

## TD 12 S1 ALGÈBRE BILINÉAIRE

10-12-2011 et 17-12-2012

On rappelle que :

→  $\cos$  définit une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ .

→  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, 2 \cos a \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$ .

## PARTIE I

**Q1**  $n$  est un élément de  $\mathbb{N}$ . Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k} (\cos \theta)^{n-2k} (\cos^2 \theta - 1)^k$$

(calculer la partie réelle de  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ ).

**Q2**  $n$  est un élément de  $\mathbb{N}$ .

a) Montrer qu'il existe un élément  $T_n$  de  $\mathbb{R}[X]$  et un seul tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos \theta).$$

b) Préciser la parité de  $T_n$ . Calculer  $T_n(1)$  et  $T_n(-1)$ . Donner le degré de  $T_n$ .

c) Expliciter  $T_0, T_1, T_2$  et  $T_3$ .

**Q3** Montrer que, pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n.$$

(on pourra commencer par montrer que ces deux polynômes coïncident en  $\cos \theta$ ).

**Q4**  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que si  $k$  est élément de  $[[0, n-1]]$ ,  $y_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$  est une racine de  $T_n$ .

En déduire avec beaucoup de soin que  $T_n$  admet exactement  $n$  racines réelles distinctes et que ces racines sont dans l'intervalle  $] -1, 1[$ .

**Q5**  $n \in \mathbb{N}^*$ . Préciser le maximum et le minimum de  $T_n$  sur  $[-1, 1]$ . Montrer que la fonction  $T_n$  atteint sur  $[-1, 1]$  ses extremums en  $n + 1$  points que l'on déterminera.

## PARTIE II

Dans cette partie  $E$  est l'espace vectoriel des applications continues de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Q1** Montrer que pour tout élément  $u$  de  $E$ ,  $\int_{-1}^1 \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$  converge et vaut  $\int_0^\pi u(\cos \theta) d\theta$ .

**Q2** Pour tout couple  $(f, g)$  d'éléments de  $E$  on pose :  $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ .

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

Dans la suite nous noterons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ce produit scalaire et  $N$  la norme associée.

Dans la suite encore,  $F$  est le sous espace vectoriel de  $E$  constitué par les applications polynômes de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $n$  appartient à  $\mathbb{N}$ ,  $F_n$  est le sous-espace de  $F$  constitué par les applications polynômes de  $[-1, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  de degré au plus  $n$ . On pourra confondre  $F$  et  $\mathbb{R}[X]$  (resp.  $F_n$  et  $\mathbb{R}_n[X]$ )...

On se propose, pour  $\omega$  dans  $\mathbb{N}$ , de trouver l'ensemble  $\mathcal{S}_\omega$  des éléments  $P$  de  $F$  tels que :

$$\forall x \in [-1, 1], (1 - x^2) P''(x) - x P'(x) + \omega^2 P(x) = 0.$$

**Q3**  $n$  est élément de  $\mathbb{N}$ .

Montrer que  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  est une base orthogonale de  $F_n$  (on pourra poser  $t = \cos \theta$  ...).

En déduire que si  $n$  n'est pas nul,  $T_n$  est orthogonal à  $F_{n-1}$ .

Calculer la norme  $N(T_n)$  de  $T_n$ .

**Q4**  $\Phi$  est l'application qui à tout élément  $P$  de  $F$  associe  $\Phi(P)$  défini(e) par

$$\forall x \in [-1, 1], \Phi(P)(x) = (1 - x^2)P''(x) - xP'(x).$$

a) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $F$ .

b)  $P$  est un élément de  $F$ . Préciser la dérivée de  $x \rightarrow \sqrt{1 - x^2} P'(x)$  sur  $] -1, 1[$  (on pourra l'exprimer en fonction de  $\Phi(P)$ ).

c) Soit  $P$  un élément de  $\text{Ker } \Phi$ . Montrer proprement que  $P'$  est nulle. Déterminer le noyau de  $\Phi$ .

**Q5**  $P$  et  $Q$  sont deux éléments de  $F$ . Montrer que :

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = \langle P, \Phi(Q) \rangle$$

(utiliser proprement Q4b)).

**Q6**  $n$  est élément de  $\mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $F_n$  est stable par  $\Phi$ .  $\Phi_n$  est l'application de  $F_n$  dans  $F_n$  qui à  $P$  dans  $F_n$  associe  $\Phi(P)$ . Montrer très simplement que  $\Phi_n$  est un endomorphisme diagonalisable de  $F_n$ .

b) Ici  $n$  n'est pas nul. Montrer que si  $P$  est élément de  $F_n$ , il existe un réel  $\lambda$  tel que :  $\Phi_n(P) + \lambda P \in F_{n-1}$ .

Montrer que si de plus  $P$  est orthogonal à  $F_{n-1}$  alors il en est de même pour  $\Phi_n(P) + \lambda P$ .

Montrer dans ce cas que :  $\Phi_n(P) + \lambda P = 0$ .

c) Montrer que pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\Phi_n(T_n) + n^2 T_n = \Phi(T_n) + n^2 T_n = 0$ .

**Q7**  $n$  est dans  $\mathbb{N}$ . Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $\Phi_n$ .

**Q8** Répondre au problème posé.

### PARTIE III

Dans cette partie  $n$  est un élément de  $\mathbb{N}^*$ . On rappelle que, pour tout élément  $k$  de  $[[0, n - 1]]$   $y_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ , que  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  sont les zéros de  $T_n$  et que  $(T_0, T_1, \dots, T_{n-1})$  est une base de  $F_{n-1}$  donc de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ...

On rappelle encore que pour tout élément  $k$  de  $\mathbb{N}$  et tout réel  $\theta$ ,  $T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta)$ .

