TD 11 ALGÈBRE BILINÉAIRE

05-12-2011

A Exercices 1, 2 et 3. **B** Exercices 3, 4, 5.

EXERCICE 1

Ecricome 2008 Soit $\vec{u}$ un vecteur **unitaire** de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a, b, c) dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$. On a donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
On note p le projecteur orthogonal sur la droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et q le projecteur orthogonal sur $\mathcal{D}^{\perp}$.
Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Que vaut $p + q$?

2) Exprimer, pour $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $p(\vec{v})$ à l'aide de $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ et de $\vec{u}$.
Calculer alors $p(\vec{\imath}), p(\vec{\jmath})$ et $p(\vec{k})$.
En déduire les matrices P et Q de p et q dans la base $\mathcal{B}$.

3) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer que : $M^2 = -Q$.

b) Calculer $f(\vec{u})$.
En déduire que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2$.
Déterminer l'image et le noyau de f et les exprimer en fonction de $\mathcal{D}$.

c) Déduire de la question précédente la valeur de $f \circ p$.
Montrer alors que $X + X^3$ est un polynôme annulateur de f.

d) Quelles sont les valeurs propres de f ?
f est-il diagonalisable ?

4) Pour tout réel θ, on définit l'endomorphisme g_θ par :

$$g_\theta = Id + (\sin\theta) f + (1 - \cos\theta) f^2$$

où $f^2 = f \circ f$.

a) Pour θ et θ' réels, calculer $g_\theta \circ g_{\theta'}$, et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$ avec θ'' réel.

b) En déduire que, pour tout réel θ, g_θ est inversible et déterminer son inverse.

EXERCICE 2

$\boxed{\textbf{Ecricome 2006}}$ On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on a donc :

$$\langle x, y \rangle = {}^{\mathrm{t}}XY$$

où X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$.
Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F^\perp$ désigne le supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}^3$
On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice M dans la base canonique, on note $f^\star$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^{\mathrm{t}}M$.

Partie I : Quelques propriétés de $f^\star$.

Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^\star(y) \rangle$$

2) Montrer que $f^\star$ est le seul endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, g(y) \rangle$$

3) Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$).

a) Pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$, calculer $\langle x, f^\star(y) \rangle$.

b) En déduire que $F^\perp$ est stable par $f^\star$.

Partie II : Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes f_u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $f_u^\star$ appartient à $\mathcal{E}$.

3) On note $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$, $\quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, $\quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i+j-2k)$ et $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur e_1.

a) Montrer que e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathcal{E}$.

b) En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ est stable par f_u.

c) Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_u.

d) Déterminer une équation de $\mathcal{D}^\perp$.

e) Montrer que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$ et que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

f) Justifier alors que la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme

$$N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$$

où e, f, g, h, ℓ sont des réels.

Exercice 3 **LYON 1997** On note E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Q1 **On passe...** Montrer que l'application $\Phi :\ E \times E \longrightarrow \mathbb{R}\ (f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ et de degré inférieur ou égal à $n-1$, et, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, e_i l'application de $[0,1]$ vers $\mathbb{R} : t \mapsto t^{i-1}$.

On rappelle que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E_n.

Q2 Calculer, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $\Phi(e_i,e_j)$.

On considère la matrice carrée réelle d'ordre $n : H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$.

Q3 **Etude du cas** $n=2$

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2.

b) La matrice H_2 est-elle diagonalisable ?

c) Montrer que la matrice H_2 est inversible et calculer son inverse.

Dans toute la suite du problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Q4 Etablir que la matrice H_n est diagonalisable.

Q5 a) Soient $P \in E_n$, $Q \in E_n$.

On note $a_1,\ldots,a_n$ les réels tels que $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $b_1,\ldots,b_n$, les réels tels que $Q = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i e_i$, A et B les matrices-colonnes définies par : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Montrer : $\Phi(P,Q) = {}^t A H_n B$ où ${}^t A$ désigne la transposée de A.

b) En déduire que les valeurs propres de la matrice H_n sont toutes strictement positives (*JF* Ok on utilise ce qui précède mais on est prié de faire très propre et surtout dans le bon sens).

c) La matrice H_n est-elle inversible ?

Q6 Soit $f \in E$. On note, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\beta_i = \Phi(e_i,f)$.

On considère les matrices-colonnes B et A_0 définies par $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $A_0 = H_n^{-1} B$.

