TD 10 A ALGÈBRE BILINÉAIRE

28-11-2011

EXERCICE 1

Ecricome 2007 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels. Pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle « trace de A » , et on note $\text{tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

On admet que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

On note ${}^{t}A$ la transposée de la matrice A.

On passe Q1.

1) Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(AB) = \text{tr}({}^{t}AB) \quad (\text{où } {}^{t}AB = {}^{t}A \times B)$$

Exprimer $\varphi(A, B)$ en fonction des coefficients de A et B et montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note N la norme associée à ce produit scalaire.

2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette question est de prouver que :

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B)$$

a) Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$${}^{t}P({}^{t}AA)P = D$$

où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.

On notera par la suite λ_i le coefficient $d_{i,i}$ de la matrice $D = (d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

b) Soit λ une valeur propre de ${}^{t}AA$ et X un vecteur propre associé.

En calculant ${}^{t}X\,{}^{t}AAX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geqslant 0$.

c) On pose $S = {}^{t}P(B\,{}^{t}B)P = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que

$$[N(A)]^2 = \text{tr}(D), \quad [N(B)]^2 = \text{tr}(S), \quad [N(AB)]^2 = \text{tr}(SD)$$

d) Montrer que : $\quad \text{tr}(SD) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i}$.

e) On note E_i le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne, à coefficients réels. Montrer que :

$${}^{t}E_i S E_i = \|\,{}^{t}BPE_i\|^2$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer ${}^{t}E_i S E_i$ en fonction des coefficients de S.

Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n, sur le signe de $s_{i,i}$?

f) Montrer que : $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} s_{i,i}\Big)$

puis conclure que : $\quad N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

Exercice 2 **LYON 2000 PB 1**

• n désigne un entier supérieur ou égal à 3

• $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I_n désigne la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$.

• $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $<.,.>$ défini par :

si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, alors $< x, y >= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

En notant les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et en confondant les matrices d'ordre 1 et les scalaires, on a alors $< x, y >= {}^tXY$. La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|.\|$.

• $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que la matrice de passage P d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ vérifie ${}^tP = P^{-1}$.

Les parties I et II sont indépendantes.

PARTIE I

Q1 On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

a) Justifier que S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $M_3(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$.

Q2 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Vérifier que $(M - 2I_3)^3 = I_3$.

b) M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

c) Calculer le produit ${}^tMM$.

PARTIE II

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice ${}^tA$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Q1 Montrer, pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^n$:

$$< g(y), x >=< y, f(x) > \quad \text{puis} \quad < (g \circ f)(x), x >= \|f(x)\|^2.$$

Q2 Montrer que l'endomorphisme $g \circ f$ est symétrique.

Q3 Montrer que $g \circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Q4 Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots\ e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $g \circ f$.

On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Q5 Montrer l'existence de n réels positifs ou nuls $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ (non nécessairement distincts) tels que la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tAA = Q\Delta^{2t}Q$.

Q6 Montrer que la famille $\big(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n)\big)$ est une famille orthogonale et que pour tout entier j de $[\![1, n]\!]$, $\|f(e'_j)\| = \mu_j$.

Q7 Dans cette question, on suppose que A est inversible.

a) Vérifier que les nombres réels $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sont tous non nuls.

b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = \big(\frac{1}{\mu_1} f(e'_1), \frac{1}{\mu_2} f(e'_2), \dots, \frac{1}{\mu_n} f(e'_n)\big)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

c) Soit R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Montrer que $A = R\Delta^tQ$.

PARTIE III

Déterminer deux matrices orthogonales Q et R d'ordre 3 et une matrice diagonale Δ d'ordre 3 telles que $M = R\Delta^tQ$ où M est la matrice définie dans I.2.

Exercice 3 **ESCP 2000 13** **Endomorphisme associé à la matrice d'un produit scalaire. Etude de** $\mathbf{x} \to \sum\limits_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} < \mathbf{x}, \mathbf{e_k} > \mathbf{e_k}$.

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et E est un espace vectoriel euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $< ., . >$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base **quelconque** de E. On pose : $\forall x \in E,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$.

Q1 a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Montrer que f est un automorphisme de E.

c) Que dire de f lorsque $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E. Enoncer et démontrer une réciproque.

Q2 a) Montrer que f est symétrique.

b) Prouver que les valeurs propres de f sont strictement positives.

Q3 a) Soit i un élément de $[\![1, n]\!]$.

Montrer qu'il existe un unique élément e'_i de E orthogonal aux vecteurs e_1, e_2, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n et tel que $< e'_i, e_i >= 1$.

b) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base de E et préciser la matrice de f relativement aux base $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

Q4 Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique s de E, à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ f)^{-1}$. Vérifier que $\big(s(e_1), s(e_2), \dots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 4 n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, \mathrm{d}t.$$

Q1. Justifier la définition de φ et montrer que c'est un produit scalaire sur E.