**Q1**  $a$  et  $b$  sont deux réels. On suppose que  $b$  n'est pas un multiple de  $2\pi$ . Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \cos\left(a + \frac{(n-1)b}{2}\right) \frac{\sin(bn/2)}{\sin(b/2)}.$$

**Q2** Montrer que si  $r$  appartient à  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k) = 0$ . Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} T_0(y_k)$ .

Montrer que pour tout élément  $r$  de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :  $\int_{-1}^1 \frac{T_r(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T_r(y_k)$ .

**Q3** Soit  $P$  un élément de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ . En utilisant la base  $(T_0, T_1, \dots, T_{n-1})$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , montrer que :

$$\int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(y_k).$$

**Q4** Montrer que la formule précédente vaut encore pour les éléments de  $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$  (on pourra prendre un élément de cet ensemble et faire la division euclidienne par  $T_n$ ).

PARTIE VI

$n$  appartient à  $\mathbb{N}^*$ .  $f$  est un élément de  $E$  que l'on se propose d'approximer à partir de ses valeurs en  $n$  points  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  deux à deux distincts de  $[-1, 1]$ .

**Q1** Pour tout  $g$  élément de  $E$  on pose :  $\|g\| = \sup_{t \in [-1, 1]} |g(t)| = \max_{t \in [-1, 1]} |g(t)|$ . Montrer rapidement que l'on définit ainsi une norme sur  $E$ .

**Q2** On pose :  $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \psi(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_{n-1}))$ .

Montrer que  $\psi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

En déduire qu'il existe un élément  $P_f$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  et un seul tel que :  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P_f(x_k) = f(x_k)$ .

**Q3** On se propose de trouver un majorant de  $\|f - P_f\|$ .

On suppose dans cette question que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[-1, 1]$ .

On pose alors  $\forall t \in [-1, 1], h(t) = f(t) - P_f(t) - AU(t)$  où  $A$  est un réel et  $U = (X - x_0)(X - x_1) \cdots (X - x_{n-1})$ .

a) Montrer que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[-1, 1]$  et que :

$$h^{(n)} = f^{(n)} - A n!$$

b) On fixe  $x$  dans  $[-1, 1] - \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ . Montrer que l'on peut trouver  $A$  tel que  $h(x) = 0$ .  $A$  étant ainsi choisi, montrer en itérant le théorème de Rolle que l'on peut trouver un élément de  $] - 1, 1[$  qui annule  $h^{(n)}$ .

En déduire que :

$$\exists \alpha_x \in ] - 1, 1[, f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n)}(\alpha_x)}{n!} U(x).$$

Montrer qu'il en est encore ainsi si  $x$  appartient à  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ .

Déduire de ce qui précède que :

$$\|f - P_f\| \leq \frac{1}{n!} \|f^{(n)}\| \|U\|.$$

**Q4** Il est alors normal d'essayer de choisir les points  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  de manière à ce que  $\|U\|$  soit minimum pour réduire l'erreur que l'on commet en remplaçant  $f$  par  $P_f$ .

Observons que  $U$  est de degré  $n$  et unitaire.

a) Montrer que  $\widehat{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n$  est également unitaire et de degré  $n$ . Préciser  $\|\widehat{T}_n\|$ .

b) Soit  $P$  un élément de  $\mathbb{R}_n[X]$  de degré  $n$  et unitaire. On suppose que :  $\|P\| < (1/2^{n-1})$ .

Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que  $P - \widehat{T}_n$  admet au moins  $n$  zéros dans  $[-1, 1]$ .

En déduire que  $P = \widehat{T}_n$  (!!) et donc que  $\|P\| \geq \|\widehat{T}_n\|$ .

c) Répondre au problème posé.

**Q5** On suppose ici, et dans toute la suite, que :  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_k = y_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$  et que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[-1, 1]$ .

a) Montrer que :

$$\|f - P_f\| \leq \frac{\|f^{(n)}\|}{2^{n-1}n!}.$$

b) Montrer que :

$$\int_{-1}^1 \frac{P_f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k).$$

c) Montrer que :

$$\left| \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt - \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k) \right| \leq \frac{\pi\|f^{(n)}\|}{2^{n-1}n!}.$$

**Q6** Ici  $\forall x \in [-1, 1], f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ .

On se propose de montrer que  $f$  est mieux approché par  $P_f$  que par  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k$ .

a) Montrer que  $\frac{1}{e n! 2^{n-1}} \leq \|f - P_f\| \leq \frac{e}{n! 2^{n-1}}$ . (on pourra revenir à Q3 b)).

b) Montrer que  $\frac{1}{(n+1)!} \leq \|f - S_n\| \leq \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}$ .

c) Morale ?

**Q7** On suppose ici  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{2n}$  sur  $[-1, 1]$ .  $U = (X - y_0)(X - y_1) \cdots (X - y_{n-1})$ .

a) S'inspirer de Q3. pour montrer qu'il existe un élément  $Q_f$  de  $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$  et un seul tel que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, Q_f(y_k) = f(y_k) \text{ et } Q'_f(y_k) = f'(y_k).$$

b) Montrer que pour tout élément  $x$  de  $[-1, 1]$  :

$$|(f - Q_f)(x)| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|}{(2n)!} U^2(x).$$

(S'inspirer de Q3 ; fixer  $x$  et considérer  $\ell(t) = f(t) - Q_f(t) - BU^2(t)$  ; choisir  $B$  pour que  $\ell(x) = 0$  ; considérer le nombre de zéros que l'on peut donner à  $\ell'$ )

c) Montrer que :

$$\int_{-1}^1 \frac{Q_f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k).$$

Montrer que :

$$\left| \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt - \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k) \right| \leq \frac{2\pi\|f^{(2n)}\|}{2^{2n}(2n)!}.$$