On note $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ les réels tels que $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, et P_0 le polynôme défini par : $P_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

On considère l'application $d: E_n \longrightarrow \mathbb{R}\ P \longmapsto \|P - f\|$

a) Montrer : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \Phi(e_i, P_0 - f) = 0$.

b) En déduire : $\forall Q \in E_n,\ \Phi(Q, P_0 - f) = 0$.

c) Etablir : $\forall P \in E_n,\ \|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2$.

d) Démontrer que d admet un minimum et que ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.

e) Montrer : $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.

f) **Un exemple :** On choisit ici $n = 2$ et $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\ t \longmapsto \left|t - \dfrac{1}{3}\right|$. Calculer P_0 et $d(P_0)$.

Exercice 4 Ceci est la partie I d'ESSEC 2004 (Pour mémoire II Q2 était infaisable et III Q2 grossièrement faux.)

J'ajoute quelques éléments perso dans le texte en que je signale par *AJF*. Il aurait en fait été nécessaire de réécrire le texte qui est très mauvais (mais alors il fallait aussi réécrire la correction...)

Dans ce problème, on désigne par n un nombre entier naturel non nul et on convient d'identifier tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$ à la matrice-colonne de ses composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

AJF **En fait on peut ne pas faire l'identification proposée et travailler en totalité dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.**

AJF Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pourra noter f_M l'endomorphisme canoniquement associé à M c'est à dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui a pour matrice M dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^n$.

La transposée d'une telle matrice X est la matrice-ligne ${}^tX = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_n)$.

Le produit scalaire canonique d'un vecteur X et d'un vecteur Y de $\mathbb{R}^n$ est alors égal à : $< X, Y >= {}^tXY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

La norme euclidienne de X est définie par $\|X\| = \sqrt{< X, X >}$.

On dira qu'une suite de vecteurs (X_p) de $\mathbb{R}^n$ converge vers un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ si la suite $\|X_p - X\|$ converge vers 0.

Pour finir, on désigne par
- I la matrice-identité d'ordre n
- A une matrice symétrique réelle d'ordre n.

Partie I : Etude d'une suite de vecteurs

Q1 Dans cette question, on note C un vecteur non nul de composantes $c_1, c_2 \ldots, c_n$ de $\mathbb{R}^n$.

a) Expliciter le produit matriciel C^tC. La matrice C^tC est-elle diagonalisable ?

b) Exprimer $(C^tC)^2$ en fonction de C^tC et de la norme de C.

c) En déduire que toute valeur propre de C^tC est égale à 0 ou à $\|C\|^2$.

d) Préciser le sous-espace propre associé à 0 (*AJF* lorsque $n \geqslant 2$).

Calculer C^tCC en fonction de C et préciser le sous-espace propre associé à $\|C\|^2$.

e) En déduire la nature ($\boxed{AJF}$? ?) de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice C^tC. Montrer qu'il s'agit d'une projection orthogonale lorsque le vecteur C est unitaire.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Dans cette question, on désigne par X et Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

a) Établir que ${}^tXY = {}^tYX$, ${}^tXAY = < X, AY > = < AX, Y >$, $({}^tXY)^2 = {}^tX(Y{}^tY)X = {}^tY(X{}^tX)Y$.

b) Justifier l'existence d'une base orthonormale de vecteurs $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels existent des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que $AU_1 = \lambda_1 U_1,\ AU_2 = \lambda_2 U_2, \ldots, AU_n = \lambda_n U_n$.

c) Exprimer les vecteurs X et AX dans la base $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ ainsi que leurs normes à l'aide des produits scalaires $< U_i, X >$ et $< U_i, AX >$ où $1 \leqslant i \leqslant n$, puis prouver l'égalité suivante :

$$< X, AX > = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < U_i, X >^2$$

d) En déduire les égalités matricielles suivantes : $I = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i{}^tU_i$ et $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i{}^tU_i$.

Reconnaître les endomorphismes canoniquement associés aux matrices $U_i{}^tU_i$.

e) En déduire les inégalités suivantes : $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Min}}(\lambda_i)\, \|X\|^2 \leqslant < X, AX > \leqslant \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}}(\lambda_i)\, \|X\|^2$.

f) *Application* : encadrer par deux nombres entiers les valeurs propres de la matrice d'ordre n définie ci-dessous (tous les éléments sont nuls, sauf sur les trois diagonales centrales)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Dans cette question, on note $\rho(A) = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}}(|\lambda_i|)$.

a) Vérifier que $\|AX\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 < U_i, X >^2$.

Prouver que $\|AX\| \leqslant \rho(A)\|X\|$ et exhiber un vecteur ($\boxed{AJF}$ non nul) réalisant l'égalité.

b) Établir l'équivalence des deux propositions suivantes

i. Pour tout vecteur X, la suite (A^pX) tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$

ii. $\rho(A) < 1$.