 2xy + yz + y - z.$$

Etudier les extremums de f sous les contraintes $2x - y = 1$ et $x + z = 1$. R. (4/5, 3/5, 1/5) max

Exercice 14 Pratiquement 10

$$\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3, f(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z.$$

Etudier les extremums de f sous la contrainte $x + y + z = 3a$ ($a \in \mathbb{R}^+^*$). R. (a,a,a) mini

Exercice 15 Pratiquement 11

$$\text{Extr. } [x^2 + y^2 + z^2 + t^2]$$

$$\text{S.c. } | x + y + z - t = 3$$

$$| 2x - y + z + t = -6$$

Exercice 16 Pour finir... le travail de Sylvain! EDHEC 2001

On désigne par n et r deux entiers naturels vérifiant $n \geq 2$ et $r \geq 3$.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à r résultats différents R_1, R_2, \dots, R_r de probabilités respectives x_1, x_2, \dots, x_r . On suppose que, pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, $0 < x_i < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.

Pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

Q1 a. Exprimer la variable X en fonction de X_1, X_2, \dots, X_r .

b. Donner la loi de X_i pour tout i de $\{1, 2, \dots, r\}$.

c. En déduire que l'espérance de X est $E(X) = \sum_{i=1}^r (1 - x_i)^n$.

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels x_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum.

En clair on cherche un minimum pour $E(X) = \sum_{i=1}^r (1 - x_i)^n$ sous les contraintes $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_r > 0$ et $x_1 + x_2 + \dots + x_r = 1$.

Q2 a. Écrire $E(X)$ comme une fonction, que l'on notera h , des $(r - 1)$ variables x_1, \dots, x_{r-1} .

La fonction h est alors définie sur un ouvert Ω' que l'on précisera.

Mettre en place tous les acteurs d'une optimisation sous contrainte.

b. Montrer que h est de classe \mathcal{C}^2 sur Ω' .

Q3 a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de h .

b. Montrer que le seul point de \mathbb{R}^{r-1} en lequel les dérivées partielles d'ordre 1 de h s'annulent simultanément est le point $B = \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \dots, \frac{1}{r}\right)$.

c. Conclure cette première phase.

d. Complément (uniquement pour faire voir à Sylvain comment on fait) : montrer que h possède un minimum locale en B .

Q4 a. Montrer que $\varphi : t \rightarrow t^n$ est convexe sur $]0, 1[$.

Alors si z_1, z_2, \dots, z_r sont r éléments de $]0, 1[$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sont réels positifs tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = 1$ on a :

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^r \alpha_k z_k\right) \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k \varphi(z_k).$$

b. Montrer alors $E(X)$ est minimum si et seulement si $x_1 = x_2 = \dots = x_r = \frac{1}{r}$.

Exercice 17 Dans toute la suite n est un élément de $[2, +\infty[$.

Q0. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont n réels. On suppose que l'un au moins de ces réels est strictement positif et que l'un au moins est strictement négatif.

Montrer que la fonction numérique de la variable réelle $h : t \rightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-\alpha_k t}$ admet un zéro et un seul dans \mathbb{R} .

Q1. Montrer que $\Omega = (\mathbb{R}^+)^n$ est un ouvert convexe de \mathbb{R}^n .

Q2. On pose $\forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $f(X) = -\sum_{k=1}^n (x_k \ln x_k)$.

a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur Ω .

b) Soit $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un point de Ω . Étudier le signe de la forme quadratique q_A associée à la hessienne de f en A .

Q3. u_1, u_2, \dots, u_n sont n réels tels que $u_1 < u_2 < \dots < u_n$. v est un réel.

a) Montrer que f possède un point critique sous la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ et $\sum_{i=1}^n u_i x_i = v$ si et seulement si $v \in]u_1, u_n[$ et qu'en cas d'existence ce point critique est unique.

b) En supposant que $v \in]u_1, u_n[$, montrer que ce point critique correspond à un maximum.

Exercice 18 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[^3$ par :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in]0, +\infty[^3, \quad f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{9x_3}.$$

Q1 Justifier que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[^3$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Q2 On note : $\nabla^2 f(A) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A) \right]_{1 \leq i, j \leq 3}$ la matrice hessienne de f en $A = (a_1, a_2, a_3)$.

Justifier que, pour tout $A \in]0, +\infty[^3$, pour toute matrice colonne H à trois lignes, non nulle, on a :

$${}^t H \nabla^2 f(A) H > 0$$

Q3 f admet-elle des extremums sur $]0, +\infty[^3$?

Q4 On cherche désormais les extremums de f sous la contrainte $x_1 + x_2 + x_3 = 110$.

- a) Mettre en place tous les éléments pour traiter ce problème.
- b) Montrer que f admet un unique point critique sous cette contrainte : $A = (30, 60, 20)$
- c) Rappeler le théorème du programme concernant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1.
- d) Montrer que f admet en A minimum global sous la contrainte proposée.

Exercice 19 a, b et c sont trois réels tels que $0 < a \leq b \leq c$. $\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(X) = ax^2 + by^2 + cz^2$.

Trouver le maximum et le minimum de f sur $D = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \mid x + y + z = 1\}$.

Exercice 20 Etudier Extr. $[x - y + z^2]$
S.c. $|x - e^y - z = 0$
