TD 12 S2 ALGÈBRE BILINÉAIRE 10-12-2011 et 17-12-2012

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout ce problème, on désigne par :

a) E un espace euclidien de dimension $p \geq 1$ dans lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $< x, y >$.

b) S(E) l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de E.
On rappelle qu'un endomorphisme u est dit symétrique s'il vérifie $< u(x), y > = < x, u(y) >$ pour tout couple (x, y) de vecteurs appartenant à E.

c) T(E) le sous-ensemble de S(E) constitué des endomorphismes symétriques u dont le rang est inférieur ou égal à 1 et qui vérifient $< u(x), x > \geq 0$ pour tout vecteur x appartenant à E.

Dans la partie I, on décrit les endomorphismes appartenant à T(E) puis, dans la partie II, on munit l'espace vectoriel S(E) d'un produit scalaire et on étudie au sens de la norme associée les meilleures approximations des éléments de S(E) par des éléments de T(E).

Préliminaire: Trace d'une matrice et d'un endomorphisme.

On désigne par $M_p(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre $p \geq 1$. On associe à toute matrice $A = (a_{ij})$ appartenant à $M_p(\mathbf{R})$ sa trace notée $Tr(A)$ et définie par :

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{p} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{pp}.$$

a) Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ désignent deux matrices appartenant à $M_p(\mathbf{R})$, expliciter $Tr(AB)$ et montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$.

b) Si M' et M désignent deux matrices semblables appartenant à $M_p(\mathbf{R})$, en déduire que les traces de M' et M sont égales.
Dans la suite, on appelle *trace d'un endomorphisme de E* la valeur commune de la trace de ses matrices M relativement aux différentes bases de E.

Partie I : Etude des éléments de l'ensemble T(E).

1°) Sous-espace orthogonal à un vecteur non nul x de E.

On considère dans cette question un vecteur non nul x appartenant à E.

a) Pour tout vecteur v appartenant à E, exprimer en fonction de x et v l'unique nombre réel $\lambda(v)$ tel que le vecteur $v - \lambda(v)x$ soit orthogonal à x.

b) En remarquant que tout vecteur v appartenant à E peut s'écrire sous la forme:

$$(1) \qquad v = \lambda(v)x + (v - \lambda(v)x)$$

établir que la droite dirigée par le vecteur x et le sous-espace X constitué des vecteurs de E orthogonaux au vecteur x sont supplémentaires dans E.

2°) Elément de T(E) associé à un vecteur de E.

A tout vecteur non nul x de E, on associe l'application u_x de E dans E définie par:

$$u_x(v) = \langle x, v \rangle x.$$

a) Montrer que u_x appartient à T(E), puis écrire la matrice de u_x dans une base de E constituée du vecteur x et d'une base du sous-espace X orthogonal à x.

En déduire la trace de u_x et la trace de $u_x \circ u_x$ en fonction de x.

b) Déterminer en fonction de x les valeurs propres et les sous-espaces propres de u_x.

c) On désigne par f un endomorphisme de E.

A l'aide de la formule (1), expliciter les éléments diagonaux de la matrice de $f \circ u_x$ dans une base de E constituée du vecteur x et d'une base du sous-espace X orthogonal à x, puis en déduire la trace de $f \circ u_x$ en fonction de x.

3°) Vecteurs de E associés à un élément de T(E).

A tout élément non nul u de T(E), on associe un vecteur non nul x de la droite Imu.

a) Montrer que x est vecteur propre de u et que la valeur propre associée μ est positive.

b) A l'aide de la formule (1), montrer que l'on a pour tout vecteur v appartenant à E :

$$u(v) = \frac{\mu}{\|x\|^2} \langle x, v \rangle x.$$

c) En déduire que la valeur propre μ est strictement positive et qu'il existe un vecteur y de E au moins tel que $u = u_y$, c'est à dire tel que l'on ait pour tout vecteur v appartenant à E:

$$u(v) = \langle y, v \rangle y.$$

d) L'application de E dans T(E) associant à tout vecteur x appartenant à E l'endomorphisme u_x de T(E) défini par $u_x(v) = \langle x, v \rangle x$ est-elle injective ? surjective ?

Partie II : Approximation des éléments de S(E) par des éléments de T(E).

On associe à tout couple (f, g) d'endomorphismes appartenant à S(E) le nombre réel:

$$[f, g] = Tr(f \circ g)$$

valeur commune de la trace des matrices de $f \circ g$ relativement aux différentes bases de E. Ainsi, lorsque l'espace euclidien E est rapporté à une base orthonormale dans laquelle on désigne par $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ les matrices (alors symétriques) de f et g, on a:

$$[f, g] = Tr(AB).$$

1°) Un produit scalaire sur S(E).

a) Montrer que l'application associant à tout couple (f, g) d'endomorphismes appartenant à S(E) le nombre réel $[f, g] = Tr(f \circ g)$ est un produit scalaire sur S(E).