Q2. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \exists !\, T_k \in E,\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$.

Q3. Montrer que $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4. Montrer que T_n admet n zéros dans $]-1,1[$. Nous noterons x_0, x_1, ...,x_{n-1} ces zéros ($1 > x_0 > x_1 > \cdots > x_{n-1} > -1$).

Q5. Montrer que si P est un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(x_k).$$

Montrer que ceci vaut encore pour P élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (on pourra di

---

Exercice 5 **ESCP 2004 2.9** **EVE. Produit tensoriel.**

On considère $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. On désigne par $\|.\|$ la norme associée. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $u \otimes v$ l'endomorphisme défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (u \otimes v)(x) = \langle x, v\rangle\, u.$$

Q1. a) Soient u, v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$; quelle est l'image de l'endomorphisme $u \otimes v$? Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de $u \otimes v$. Quand est-il diagonalisable ?

b) u_1, v_1, u_2 et v_2 sont des éléments de $\mathbb{R}^n$. Prouver que $(u_1 \otimes v_1) \circ (u_2 \otimes v_2) = \langle u_2, v_1\rangle (u_1 \otimes v_2)$.

c) Soit λ un réel qui n'est pas une valeur propre de $u \otimes v$; montrer que l'inverse de l'endomorphisme $\lambda Id - u \otimes v$ est donné par

$$(\lambda Id - u \otimes v)^{-1} = \frac{1}{\lambda} Id + \frac{1}{\lambda\,(\lambda - \langle u, v\rangle)}\, u \otimes v$$

d) On note ${}^t f$ l'adjoint de l'endomorphisme f, il est determiné par l'égalité

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, {}^t f\,(y)\rangle$$

valable pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n$.

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^n$. Quel est l'adjoint de l'endomorphisme $u \otimes v$?

e) Soient $u_{1,}v_1, u_2, v_2$ quatre vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$; sous quelles conditions a-t-on $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$?

Q2. Soient g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et u, v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Montrer que g commute avec $u \otimes v$ si et seulement si il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha u$ et ${}^t g(v) = \alpha v$.

Exercice 6 **Développement en série de Fourier**. ESCP 98

E est l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $2\pi-$périodique. Pour tout couple (f, g) d'éléments de E on pose :

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pourrait sans doute se rappeler que : $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big]$.

Q1 Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Q2 Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E. On notera $\|.\|$ la norme associée.

Q3 Pour tout n élément de $\mathbb{N}$ on considère $c_n : x \to \cos(nx)$.

a) Montrer que si n est dans $\mathbb{N}$, c_n appartient à E.

b) p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$. Calculer $< c_p, c_q >$ (TROIS cas).

c) Montrer que $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ est une famille libre de E pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Q4 λ est un réel tel que $0 < |\lambda| < 1$ et $f : x \to \dfrac{1}{\lambda^2 - 2\lambda \cos x + 1}$.

Montrer que f appartient à E (ne pas oublier de montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$).

Q5 On pose pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n = < c_n, f >$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+\lambda^2)a_{n+1} - \lambda(a_{n+2} + a_n) = 0$.

b) Montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (on se contentera d'utiliser le fait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$).

c) Déduire des deux résultats précédents l'existence d'un réel α tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha\lambda^n$.

d) Calculer $(1+\lambda^2)a_0 - 2\lambda a_1$, et en déduire la valeur de α.

Q6 On pose pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{< c_k, f >}{\|c_k\|^2}\ c_k$.

Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $S_n(x)$ est convergente et calculer sa limite (on calculera $S_n(x)$ en remarquant que $\cos(kx)$ est la partie réelle de $(e^{ix})^k$ et on passera à la limite).

Exercice 7 **ESCP 2001 9 Pseudo inverse**.

Soit $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose : $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k y_k$.

Si $x \in \mathbb{R}^p$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne de x. Enfin, si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, on note $E^\perp$ l'orthogonal de E.

Q1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\operatorname{Im}(A) \subset [\operatorname{Ker}({}^tA)]^\perp$ et que $[\operatorname{Im}(A)]^\perp \subset \operatorname{Ker}({}^tA)$. b) Montrer que $\operatorname{Im}(A) = [\operatorname{Ker}({}^tA)]^\perp$.

Q2 On considère une matrice A quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Montrer que tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ se décompose de manière unique sous la forme : $x = x' + Ax''$, avec $x' \in \operatorname{Ker}({}^tA)$ et $x'' \in \operatorname{Im}({}^tA)$.

On pose alors $x'' = u(x)$. Vérifier que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$.

Q3. On note B la matrice associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Montrer que AB est la matrice de la projection orthogonale sur l'image de A. Que dire de BA.