On notera N la norme associée à ce produit scalaire, définie par $N(f) = \sqrt{[f, f]}$.

b) On désigne par f un élément de S(E) et par u_x un élément de T(E). Déduire des résultats obtenus dans la partie I que:

$$N^2(f - u_x) = N^2(f) - 2 < x, f(x) > + \|x\|^4.$$

Dans la suite, on suppose que l'endomorphisme symétrique f est *donné* dans S(E) et l'on pose pour tout vecteur x appartenant à E:

$$F(x) = N^2(f) - 2 < x, f(x) > + \|x\|^4.$$

L'objectif est de déterminer les vecteurs x de E, c'est à dire les endomorphismes u_x de T(E), qui réalisent le minimum $m(f) = \inf\{ F(x) \,/\, x \in \mathrm{E} \}$ dans la mesure où celui-ci existe.

2°) Condition nécessaire de minimum pour F.

Pour tout vecteur x et pour tout vecteur unitaire y (vérifiant donc $\|y\| = 1$) appartenant à E, on considère la fonction h définie de **R** dans **R** par:

$$h(t) = F(x + ty).$$

a) Montrer que h est une fonction polynôme de degré 4 dont on précisera les coefficients.
b) Prouver, si F présente un minimum en x pour tout vecteur unitaire y, que $h'(0) = 0$.
c) En déduire que $f(x) = \|x\|^2 x$.
d) Prouver, si F présente un minimum en x, que:

$$F(x + ty) - F(x) = t^2[(t + 2 < y, x >)^2 + 2(\|x\|^2 - < y, f(y) >)].$$

3°) Condition nécessaire et suffisante de minimum pour F.

Prouver que $F(x) = m(f)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:

(i) $f(x) = \|x\|^2 x$; (ii) pour tout vecteur unitaire y: $< y, f(y) > \leq \|x\|^2$.

4°) Etude du maximum de $< y, f(y) >$ pour $\|y\| = 1$.

a) Justifier, à l'aide d'un théorème dont on citera précisément l'énoncé, l'existence d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ formée de vecteurs propres pour f. On notera $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de f associées à ces vecteurs propres $e_1, e_2, \ldots, e_p$ en supposant celles-ci classées dans l'ordre croissant.
b) Exprimer $N(f)$ en fonction des valeurs propres de f.
c) En décomposant un vecteur unitaire y dans la base précédente, montrer que:

$$\mathrm{Sup}\{ < y, f(y) > \,/\, \|y\| = 1 \} = \lambda_p.$$

On précisera de plus quels sont les vecteurs unitaires y tels que $< y, f(y) > = \lambda_p$.

5°) Conclusion et valeur de $m(f)$.

a) Montrer que si $\lambda_p \leq 0$, alors $F(x) = m(f)$ si et seulement si x est nul.
b) Déterminer si $\lambda_p > 0$ la valeur de $m(f)$ et l'ensemble des vecteurs x tels que $F(x) = m(f)$.

6°) Application à l'étude d'un exemple.

Dans cette question, l'espace euclidien $\mathrm{E} = \mathbf{R}^p$ est rapporté à sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique. On suppose que, dans cette base canonique, la matrice symétrique $M = (m_{ij})$ de f vérifie les deux propriétés suivantes:

- $m_{ij} > 0$ pour tout couple (i, j) de nombres entiers compris entre 1 et p.
- $\sum_{j=1}^{p} m_{ij} = 1$ pour tout nombre entier i compris entre 1 et p.

a) Montrer que 1 est valeur propre de M et donner un vecteur propre associé.
b) On désigne par λ une valeur propre de M, par X un vecteur associé de composantes $x_1, x_2, \dots, x_p$, et par i un nombre entier tel que $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|)$.
En considérant la $i^{ième}$ ligne du système $MX = \lambda X$, montrer que $|\lambda| \leq 1$, puis que l'égalité $|\lambda| = 1$ implique $\lambda = 1$ et $x_1 = x_2 = \dots = x_p$.
(On rappelle à cet effet que dans l'inégalité triangulaire de **R***, il y a égalité si et seulement si tous les nombres réels qui interviennent sont de même signe).*
Préciser la dimension du sous-espace propre associé à 1.
c) Déterminer enfin les vecteurs x appartenant à $\mathbf{R}^p$ tels que $F(x) = m(f)$, puis démontrer alors qu'il existe un unique endomorphisme u appartenant à T(E), dont on donnera la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^p$, tel que $m(f) = N^2(f - u)$.
Que représente cette dernière matrice ?

***